高 等 数 学

陈克西　季福弟　主 编

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是根据全国高等院校工科数学教材编审委员会审定的《高等数学教学大纲》的要求编写的。

全书共12章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数和常微分方程。各章节均有习题,书末附有习题答案。

本书表达准确、由浅入深。可作为高等工科院校各专业及成人教育、电视大学学生的教材,也可供其他专业学生使用。

高 等 数 学

陈克西　季福弟　主　编

责任编辑:曾令维　　版式设计:曾令维

责任印制:秦　梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378　65105781

传真:(023) 65103686　65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆铜梁正兴印务有限公司印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:27.75　字数:692千

1997年6月第1版　　2005年8月第7次印刷

印数:29 001—32 000

ISBN 7-5624-1351-7/O·144　　定价:32.00元

序

面对知识爆炸,社会学家们几乎都开出了一个相同的药方:计算机。计算机也深孚众望,以其强大的功能,对人类作出了巨大的贡献,取得了叹观止矣的成就。自它 1946 年 2 月 14 日在美国费城诞生以来,至今已过“知天命”的年龄了。现在,计算机已是一个庞大的家族。如果说,它的成员占据了世界的每一个角落和每一个部门也并不过分,甚至找不到这样一个文明人,他的生活不直接或间接与计算机有关。目前,全世界计算机的总量已达数亿台,而且,现在正以每年几千万台的速度增长。

作为计算机在信息传递方面的应用,计算机加上网络,被认为是和能源、交通同等重要的基础设施。这种设施对信息的传递起着异常重要的作用。西方发达国家和我们国家对此都非常重视。例如,美国的信息高速公路计划,全球通讯的“铱”计划,我国也开始实行一系列“金”字头的国民经济管理信息化计划。这些计划中唱主角的设备便是计算机。计算机在各个方面的应用不胜枚举,我们每个人都自觉不自觉地处于计算机包围中。

计算机对社会生产来说是一个产业大户,对每个现代人来说是一种工具,对学生们来说,它是一个庞大的知识系统。面对计算机知识的膨胀,面对计算机及其应用产业的膨胀,计算机各个层次的从业人员的需要也在不断膨胀,计算机知识的教育也遍及从小学生到研究生的各个层次。

为了适应计算机教学的需要,重庆大学出版社近几年出版了大量的计算机教学用书,这一套教材就是一套适应专科层次的系列教材。我们将会看到,这一套教材以系列、配套、适用对路,便于教师和学生选用。如果再仔细研究一下,将会发现它的一系列编写特色:

1. 这些书的作者们是一些长期从事计算机教学和科研的教师,不少作者在以前都有大量计算机方面的著作出版。例如本系列书中的《Visual Fox Pro 中文版教程》的作用,十年前回国后最早将狐狸软件介绍到祖国大陆,这一本书已是他的第八本著作了。坚实的作者基础,是这套书成功的最根本的保证。

2. 计算机科学是发展速度惊人的科学,内容的先进性、新颖性、科学性是衡量计算机图书质量的重要标准,这一套书的作者们在这方面花了极大的功夫,力求让读者既掌握计算机的基础知识,又让读者了解最新的计算机信息。

3. 在内容的深度和知识结构上,从专科学生的培养目标出发,在理论上,从实际出发,满足本课程及后续课程的需要,而不刻意追求理论的深度。在知识结构上,考虑到全书结构的整体优化,而不过分强调单本书的系统性。这样,在学过这

一套系列教材后,学生们就可在浩瀚的计算机知识中,建立起清晰的轮廓,就会知道这些知识的前因后果,就会了解这些知识的前接后续。使学生们能在今后的工作实践中得心应手。

4. 计算机是实践性很强的课程,仅靠坐而论道是学习不了这些知识的。所以从课程整体设置来讲,包括有最基本的操作技能的教材。对单本书来说,在技术基础课和专业课中,都安排有一定的上机实习或实验,这样可使学生既具备一定的理论知识以利今后发展和深造,又掌握实际的工作技能胜任今后的实际工作。

编写一套系列教材,这是一个巨大的工程。这一套书的作者们,重庆大学出版社的领导和编辑们,都为此付出了辛勤的劳动。作为计算机工作者,以此序赞赏他们的耕耘,弘扬他们的成绩。

周明德

1997 年 6 月 15 日

数学就是这样一种东西: 她提醒你有无形的灵魂, 她赋予她所发现的真理以生命; 她唤起心神, 澄净智慧; 她给我们的内心思想添辉; 她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

Proclus

数学分析与自然界本身同样广阔。

Fourier

前　言

本书是根据全国高等院校工科数学教材编审委员会审定的《高等数学教学大纲》的要求, 主要为高等工科院校计算机、电子、机械等各类专业的学生编写的, 可作为高等数学课程的试用教材或教学参考书, 也可供工程技术人员参考。

在本书的编写过程中, 始终致力于教材质量的提高, 吸收了编者在教学中积累的一些有益的经验。在全书内容的编排上, 一方面要确保科学性原则的贯彻, 另一方面考虑到读者对象的特点, 还注意到方便在相邻课程和后续课程中的应用。基于此, 对于基本概念的叙述力求深入浅出, 清晰准确; 对于基本理论的论证力求简明易懂, 推导严谨; 对于基本方法的介绍从比较、对照入手, 力求阐明思维方法的本质和应用技巧; 对于例题的选择力求典型充实, 难易得体, 既具有启发性, 又具有广泛的应用性。

为了适应不同学校、不同专业学生的不同水平, 在习题的选择上也做了不少努力。全书配有足够数量的各种类型的习题, 每章按节设置了满足基本要求的习题, 各章后面还配有具有一定难度或综合性的总习题。配置两类习题的目的是为了便于教师从中选出合适的题目供教学使用, 也便于读者选用合适的习题以进行自我检查。书末附有习题答案。

各工科院校在使用本教材时, 可依据专业的要求和学时的多少, 对标有“ * ”的内容作适当处理。

本书由陈克西、季福弟主编, 第一、二章由杨凤藻编写, 第三、四、五、六章由陈克西编写, 第七、八、九章由张浩编写, 第十、十一、十二章由季福弟编写, 全书由陈克西统稿。

