大学数学系列丛书

高等数学方法导引

(上)

何卫力　缪克英　主编

季文铎　主审

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是“大学数学系列丛书”之一,分为上、下两册.本册为上册,内容包括:函数、极限、连续、一元函数微分学及应用、中值定理、泰勒公式、不等式的证明、一元函数积分学及应用、向量代数、空间解析几何.

上册共有 15 讲,每一讲由四部分组成.第一部分是把每讲所用到的基本概念、定理、公式罗列出来,简洁翔实,便于读者学习;第二部分是例题选讲,所选编例题基本而典型、广泛而不重复,阐明解题思路,总结解题方法;第三部分是练习题,精选出若干具有代表性的题目供读者练习;第四部分是答案与提示,对较难的题给出提示,对特别难的题给出全解,以便读者对照参考,巩固所学知识.

本书可作为各类大专院校学生学习高等数学的参考书,也可作为参加硕士研究生数学入学考试及高等数学竞赛学生的复习参考书.

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学方法导引.上册/何卫力,缪克英主编.—北京:北京交通大学出版社,2004.2
(大学数学系列丛书)
ISBN 7-81082-274-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①何… ②缪… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 117856 号

责任编辑:高振宇　　特邀编辑:任国臣
印 刷 者:北京瑞达方舟印务有限公司
出版发行:北京交通大学出版社　　电话:010-51686045,62237564
北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编:100044
经　　销:各地新华书店
开　　本:787×960　1/16　　印张:15.5　　字数:343 千字
版　　次:2004 年 2 月第 1 版　　2006 年 3 月第 2 次印刷
印　　数:3 001～6 000 册　　定价:25.00 元

总序

随着人类进入 21 世纪,科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中,各种竞争的关键就是科学技术的竞争,科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上,而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代,将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活,引发新的、深刻的变化。在知识经济时代,国家的竞争能力和综合国力的强弱,不仅取决于其拥有的自然资源,更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平,尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源,拥有智力资源的是人才,人才来自教育。要提高民族的创新能力,归根到底要提高全体民众的教育水平,培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中,数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出,数学教育在人类的精神营养中,确实有"精神钙质"的作用,因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像,一个数学知识贫乏的人,会在科学上有所建树。因此,全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平,将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力,关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力,是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑,我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革,特别是数学教学改革的经验,借鉴近几年数学教学改革的一些实践与做法,组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师,在精心筹划、多方面研讨的基础上,编写了这一套"大学数学系列丛书"。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的功夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章内容,而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验;同时注意编写了与主教材配套的辅导教材,这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上,我们注重对主教材内容知识的扩展,同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是,我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为,这种做法是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外,为了适应目前大学数学教学改革的需要,我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。

我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合“高等数学方法”选修课及参加北京市大学生(非数学专业)数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持。在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助。在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会

2004 年 2 月

前言

高等数学是每个工科学生的必修课程,也是现代科学技术应用最广泛的一门学科.在高等数学的学习过程中,解题是一项运用所学的知识去解决问题和分析问题的重要技能,也是一种能力的训练过程.著名美籍匈牙利数学家、教育家波利亚在《数学的发现》一书中指出,“任何一门学问都是由知识和技能所组成”,“在数学中,技能比仅仅掌握一些知识重要得多”.

“上课能听懂,解题目却不知从何处下手”,这是许多大学一年级同学在高等数学课程学习中普遍存在的问题.本书就是为了较好地解决这个问题而编写的.我们将高等数学中常见题目进行分类,共27个专题,并通过精选的典型例题对每一个专题进行讲解.一方面给出这种类型习题常见的几种解法,另一方面阐明各种解法适用的题目所具有的特征.对教学中的难点,本书用较大的篇幅做了重点讲解,如极限的求法、方程根的证明、不等式等.对计算题,着重于计算方法的归纳、总结;对证明题,则着重于阐明分析问题的方法及证题思路.

