21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学（经管类）

下　册

主　编　唐瑞娜　李春海

副主编　李美贞　邹慧超
　　　　于静之　吴国才

清 华 大 学 出 版 社

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书分上下两册共 3 篇 10 章．第 1 篇是一元函数微积分，包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用(其中包括偏导数及其应用)、不定积分(其中包括微分方程初步)、定积分及其应用 5 章；第 2 篇是线性代数与线性规划初步，包括行列式与矩阵、线性方程组、线性规划初步 3 章；第 3 篇是概率论与数理统计基础，包括概率论、数理统计 2 章．每章节之后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案．

本书注意结合高职教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明；编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中；叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学．

本书可作为高职、高专、成人院校经管类专业的高等数学教材，也可作为高校经管类学生的高等数学自学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册：经管类/ 唐瑞娜，李春海主编．—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2004.10

(21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 7 81082 424 4

Ⅰ．高…　Ⅱ．①唐…　②李…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 096823 号

责任编辑：孙秀翠
出 版 者：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686045，62237564
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　　印张：11.5　　字数：255 千字
版　　次：2004 年 10 月第 1 版　　2004 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7 81082 424 4/ O·19
印　　数：1～5 000 册　　定价：15.00 元

前　　言

英国著名哲学家培根指出:“数学是科学的大门和钥匙.”数学分初等数学与高等数学.高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学.初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形,使用的方法一般来说是静止的、孤立的;而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法去研究变量和变化的图形,从而能更生动地反映出客观世界的变化规律,因此高等数学已成为现代科学技术、科学管理诸多领域理论研究的工具与基础,同时也是高职高专院校课程设置中的一门十分重要的文化基础课和工具课.

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》,结合高职高专经管类专业特点,针对高职高专的培养对象而编写的.在编写过程中,注意做到了以下几点.

1. 定位准确,针对性强.以高职高专院校的培养目标为依据,以适用、够用、好用为指导思想,在体现数学思想为主的前提下删繁就简,深入浅出,做到既注重高等数学的基础性,适当保持其学科的科学性与系统性,同时更突出它的工具性.

2. 教材编排模块化.考虑到高职高专经管类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因,教材的编写采用了模块化.全书分为上下两册三大模块.上册包括第一模块:一元函数微积分;下册包括线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计基础两大模块.每块内容相对独立,有利于学校根据实际情况灵活安排课程,方便教师有选择地教学.

3. 内容安排重点突出,层次分明.一元函数微积分是高等数学的主要内容,是现代工程技术和科学管理的主要数学支撑,也是高职高专经管类学生学习高等数学的首选,因此作为必学把它放在第一模块;偏导数与常微分方程是建立在一元函数微积分基础之上的,考虑到偏导数与常微分方程在实际中的广泛应用,所以把它们也放在第一模块,并与一元函数微积分一起组成上册的内容.

4. 理论联系实际,注意把数学知识与解决实际问题结合起来.在教材的各个部分都安排了实际应用的内容,有助于培养学生应用数学知识解决实际问题的能力;书中概念的引入、定理的证明等都尽可能地从实际背景入手,有助于学生对其的理解与掌握,并能使学生在学习中领略数学概念、数学理论的发现与发展过程,这对培养学生的创新思维能力是大有益处的.

5. 加大了例题的示范性,利于学生快速掌握数学方法.习题的配备类型合理,文题对应,难易适中,具有一定的梯度,符合学生的认识规律.

参加本书编写的是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师.在编写过程中,我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍,融进了自己的教学心得和体

验，结合实际，反复推敲，力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高等数学教材．尽管如此，由于编者水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者与同行指正．

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第 2 篇　线性代数与线性规划初步

第 3 篇　概率论与数理统计基础

第 2 篇　线性代数与线性规划初步

第 6 章　行列式与矩阵

线性代数的主要任务是求解线性方程组．行列式与矩阵是研究线性方程组的重要工具，是线性代数的基础．

6.1　行列式

行列式是代数和的一种简单表示形式．

6.1.1　二阶、三阶行列式的概念

1．二阶行列式

定义 6.1　由 4 个数排成正方表 $\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}$，则称代数和 $A_1B_2 - A_2B_1$ 为对应于这个表的二阶行列式．记作 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$．即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 . \qquad (6\ 1)$$

其中数 A_1，B_1，A_2，B_2 叫做这个行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列．式(6 1)等号右端的部分叫做行列式的展开式，可用对角线法则来记住它．如图 6 1 所示：实线上两元素乘积减去虚线上两元素的乘积．