由于水平所限, 不妥或谬误之处一定难免, 恳请使用本教材的读者予以批评指正。

编　者

1997 年 5 月

当一个人沉湎在分析运算中时，他就被这个方法的普遍性和它的不可估量的优越性引导着…。分析是如此地多产，只需把一些特殊的真理译成这个普遍的语言，就会看到从它们本身的表达中又出现众多新的出乎预料的真理。没有另外一种语言是如此优美……

Laplace

第一章　函数、极限与连续

高等数学的主要内容是微积分，微积分的研究对象主要是函数，极限方法是研究函数的一种基本方法，本章将介绍函数的概念、函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质。

第一节　函　数

一、函数及其表示法

1．函数的概念　客观世界中的同一问题往往有几个不同的量在变化着，而且这几个量的变化不是孤立的，而是遵循着一定的变化规律而相互联系、相互依赖的，这种相依关系就是数学上所谓的函数关系。

定义　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其变化范围内每取一个确定的值，变量 y 按照一定的规则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$。并称 x 为自变量，y 为因变量。变量 x 的变化范围，称为函数 $y = f(x)$ 的定义域，记为 D。

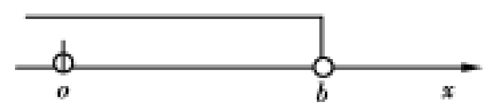
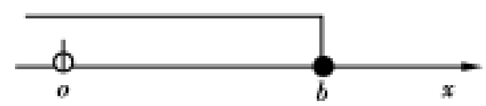
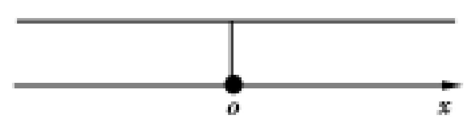
当 x 取 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 的值记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的值。当 x 遍取 D 内的所有值时，对应的函数值的全体的集合 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域。

函数记号 $f(x)$ 中的字母“f”反映自变量与因变量的对应规则，即函数关系。对应规则也常常用“φ”，“g”，“h”，“F”等表示，而函数也可记为 $y = \varphi(x)$，$y = g(x)$，$y = h(x)$ 等。有时也可简记作 $y = y(x)$，此时等号左边的 y 表示函数值，右边的 y 表示对应规则。

在数学中，若不考虑函数关系的实际意义，只是抽象地研究用算式表达的函数，这时若无特别强调，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值。例如函数 $y = \frac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2}$ 的定义域是 $\{x | -2 \le x \le 2, 且 x \ne 0\}$。

函数的定义域常用区间来表示，现将各种区间列表于下，其中 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作负无穷大和正无穷大，它们不是数。

表 1. 1

记号	等价集合	名称	图 形
(a,b)	$\{x \mid a<x<b\}$	开区间	
$[a,b]$	$\{x \mid a\leq x\leq b\}$	闭区间	
$(a,b]$	$\{x \mid a<x\leq b\}$	半开区间	
$[a,b)$	$\{x \mid a\leq x<b\}$	半开区间	
$(a,+\infty)$	$\{x \mid x>a\}$	无限区间	
$[a,+\infty)$	$\{x \mid x\geq a\}$	无限区间	
$(-\infty,b)$	$\{x \mid x<b\}$	无限区间	
$(-\infty,b]$	$\{x \mid x\leq b\}$	无限区间	
$(-\infty,+\infty)$	$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$	无限区间	

邻域也是一个经常用到的实数集合。设 a 与 δ是两个实数,且 $\delta>0$,数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ邻域,记作 $u(a,\delta)$。点 a 称为邻域中心,δ称为邻域半径。

邻域 $u(a,\delta)$在数轴上是一个以 a 为中心,2δ为长度的开区间$(a-\delta,a+\delta)$。

点 a 的 δ邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ邻域,记作 $u(\hat{a},\delta)$,即

$$u(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)。$$

在平面直角坐标系中,取自变量 x 在横轴上变化,因变量 y 在纵轴上变化,则平面点集 $\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D\}$称为定义在 D 上的函数 $y=f(x)$ 的图形。

例 1 $y=\arccos(2+x^2)$

对任何实数 x,都没有按给定的规则与之对应的 y 值,而函数的定义域不能为空集,故此

例不是函数关系。

例 2 研究函数 $y=\lg x$ 与函数 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 是不是相同的函数。

函数 $y=\lg x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$，而 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，如图 1.1 与图 1.2 所示。

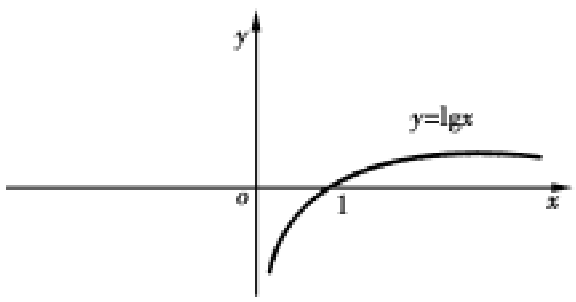


图 1.1

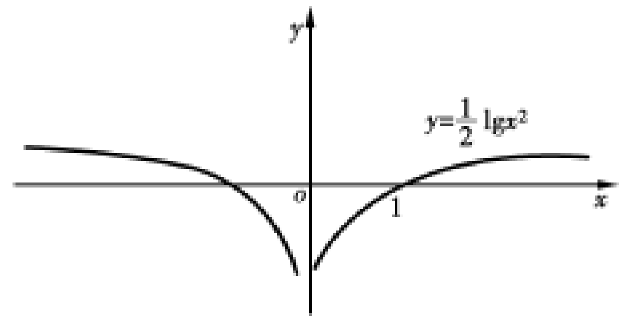


图 1.2

所以 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 是定义在不同区间上的两个不同的函数。

例 3 研究函数 $y=x$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数。

函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数，但是当 $x\in(-\infty, 0)$ 时，函数 $y=x$ 的函数值小于零，而函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的函数值大于零，如图 1.3 与图 1.4 所示。