本书是在开设“高等数学方法”全校选修课的基础上,并经过6年的高等数学竞赛辅导实践形成的,主要面对数学基础比较好的学生,帮助数学爱好者提高数学素质和技能,可作为参加数学竞赛以及研究生入学考试的学习指导用书.全书分上、下两册,共27讲,每一讲包括下列内容:第一部分为基本概念、内容、定理、公式,是把本讲所用到的基本概念、定理、公式罗列出来,以便于读者学习;第二部分为例题选讲,是根据本讲所要讲述的内容精选例题,通过这些例题的讲解,阐明解题思路、总结解题方法;第三部分练习题,精选出若干具有代表性的题目供读者练习;第四部分为答案与提示,给出练习题的答案,并对较难的题给出提示,对特别难的题给出全解,以进一步帮助同学巩固所学知识.本册为上册,包括了15讲的内容.

本书在编写过程中,得到了北京交通大学理学院副院长刘晓和数学系的大力支持和帮助,另外季文铎教授、陈治中教授、赵达夫教授、修乃华教授、付俐副教授、郝荣霞副教授、刘迎东副教授等一直给予了具体的指导和帮助,北京交通大学出版社郭洁副编审为此书的出版付出了辛勤的劳动,在此一并表示衷心感谢.

本书编写的具体分工如下:第1～11讲由何卫力编写,第12讲由刘迎东编写,第13讲由郝荣霞编写,第14讲由魏二玲(中国人民大

学)编写,第 15 讲由李赵祥(中央民族大学)编写,第 16～22 讲由缪克英编写,第 23 讲由何卫力编写,第 24 讲由钟波编写,第 25 讲由冯国臣编写,第 26 讲由桂文豪编写,第 27 讲及附录由邵吉光编写,全书最后由何卫力审校、定稿.

由于编写时间比较仓促及水平有限,本书定有疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正,以便进一步修订.

作　者

2004 年 2 月

目录

第 1 讲　函数

第 2 讲　极限

第 3 讲　函数的连续性

第 4 讲　求导问题

第 5 讲　导数的应用

第 6 讲　方程根的证明问题

第 7 讲　泰勒公式

第 8 讲　不等式的证明

第 9 讲　不定积分

第 10 讲　定积分的计算

第 1 讲　函　　数

1.1　基本概念、内容、定理、公式

函数是高等数学研究的主要对象,它反映客观世界量与量之间的相互依赖关系,是学好高等数学的基础.

1.函数的概念

函数是两个非空实数集合 X 和 Y 之间的一个映射.即当 $x\in X$ 时,按一定法则有惟一 $y\in Y$ 与之对应,称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.集合 X 是函数 $f(x)$ 的定义域,$f(X)$ 称为值域,X 可为区间、离散点集或某个较复杂的实数集合.

2.函数的性质

(1) 有界性:若 $\exists M>0$,对 $\forall x\in X$,都有 $|f(x)|\leq M$,则称 $f(x)$ 在集合 X 上有界;否则称 $f(x)$ 在集合 X 上无界,即对 $\forall M>0$,$\exists x\in X$,使得 $|f(x)|>M$ 成立.

(2) 单调性:若对于定义域 X 上的任意两点 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)称 $f(x)$ 严格单调增加(或严格单调减少).又如果有 $f(x_1)\leq f(x_2)$(或 $f(x_1)\geq f(x_2)$)称 $f(x)$ 单调增加(或单调减少).

(3) 奇偶性:若定义域 X 在 x 轴上关于原点对称,且对 $\forall x\in X$,都有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为偶函数;又如果 $\forall x\in X$,都有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性:若 $\exists T>0$,对 $\forall x\in X$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,且称具有上述性质的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

3.复合函数

设函数 $y=f(u)(u\in U)$ 与 $u=g(x)(x\in X)$ 且 $g(X)\quad U$,这时 y 通过 u 可表示为 x 的函数,称为复合函数,记作 $y=f(g(x))$,其中 u 称为中间变量.

4.反函数

设函数 $y=f(x)$,如果对 $\forall y\in Y$ 有惟一确定的 $x\in X$,使得 $f(x)=y$,则确定 x 是 y 的函数,称为 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.

注:具有严格单调性的函数其反函数总是存在的.

5.初等函数

基本初等函数:常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成的由一个式子表示的函数称为初等函数.

非初等函数
- 大部分分段函数 如符号函数 $\operatorname{sgn} x$,狄利克雷函数 $D(x)$;
- 积分表示的函数 (可变上限积分) 如 $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d} t$;
- 用级数表示的函数 如 $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ 等.

1 2 例题选讲

例 1 1 求下列函数的定义域.