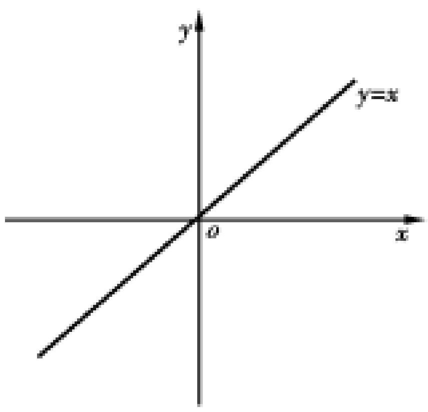


图 1.3

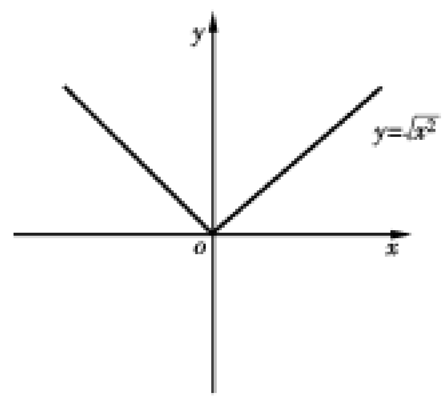


图 1.4

所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是两个定义域相同，函数关系不同的两个不同的函数。

由例 2 与例 3 可以看出，两个函数相等的充要条件是当且仅当它们的定义域相等，对应关系相同。

例 4 求函数 $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{5}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域，并求 $f(0)$ 与 $f(1)$。

解 要使算式有意义，必须

$$\left|\frac{x-1}{5}\right|\leq 1 \quad 且 \quad 25-x^2\geq 0$$

即 $|x-1|\leq 5$ 且 $|x|\leq 5$

即 $-4\leq x\leq 6$ 且 $-5\leq x\leq 5$

因此有 $-4\leq x\leq 5$

于是函数的定义域为〔$-4,5$〕。

因为 $0\in[-4,5], 1\in[-4,5]$

所以 $f(0) = -\arcsin\frac{1}{5}+5,\ f(1) = 2\sqrt{6}$

在函数的定义中,如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总只有惟一的一个,这种函数称为单值函数;否则称为多值函数。例 2、例 3 和例 4 中的函数都是单值函数。

以后若无特别声明,所讲的函数都是单值函数。

2. 函数表示法　常用的函数表示法有公式法、表格法和图形法。

例 5　$y = \arccos\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$

这是用公式法表示的 y 是 x 的函数,它的定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\frac{\pi}{2}]$。

例 6　某城市一年里各月的电视机零售量(单位:百台)如表 1.2 所示。

表 1.2

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 S	10	15	7	8	8	7	5.5	7	8	8	9	9.5

表 1.2 表示了该城市电视机零售量 S 随月份 t 而变化的函数关系,它的定义域为

$$D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 7　在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,即图 1.5 所示的曲线。根据这个图就能知道,这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情况。图 1.5 是用图像表示 T 是 t 的函数,其定义域为 $[0,24]$,值域为 $[15,30]$。

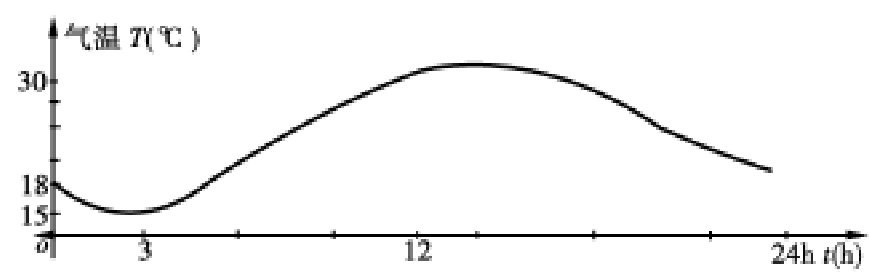


图 1.5

下面再举几个函数的例子。

例 8　函数

$$y = \mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & 当\ x > 0 \\ 0, & 当\ x = 0 \\ -1, & 当\ x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\{-1,0,1\}$,如图 1.6 所示。

对于任何实数 x,下列关系成立:$x = \mathrm{sgn}x\cdot|x|$

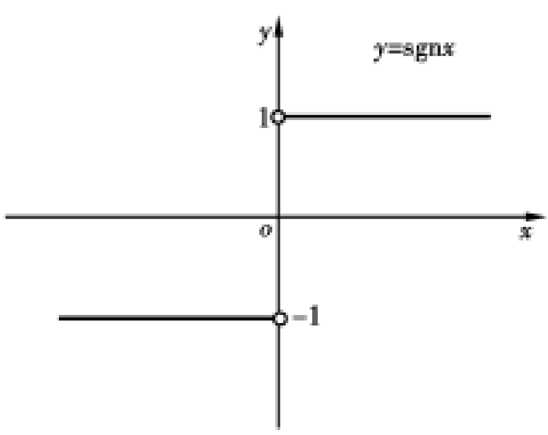


图 1.6

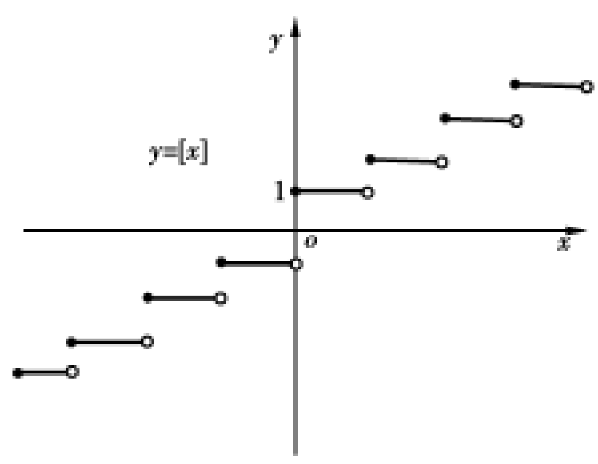


图 1.7

例 9 设 x 为任一实数，函数 $y = [x]$ 称为取整函数，对每个 x，函数值是不超过 x 的最大整数。例如，$[4.87]=4$，$[-2.1]=-3$ 等。它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为全体整数集 Z，如图 1.7 所示。

例 10 求函数

$$y = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{当} |x| < 1 \\ x^2 - 1, & \text{当} 1 < |x| \le 2 \end{cases}$$

的定义域，并求 $f(0)$，$f(\frac{3}{2})$，作出函数图像。

解 函数的定义域为 $\{x \mid |x| < 1\} \cup \{x \mid 1 < |x| \le 2\}$，即 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$。

$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$，$f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 1 = \frac{5}{4}$。如图 1.8 所示。

从例 8、例 9 和例 10 看到，有时一个函数要用几个式子表示，这种在定义域的不同区间内，对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数。应特别注意，分段函数是用几个式子合起来表示的一个函数，而不是表示几个函数。其定义域是每个式子自变量取值范围的并集，如例 10。

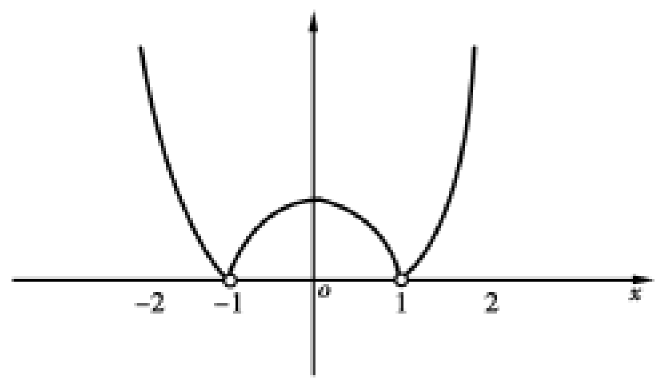


图 1.8

二、建立函数关系举例

为了解决实际问题，一般先要建立函数关系。为此，先要确定自变量和因变量，再根据问题本身，寻找自变量和因变量之间所满足的等式，再将因变量表示为自变量的函数，这就是要求的函数关系。下面举几个建立函数关系的例子。

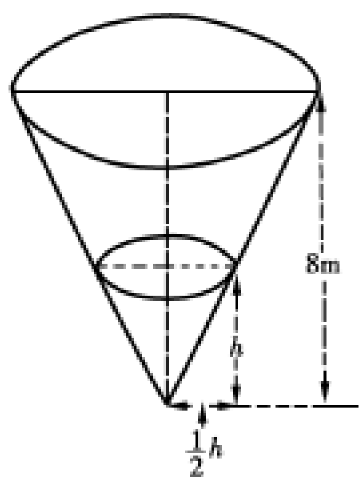


图 1.9

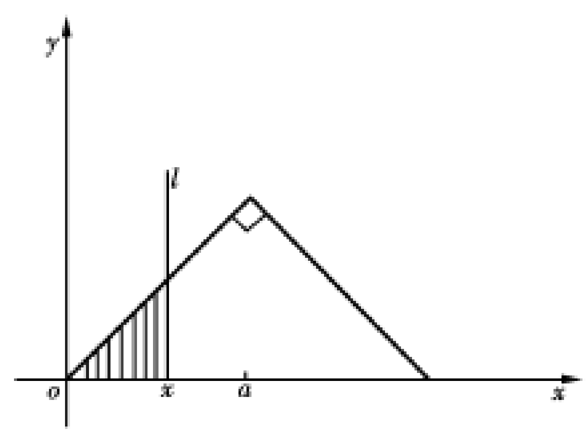


图 1.10

例 11 有一个倒立的圆锥形蓄水器，口径与深度都是 8m。如果以每分钟 $6m^3$ 的速度往容器里注水，求容器内水深与注水时间的关系。

解 设注水时间为 t，即 $t=0$ 时开始注水。当时间经过 t 分钟时，注入的水为 $6t$ 立方米。设此时容器内水深为 h 米，则水面半径为 $\frac{1}{2}h$ 米，如图 1.9 所示。由题设，有

$$6t = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$$

解之得 $h = 3\sqrt{\dfrac{72t}{\pi}}$

这就是水深 h 与注水时间 t 的函数关系。由于容器高为 8m, 因此水深 h 的最大值为 8m, 故函数的定义域为 $\{t \mid 0 \leq t \leq \frac{64}{9}\pi\}$, 值域为〔0, 8〕。

例 12　设有一等腰直角三角形, 见图 1.10, 有一直线 l 开始位置与 y 轴重合, 以匀速 $v(v > 0)$ 沿 x 轴正向平移, 求任一时刻 t 直线 l 所扫过的三角形内部的面积(图 1.10 中阴影部分的面积)。

解　设在 t 时刻直线 l 所扫过的三角形内部的面积为 S。并设在时刻 t 直线 l 与 x 轴的交点为 x, 则 $x = vt$。

从图 1.10 可见, 当 $0 \leq x \leq a$ 时, 即 $0 \leq t \leq \frac{1}{v}a$ 时, $S = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}v^2t^2$,

当 $a < x \leq 2a$ 时, 即 $\frac{1}{v}a < t \leq \frac{1}{v} \cdot 2a$, 时 $S = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}[a + (2a - x)](x - a) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(3a - vt)(vt - a)$

所以
$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}v^2t^2, & \text{当 } 0 \leq t \leq \frac{1}{v}a, \\ \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(3a - vt)(vt - a), & \text{当 } \frac{1}{v}a < t \leq \frac{1}{v} \cdot 2a \end{cases}$$

这就是面积 S 与时间 t 的函数关系, 它是一个分段函数, 其定义域为 $[0, \frac{2}{v}a]$, 值域为 $[0, a^2]$。

三、函数的基本性态

1. 函数的有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 X　D, 如果存在正数 M, 使得对一切 $x \in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在 X 内是有界函数。若这样的正数 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 X 内是无界函数。

例如, 例 11 和例 12 都是在定义域内的有界函数。函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界函数, 而在 $[a, b]$ $(a > 0, b > a)$ 内是有界函数, 界 M 可取 $\frac{1}{a}$ 或大于 $\frac{1}{a}$ 的任意实数。

2. 函数的单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 (a, b)　D, 若在 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内为单调递增函数。

同样可以定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的单调递增或单调递减函数。

单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数。

单调递增函数的图像是沿横轴正向上升的曲线(图 1.11); 单调递减函数的图像是沿横轴的正向下降的曲线(图 1.12)。

3. 函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称。如果对于任意的 $x \in D$(从

而 $-x\in D$) 恒有

$$f(-x) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数; 如果对任意的 $x\in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数。