(1) $y = f(\sin 2x)$,已知 $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$;

(2) $y = f(x+a) + f(x-a)$,已知 $f(x)$ 定义域为 $[0,2]$;

(3) $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots(f(x))))}_{n}$,已知 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解:(1) $y = f(\sin 2x)$ 的定义域满足 $0 \leq \sin 2x \leq 1$,即 $k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathrm{Z})$.

(2) $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 2; \\ 0 \leq x-a \leq 2. \end{cases}$ $\begin{cases} -a \leq x \leq 2-a; \\ a \leq x \leq 2+a. \end{cases}$ $\begin{cases} [a, 2-a], & 0 \leq a \leq 1; \\ [-a, 2+a], & -1 \leq a < 0; \\ \ , & a > 1 \text{ 或 } a < -1. \end{cases}$

(3) 由 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$,得

$$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\left(x/\sqrt{1-x^2}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}}.$$

猜想: $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$ (可由数学归纳法证明).

故定义域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

例 1 2 已知 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$,求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$.

解:因为 $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$,所以 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$,

即 $f(u) = 2(1-u^2)$,故 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2\left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2\sin^2 \frac{x}{2}$.

进一步将题目改为:已知 $f'\left(\sin \frac{x}{2}\right) = 1 + \cos x$,求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$.

由上题知 $f'(u)=2(1-u^2)$,

即　$f(u)=\int 2(1-u^2)\,\mathrm{d}u=2u-\frac{2}{3}u^3+C$,

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\cos\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C.$$

例 13　设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$,求 $f(f(x))$.

解 1:将绝对值写成分段函数的形式,

$$f(x)=\begin{cases}-2, & x\leq -1;\\ 2x, & -1<x\leq 1;\\ 2, & x>1;\end{cases}\text{所以 } f(f(x))=\begin{cases}-2, & f(x)\leq -1;\\ 2f(x), & -1<f(x)\leq 1;\\ 2, & f(x)>1;\end{cases}$$

即 $$f(f(x))=\begin{cases}-2, & x\leq -\frac{1}{2};\\ 4x, & -\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2};\\ 2, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

将题目进一步改为:设 $f'(x)=|1+x|-|1-x|$,且 $f(1)=1$,求 $f(x)$.

解 2:由上题知 $$f'(x)=\begin{cases}-2, & x\leq -1;\\ 2x, & -1<x\leq 1;\\ 2, & x>1;\end{cases}$$

则 $$f(x)=\begin{cases}-2x+C_1, & x\leq -1;\\ x^2+C_2, & -1<x\leq 1;\\ 2x+C_3, & x>1.\end{cases}$$

因为 $f(1)=1$,所以 $f(1)=1+C_2=1$,即 $C_2=0$.

由 $f(x)$可导知必连续,所以 $2+C_1=1+C_2=2+C_3$,即 $C_1=C_3=-1$.

所以 $$f(x)=\begin{cases}-2x-1, & x\leq -1;\\ x^2, & -1<x\leq 1;\\ 2x-1, & x>1.\end{cases}$$

例 14　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$,求证:$f(x)$为周期函数.

证明:

$$f(x+1)+f(x-1)=f(x),\tag{1}$$

用 $x+1$ 代替式(1)中的 x,得到 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$,移项得

$$f(x+2)-f(x+1)=-f(x).\tag{2}$$

(1)+(2)得:$f(x+2)+f(x-1)=0$.令 $t=x-1$,得

$f(t+3)=-f(t)$,即 $f(x+3)=-f(x)$,

所以 $f(x+6)=-f(x+3)=-(-f(x))=f(x)$.

所以 $f(x)$是周期 $T=6$ 的周期函数.

例 1 5 若函数 $f(x)(x\in\mathrm{R})$的图形关于两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称($b>a$),则函数 $f(x)$为周期函数.

分析:由条件知:$f(a+x)=f(a-x)$,$f(b+x)=f(b-x)$,于是在 a 和 b 的中点$\frac{a+b}{2}$处有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)=f\left(a-\frac{b-a}{2}\right)=f\left(b-\frac{b-a}{2}\right)=f\left(b+\frac{b-a}{2}\right).$$

猜想:$T=2(b-a)$.