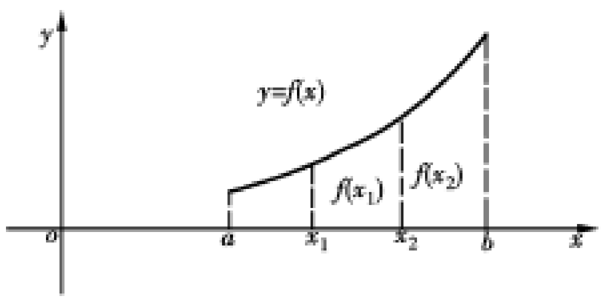


图 1. 11

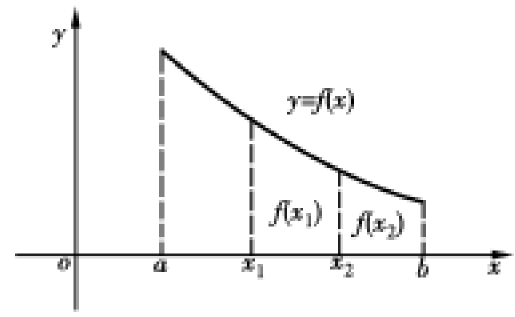


图 1. 12

例如, x^2+1, $\sqrt{1-x^2}$, $\cos x$ 都是偶函数, x^3, $\tan x$, $\frac{1}{x}$都是奇函数。偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1. 13) ; 奇函数的图像关于原点对称(图 1. 14) 。

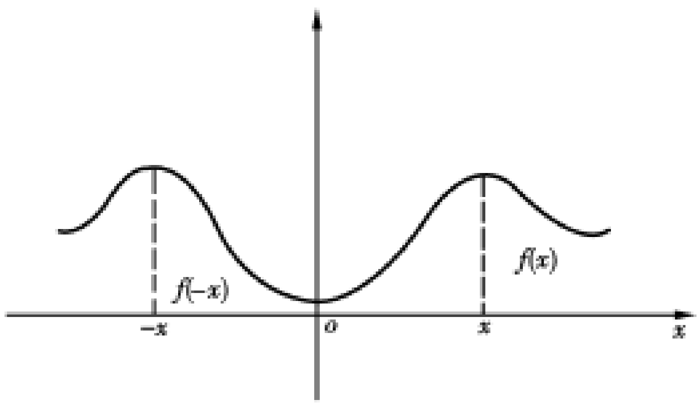


图 1. 13

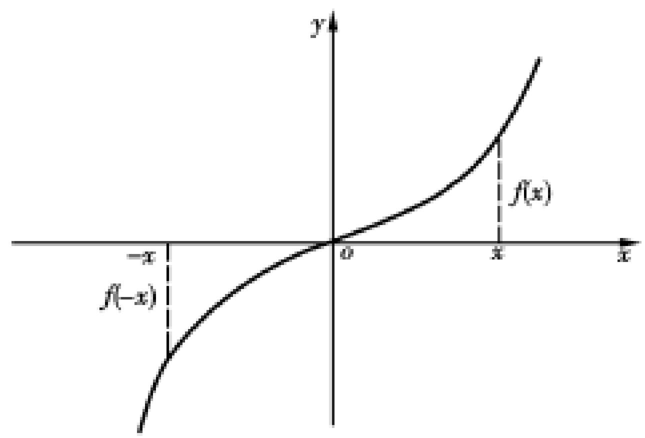


图 1. 14

4. 函数的周期性　对于定义域为 D 的函数 $f(x)$, 如果存在正数 T, 使得对一切 $x\in D$ 有 $(x+T)\in D$, 且有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数。称 T 为 $f(x)$ 的周期, 通常又是把满足此条件的最小正数称为$f(x)$ 的周期。

例如, $\sin x$, $\cos x$ 是以 2π为周期的函数, $\tan x$, $\cot x$ 是以 π为周期的函数。

周期函数在其定义域的每个长度为 T 的区间内具有相同的图像。因此, 只要作出一个周期内的图像, 将其沿 x 轴的正负两方向平移, 就可得到函数在其他周期内的图像。

四、初等函数

1. 反函数　一个函数有两个变量, 一个为自变量, 一个为因变量。在实际问题中, 谁是自变量, 谁是因变量要看问题而定。例如半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 这里半径 r 是自变量, V 为因变量。反之, 如果要从体积 V 来确定球的半径 r 时, 有:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

这是自变量为 V, 因变量为 r 的函数。称它为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 的反函数。

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W, 如果对任意的一个 $y \in W$, D 中总有惟一的 x 满足 $y = f(x)$, 则 x 成为 y 的函数, 称该函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$。

习惯上, 用 x 代表自变量, y 代表因变量, 因此函数 $y = f(x)$ (称为直接函数) 的反函数常记为 $y = f^{-1}(x)$。

由定义, 函数 $y = f(x)$ 的定义域与值域分别是其反函数的值域和定义域。

值得注意的是: 在同一坐标系下, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 表示同一条曲线; 而 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称。

如果函数 $y = f(x)$ 是单值、单调函数, 则它一定有反函数。

2. 复合函数　设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 其定义域为 D; 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 其值域为 W, 如果 $D \cap W \neq$, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数。x 称为自变量, y 称为因变量, u 称为中间变量。

例如, 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 可看作由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = 1 - x^2$ 复合而成。这是因为 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 与 $u = 1 - x^2$ 的值域 $(-\infty, 1)$ 的交集非空。

必须注意, 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数, 例如 $y = \arcsin u$ 与 $u = 2 + x^2$ 就不可能复合成一个复合函数, 这是因为 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 与 $u = 2 + x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 的交集为空集。

复合函数也可以由两个以上的函数复合构成。例如 $y = \sin^2\sqrt{1 - x^2}$ 可以看作由 $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = \sqrt{w}$, $w = 1 - x^2$ 四个函数复合而成, 其中 u, v, w 都是中间变量。

例 13　设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, 试求 $f\{f[f(x)]\}$。

解　因为

$$f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1 + f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}$$

所以

$$f\{f[f(x)]\} = f\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + 3x^2}}$$

例 14　设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = e^x$$

求 f〔g(x)〕和 g〔f(x)〕。

解 $$f〔g(x)〕=f(e^x)=\begin{cases}1, & e^x<1\\ 0, & e^x=1\\ -1, & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

$$g〔f(x)〕=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$$

3. 初等函数 在中学时期学过的常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为基本初等函数。为便于后面的应用,将它们的主要性质归纳如下。

(一) 常值函数 $y=C$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,图像是平行于 x 轴,且在 y 轴上的截距为 C 的一条直线,如图 1.15 所示。

(二) 指数函数 $y=a^x(a>0$, 且 $a\neq1)$

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$,其图像总在 x 轴上方,且通过点(0,1),当 $a>1$ 时,函数单调递增,如图 1.16 所示;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,如图 1.17 所示。

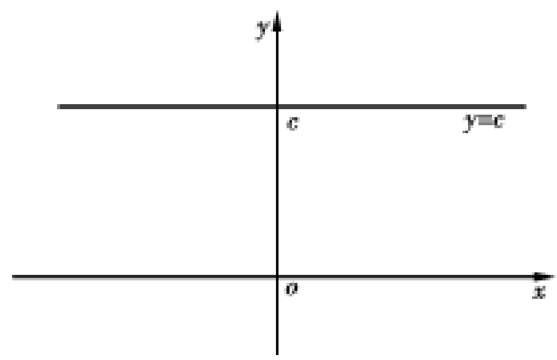


图 1.15

(三) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$, 且 $a\neq1)$

它的定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,其图像总通过点(1,0)。当 $a>1$ 时,函数单调递增,如图 1.16 所示;当 $0<a<1$ 时,函数单调递减,如图 1.17 所示。对数函数与指数函数互为反函数。

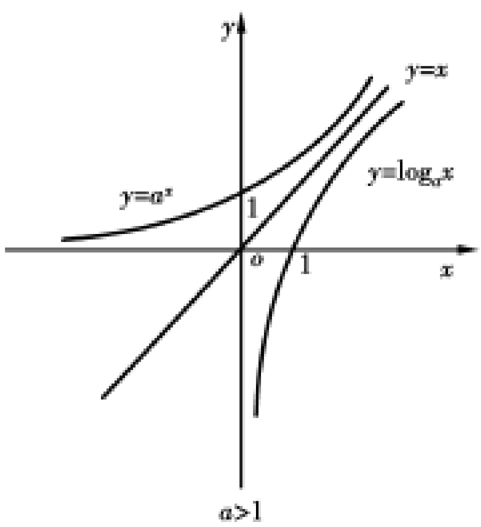


图 1.16

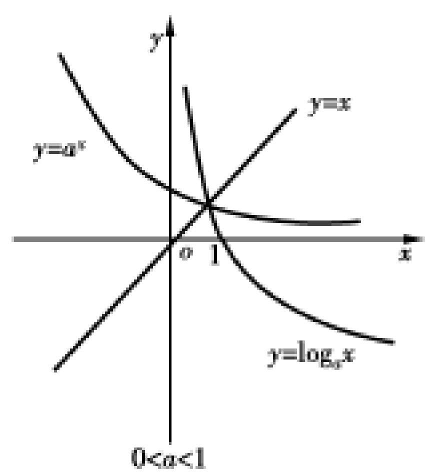


图 1.17

(四) 幂函数 $y=x^\alpha$ (α为常数)

幂函数的定义域要看 α是什么数而定,例如当 $\alpha=\frac{1}{3}$时,其定义域为$(-\infty, +\infty)$,而当 $\alpha=\frac{1}{2}$时,它的定义域为$[0, +\infty)$。但不论 α为何值,它在$(0, +\infty)$内总有定义,并且图像总通过点(1,1)。

例如 幂函数 $y=x^2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,它是偶函数;它的反函数的一个单值分支

$y=\sqrt{x}$也是一个幂函数，其定义域为$[0, +\infty)$，如图 1.18 所示。

幂函数 $y=x^{-1}$的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，其图像关于原点对称，如图 1.19 所示。

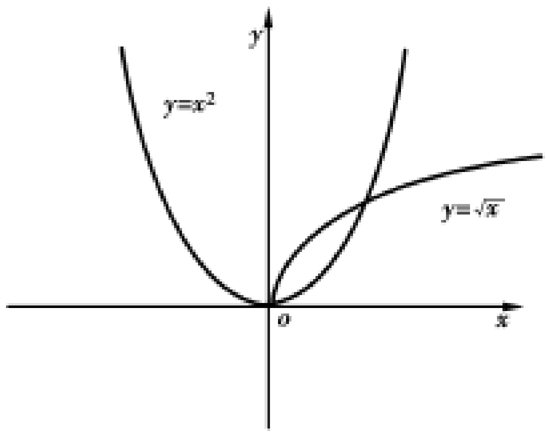


图 1.18

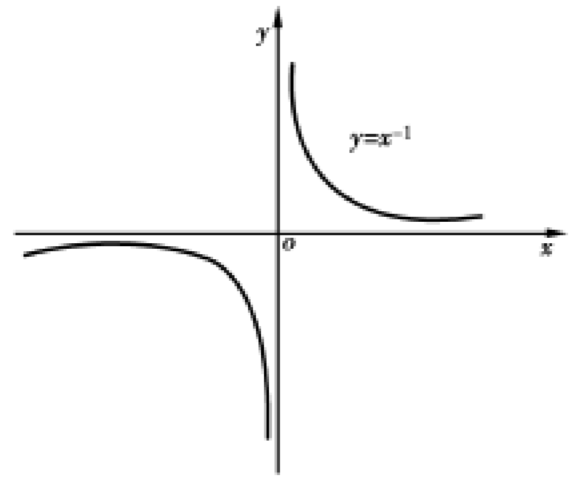


图 1.19

（五）三角函数　常用的三角函数有正弦函数，余弦函数，正切函数和余切函数。

正弦函数 sinx 和余弦函数 cosx 的定义域都是$(-\infty, +\infty)$，值域都是$[-1, 1]$；它们都是以 2π为周期的周期函数；正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。