解:$\forall x\in\mathrm{R}$,

$$\begin{aligned}f(x+2(b-a))&=f(b+(x+b-2a))=f(b-(x+b-2a))\\&=f(2a-x)=f(a+(a-x))=f(a-(a-x))=f(x).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$是周期 $T=2(b-a)$的周期函数.

例 1 6 试证:定义在对称区间$(-l,l)$内的任何函数 $f(x)$都可以表示为偶函数与奇函数之和的形式,并且表示法是惟一的.

证明:设 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$,$\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.

因为 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,$\varphi(-x)=-\varphi(x)$,所以 $\varphi(x)$为偶函数,$\varphi(x)$为奇函数,且 $f(x)=\varphi(x)+\varphi(x)$,从而 $f(x)$可以表示为偶函数与奇函数之和.

下面证明表示法是惟一的.

设 $g_1(x)$是偶函数,$g_2(x)$是奇函数,且 $f(x)=g_1(x)+g_2(x)$,

因此有

$$f(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)-g_2(x),$$

由以上两式可得

$$g_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=\varphi(x),\ g_2(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=\varphi(x).$$

所以表示法惟一.

例 1 7 证明函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$在区间$[0,+\infty)$上单调增加,并由此证明不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证明:$\forall x_1,x_2$,满足 $0\leq x_1<x_2<+\infty$,

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2}-\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}>0;$$

所以 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调增加.

取 $x_1=|a+b|$,$x_2=|a|+|b|$.因为 $0\leq x_1\leq x_2$,所以 $f(x_1)\leq f(x_2)$,即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leq\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leq\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

例 18　设 $f(0)=0$，且 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$　（a,b,c 为常数，$|a|\neq|b|$）．

求证：$f(x)$ 为奇函数．

证明：先求 $f(x)$．当 $x\neq 0$ 时，令 $x=\frac{1}{t}$，得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，与已知方程联立得

$$\begin{cases} af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \\ af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \end{cases}$$

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，解得 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)$，所以

$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{-x}-bc(-x)\right)=-f(x).$$

又 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 为奇函数．

进一步：设 $F(x)$ 除 $x=0$ 与 $x=1$ 两点外，对全体实数有意义，且满足 $F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$，求满足此条件的 $F(x)$．

解：由已知

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x. \tag{1}$$

令 $\frac{x-1}{x}=t$　$x=\frac{1}{1-t}$，代入式(1)，再用 $t=x$ 代入，得

$$F\left(\frac{1}{1-x}\right)+F(x)=\frac{2-x}{1-x}. \tag{2}$$

在式(1)中用 $\frac{x-1}{x}$ 代替 x，得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+\frac{x-1}{x}=\frac{2x-1}{x}. \tag{3}$$

(1) + (2) - (3)，得

$$2F(x)=1+x+\frac{2-x}{1-x}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)},$$

即
$$F(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}.$$

例 19　求证若对任何实数 x,y，有 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ 且 $f(0)=0$，则

(1) $f(x)f(y)=xy$;　　(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$．

证明：(1) 令 $y=0$，由 $f(0)=0$ 和方程 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ 得到 $|f(x)|=|x|$．即

$f^2(x)=x^2$.将方程$|f(x)-f(y)|=|x-y|$两边平方,得

$$f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2,$$

即 $f(x)f(y)=xy$.

(2) 令 $y=1$ 并代入 $f(x)f(y)=xy$ 中,得 $f(x)f(1)=x$,从而有

$$f(x+y)f(1)=x+y=f(x)f(1)+f(y)f(1)=(f(x)+f(y))f(1).$$

又因为 $f^2(1)=1\neq 0$,故有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

例 1.10 设 $f(x)$在(a,b)内有定义,且对于任意 $x_1,x_2\in(a,b)$恒有$|f(x_1)-f(x_2)|\leq(x_1-x_2)^2$,试证:$f(x)$在$(a,b)$内为常数.

证明:(方法 1) 利用导数,即证 $f'(x)=0(\forall x\in(a,b))$.

因为
$$0\leq\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leq|\Delta x|\to 0(\Delta x\to 0),$$

由夹逼法则得 $f'(x)=0$,即 $f(x)$在(a,b)内为常数.