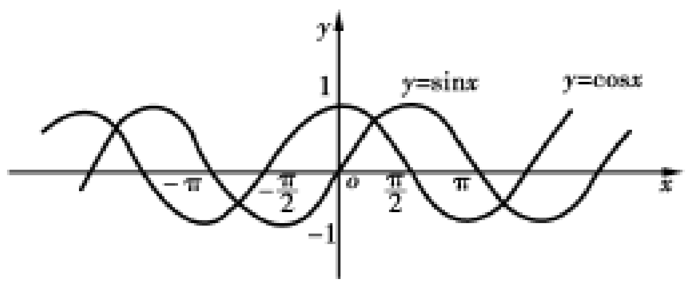


图 1.20

由于 $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，所以把正弦函数的图像沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{2}$，即得余弦函数的图像，如图 1.20 所示。

正切函数 tanx 与余切函数 cotx 都是以 π为周期的周期函数，它们都是奇函数，值域都为$(-\infty, +\infty)$。

正切函数的定义域是$\{x \mid x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}, n\in z\}$，如图 1.21 所示；余切函数的定义域是$\{x \mid x\neq n\pi, n\in z\}$，如图 1.22 所示。

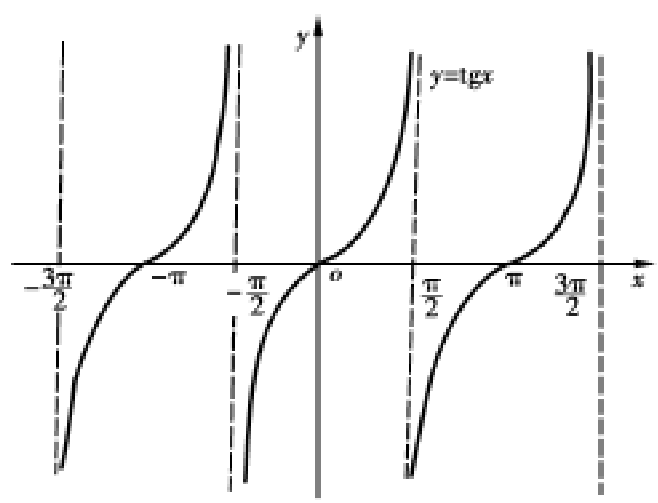


图 1.21

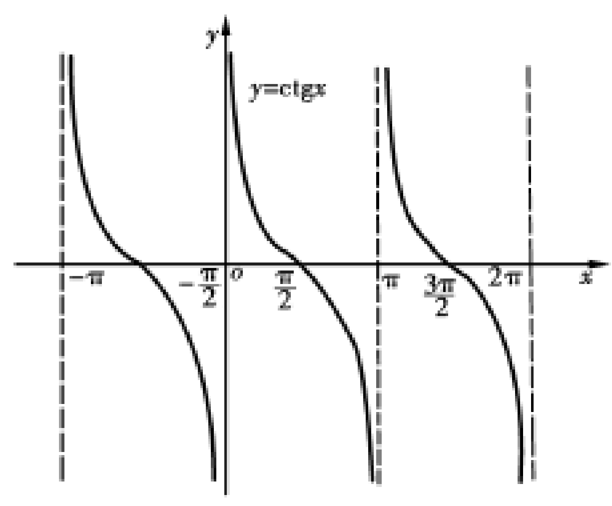


图 1.22

（六）反三角函数　常用的反三角函数有反正弦函数，反余弦函数，反正切函数和反余切函数。

反正弦函数 arcsinx **是正弦函数** sinx **在主值区间**$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$**上的反函数，因此反正弦函数的定义域是**$[-1,1]$，**值域是**$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。**反正弦函数是单调递增的奇函数，见图** 1.23。

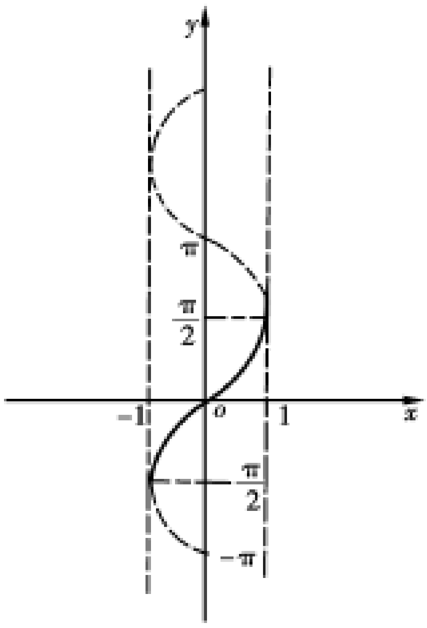


图 1.23

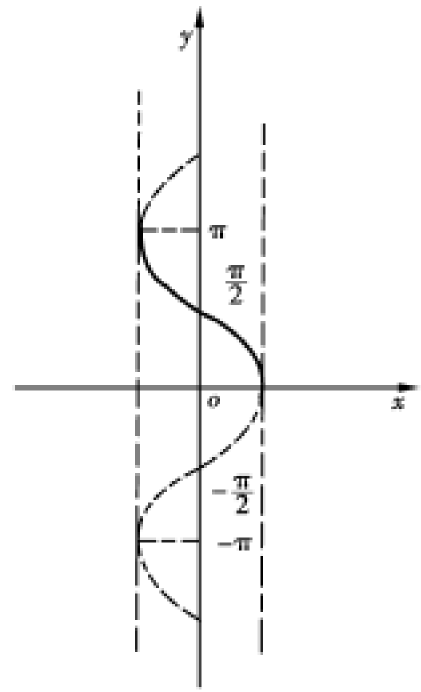


图 1.24

反余弦函数 arccosx **是余弦函数** cosx **在主值区间**$[0,\pi]$**内的反函数，因此反余弦函数的定义域是**$[-1,1]$，**值域是**$[0,\pi]$。**反余弦函数是单调递减函数，如图** 1.24 **所示。**

反正切函数 arcotx **是正切函数** tanx **在主值区间**$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**内的反函数，因此反正切函数的定义域是**$(-\infty,+\infty)$，**值域是**$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。**反正切函数是单调递增的奇函数，如图** 1.25 **所示。**