(方法 2) 在(a,b)内任取两点 $x\neq y$,并将$[x,y]$分成 n 等分,其 $n-1$ 个分点分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$, $\alpha_0=x,\alpha_n=y$, $\alpha_{i+1}-\alpha_i=\dfrac{y-x}{n}$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$,则

$$\begin{aligned}0\leq|f(x)-f(y)|&=|f(\alpha_0)-f(\alpha_1)+f(\alpha_1)-f(\alpha_2)+f(\alpha_2)-\cdots+f(\alpha_{n-1})-f(\alpha_n)|\\&\leq|f(\alpha_0)-f(\alpha_1)|+|f(\alpha_1)-f(\alpha_2)|+\cdots+|f(\alpha_{n-1})-f(\alpha_n)|\\&\leq(\alpha_0-\alpha_1)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2+\cdots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2\\&=\left(\frac{y-x}{n}\right)^2+\left(\frac{y-x}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{y-x}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n}(y-x)^2\to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

由夹逼法则知 $f(x)=f(y)$,即得 $f(x)$在(a,b)内为常数.

例 1.11 设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的邻域内有界,且满足方程 $f(x)-qf(qx)=x^2$,其中,$q\in\mathrm{R}$,$0\leq q<1$,求 $f(x)$.

解:因 $f(x)-qf(qx)=x^2$,故由递推关系得

$$\begin{aligned}&qf(qx)-q^2f(q^2x)=q^3x^2,\\&q^2f(q^2x)-q^3f(q^3x)=q^6x^2,\\&\cdots\\&q^{n-1}f(q^{n-1}x)-q^nf(q^nx)=q^{3(n-1)}x^2.\end{aligned}$$

将上述各式相加,得

$$f(x)-q^nf(q^nx)=x^2(1+q^3+q^6+\cdots+q^{3(n-1)})=x^2\frac{1-q^{3n}}{1-q^3}.$$

因 $0\leq q<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}q^{3n}=0$,而 $f(x)$在点 $x=0$ 的邻域内有界,故

$\lim\limits_{n\to\infty}q^nf(q^nx)=0$,于是 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-q^3}$.

1.3 练习题

1 1 设 $f(x)$定义域为$(-\infty,+\infty)$,且存在正数 K和 T使 $f(x+T)=Kf(x)$对一切 x都成立,证明:存在正数 a和以 T为周期的函数$\varphi(x)$,使得 $f(x)=a^x\varphi(x)$.

1 2 设 $f(x)=\ln x$,且 $g(x)=\begin{cases} x^2, & |x|\leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1 \end{cases}$,试求 $g(f(x))$与 $f(g(x))$.

1 3 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f(g(x))=1-x$,且 $g(x)\geq 0$,求 $g(x)$的表达式和定义域.

1 4 设$\varphi(x)$、$\psi(x)$及 $f(x)$是单调增函数,且 $\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$,证明:$\varphi(\varphi(x))\leq f(f(x))\leq\psi(\psi(x))$.

1 5 设 $f(x)$满足 $\sin f(x)-\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)=x$, $f(x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,求 $f(x)$.

1 6 证明 $f(x)=x\cos x$不是周期函数.

1 7 试证定义在同一个数集上且周期是可通约的两个周期函数的和与差也是周期函数,并求 $f(x)=2\tan\dfrac{x}{2}+3\tan\dfrac{x}{3}$的周期.

1 8 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,且在该区间上恒有 $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,其中 a为正实数,试证:$f(x)$为周期函数.

1 9 设对 " $x,y\in\mathbf{R}$, $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\leq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$且 $f(x)\geq 0$, $f(0)=c$,证明:$f(x)\equiv c$.

1 10 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,且 $a>0$, $b>0$,若$\dfrac{f(x)}{x}$单调减少,证明:$f(a)+f(b)\geq f(a+b)$.

1.4 答案与提示

1 1 设$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{a^x}$,$\varphi(x+T)=\dfrac{f(x+T)}{a^{x+T}}=\dfrac{Kf(x)}{a^Ta^x}=\dfrac{K}{a^T}\varphi(x)=\varphi(x)$,即$\dfrac{K}{a^T}=1$,故 $a=K^{\frac{1}{T}}$.

1 2 $g(f(x))=\begin{cases} \ln^2 x, & \dfrac{1}{e}\leq x\leq e \\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & x>e,0<x<\dfrac{1}{e} \end{cases}$; $f(g(x))=\begin{cases} \ln x^2, & |x|\leq 1 \\ -\ln x^2, & |x|>1 \end{cases}$.

1 3 $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leq 0$.

1 4 由$\varphi(x)\leq f(x)\leq\psi(x)$,得 $\varphi(\varphi(x))\leq f(\varphi(x))$;又 $f(x)$是单调增函数,$f(\varphi(x))\leq f(f(x))$,故$\varphi(\varphi(x))\leq f(f(x))$.同理可证 $f(f(x))\leq\psi(\psi(x))$.

1 5 对等式 $\sin f(x)-\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)=x$ (1)

中 x分别用$\dfrac{1}{3}x,\dfrac{1}{3^2}x,\cdots,\dfrac{1}{3^{n-1}}x$代替后,得 $\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)-\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3^2}x\right)=\dfrac{1}{3}x$,

两边同乘以$\dfrac{1}{3}$,得 $\dfrac{1}{3}\sin f\left(\dfrac{1}{3}x\right)-\dfrac{1}{3^2}\sin f\left(\dfrac{1}{3^2}x\right)=\dfrac{1}{3^2}x$, (2)

同理,得
$$\frac{1}{3^2}\sin f\left(\frac{1}{3^2}x\right)-\frac{1}{3^3}\sin f\left(\frac{1}{3^3}x\right)=\frac{1}{3^4}x, \tag{3}$$
$$\cdots$$
$$\frac{1}{3^{n-1}}\sin f\left(\frac{1}{3^{n-1}}x\right)-\frac{1}{3^n}\sin f\left(\frac{1}{3^n}x\right)=\frac{1}{3^{2(n-1)}}x. \tag{n}$$
$(1)+(2)+\cdots+(n)$,得
$$\sin f(x)-\frac{1}{3^n}\sin f\left(\frac{1}{3^n}x\right)=\frac{x\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{9}{8}x\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right).$$
两边对 $n\to\infty$ 求极限,得 $\sin f(x)=\frac{9}{8}x$,即
$$f(x)=\arcsin\frac{9}{8}x.$$

16　反证法:设 $f(x)=x\cos x$ 是以 T 为周期的函数,则对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x+T)=f(x)$,即
$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$
令 $x=\frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$,即
$$\sin T=0. \tag{1}$$
令 $x=0$, $T\cos T=0$,即
$$\cos T=0. \tag{2}$$
(1)、(2)矛盾!

17　证明:设 $f_1(x)$和 $f_2(x)$是定义在同一数集上,周期分别为 T_1 和 T_2 的两个周期函数.因为 T_1 和 T_2 是可通约的,即$\frac{T_1}{T_2}=\frac{m}{n}$,于是有 $nT_1=mT_2=T$,其中 m,n 互质.

设 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$,则
$$F(x+T)=f_1(x+T)+f_2(x+T)=f_1(x+nT_1)+f_2(x+mT_2)=f_1(x)+f_2(x)=F(x).$$
故 $f_1(x)+f_2(x)$是一个周期为 T 的周期函数,且 T 为 T_1 和 T_2 的最小公倍数.同理可证, $f_1(x)\cdot f_2(x)$是一个周期为 T 的周期函数,且 T 为 T_1 和 T_2 的最小公倍数,故 $f(x)=2\tan\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{3}$的周期为 6π.

18　由于 $f(x+2a)=f(x+a+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+a)-f^2(x+a)}$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|,$$
注意到 $f(x)\geq\frac{1}{2}$,即有 $f(x+2a)=f(x)$.

19　先证 $f(x)\geq c$,假设 $\exists a$,使得 $f(a)<c=f(0)$,取 $h=f(0)-f(a)>0$,在条件中令 $x=0$, $y=2a$,得 $f(0)+f(2a)\leq 2f(a)$,即 $f(2a)\leq 2f(a)-f(0)=f(0)-2h$,假设 $f(2^n a)\leq f(0)-2^n h$,则在条件中令 $x=0$, $y=2^{n+1}a$,得
$$f(2^{n+1}a)\leq 2(f(2^n a)-f(0))\leq 2[f(0)-2^n h]-f(0)=f(0)-2^{n+1}h.$$