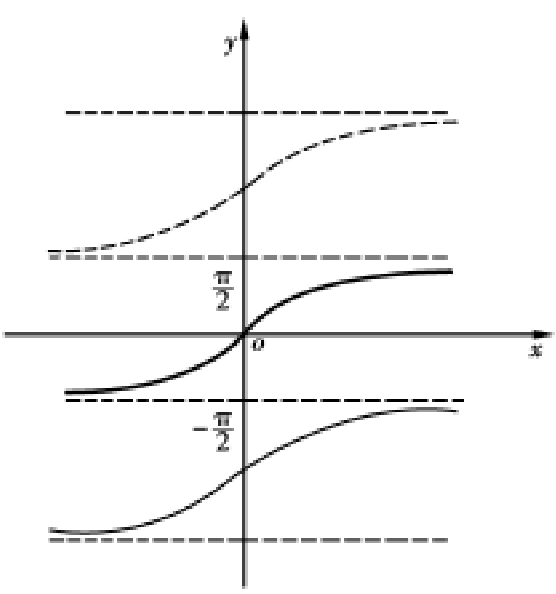


图 1.25

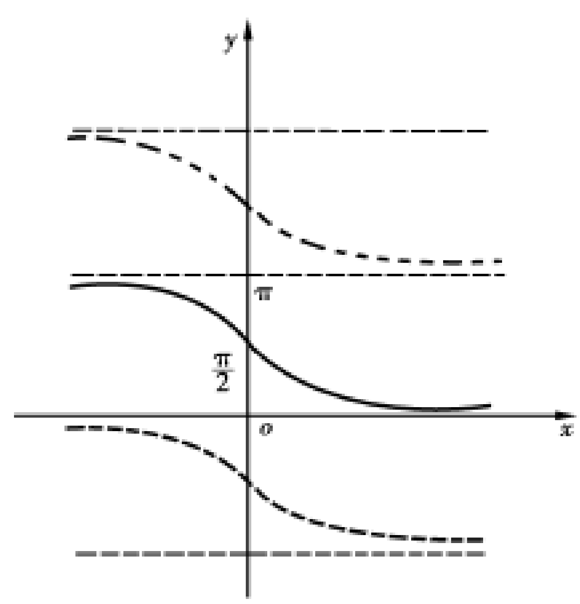


图 1.26

反余切函数 arccotx **是余切函数** cotx **在主值区间**$(0,\pi)$**内的反函数，因此其定义域是**$(-\infty,+\infty)$，**值域是**$(0,\pi)$。**反余切函数是单调递减函数，如图** 1.26 **所示。**

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数。例如

$$y = e^{\sqrt{2-x^2}} \qquad y = \log_2(2+\tan^2 x) \qquad y = \operatorname{arccot}\frac{x^2+1}{3x+4}$$

都是初等函数。

又如

$$y = x^2+3|x|+1,\ y = \begin{cases} 2x+3, & 当\ x>1 \\ x^2+1, & 当\ x \leq 1 \end{cases}$$

均不是初等函数。

例 15　由指数函数 e^x 与 e^{-x} 经四则运算构成的初等函数:

$$\text{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \text{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \text{th}x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

分别称为双曲正弦函数, 双曲余弦函数和双曲正切函数, 它们在工程技术中经常用到。容易验证它们有和三角函数类似的公式:

$$\text{sh}(x \pm y) = \text{sh}x\text{ch}y \pm \text{ch}x\text{sh}y$$
$$\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}x\text{ch}y \pm \text{sh}x\text{sh}y$$
$$\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$$
$$\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$$

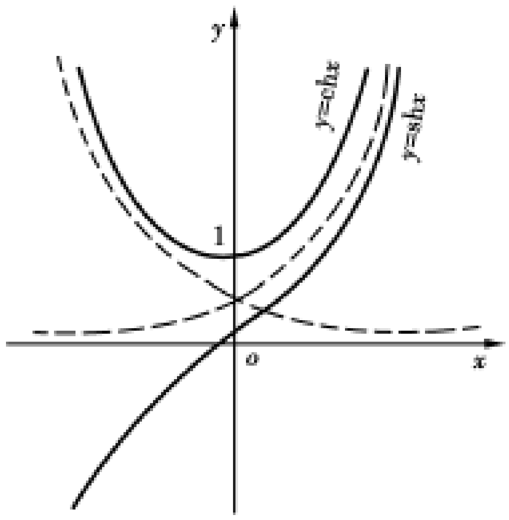


图 1. 27

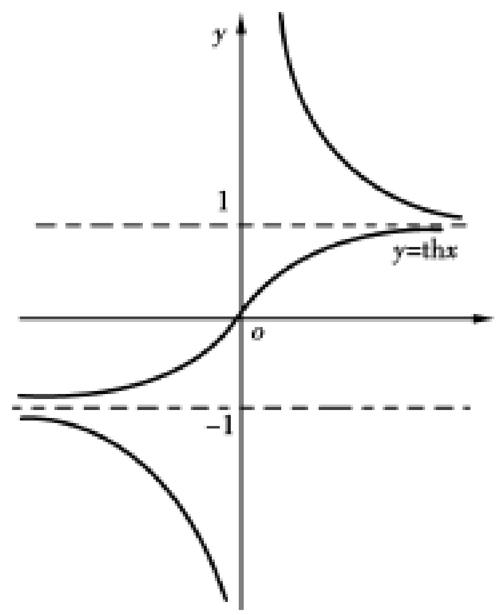


图 1. 28

双曲正弦 shx 的定义域是$(-\infty, +\infty)$, 它在定义域内单调递增, 且为奇函数, 如图 1. 27 所示。

双曲余弦函数 chx 的定义域是$(-\infty, +\infty)$, 它是一个偶函数, 如图 1. 27 所示。

双曲正切函数 thx 的定义域是$(-\infty, +\infty)$, 值域是$(-1, 1)$, 它在定义域内单调递增, 且为奇函数, 如图 1. 28 所示。

习题 1. 1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{4-x^2}$　　(2) $y = \arccos(4x^2-1)$　　(3) $y = \tan(2x+3)$