例 6.1　求下列二阶行列式的值．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$

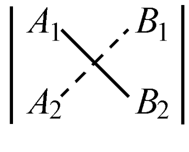

图 6 1

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times4 - 2\times3 = -2$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 3\times6 - (-5)\times2 = 28$

2. 三阶行列式

定义 6.2 由 3^2 个数排成正方表 $\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$，则称代数和 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2)$为对应于这个表的三阶行列式，记作$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2) \qquad (6\ 2)$$

与二阶行列式一样，数 a_i，b_i，c_i $(i=1,2,3)$叫做这个行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列. 式(6 2)等号右端的部分叫做该行列式的展开式. 可用对角线法则来记忆它，如图 6 2 所示：实线上三元素乘积之和减去虚线上三元素乘积之和.

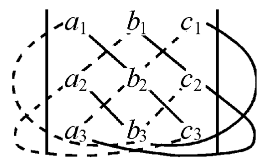

图 6 2

例 6.2 求三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$的值.

解：
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times2\times2+1\times1\times3+(-3)(-4)(-4)-[(-3)\times2\times3+1\times(-4)\times2+2\times1\times(-4)]=-3$$

注：(1) 行列式一般用大写字母表示.

(2) 行列式的元素可以是数，也可以是函数.

6.1.2 三阶行列式的性质

利用行列式的对角线法则容易证明行列式具有下述性质(以三阶行列式为例说明).

性质 1 把行列式的行与列互换，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可知，行列式中行与列的地位是对称的，凡对行成立的性质，对列也同样成立，反之亦然.

称行与列互换后所得的行列式为原行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T} (或 D').

性质 1 表明 $D = D^{T}$.

性质 2　行列式的两行(列)对调，行列式的值变号 .

如
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{对调}]{\text{①行与③行}} -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

性质 3　行列式两行(列)相同，行列式的值为零 .

性质 4　常数 k 乘行列式某一行(列)的元素，等于用数 k 乘此行列式 .

如
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可见，行列式某行(列)有公因子，则公因子可提到行列式之外 .

性质 5　如果行列式的两行(列)对应元素成比例，那么行列式的值为零 .

这由性质 4 及性质 3 容易得证 .

性质 6　如果行列式的某行(列)的元素都是二项和，那么这个行列式等于两个行列式之和，其中每一个行列式都是把原行列式的二项和取一项作成相应行(列)，其余行(列)不变而得到的 .

如
$$\begin{vmatrix} a_1+d & b_1+e & c_1+f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 7　常数 k 乘行列式某行(列)的各元素，加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变 .

根据性质 6 及性质 5 可得到该性质的证明 .

定义 6.3　把行列式某元素所在的行与列都划去，余下的行列式称为这个行列式的余子式，例如

行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 对应于 b_2 的余子式为 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

定义 6.4　设行列式中某元素所在行数为 i，列数为 j，用 $(-1)^{i+j}$ 乘该元素的余子式，得到的行列式称为该元素的代数余子式 .

例如 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 对应于 b_2 的代数余子式为

$$(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质 8　行列式等于它的任一列(行)的各元素与对应于该元素的代数余子式乘积之和.该性质也称为行列式按某一列(行)展开定理.

例如
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3. \tag{6.3}$$

其中 A_1, A_2, A_3 分别为元素 a_1, a_2, a_3 的代数余子式.

即 $A_1 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $A_2 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $A_3 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

同理
$$D \xlongequal{\text{按第二列展开}} b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \tag{6.4}$$
$$\xlongequal{\text{按第三列展开}} c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \tag{6.5}$$

其中 B_i, C_i 分别为元素 b_i, c_i 的代数余子式($i=1, 2, 3$)

根据行列式的对角线法则和代数余子式的定义,不难证得性质 8 的正确性.

例 6.3　将行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ 分别按(1)第 3 列;(2)第 2 行展开,并求其值.

解:(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 4\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 6\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -4 - 10 + 6 = -8$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 10 - 8 - 10 = -8$$

显然这两种计算结果是一样的.

性质 9　行列式某一列(行)的各元素与另一列(行)对应元素的代数余子式乘积之和恒等于零.

事实上,行列式某一列(行)的各元素,与另一列(行)对应的元素的代数余子式乘积之和,是具有两相同列(行)的行列式的展开式,根据性质 3 知它必等于零.

6.1.3　n 阶行列式

定义 6.5　由 n^2 个元素 a_{ij}(可以是数也可以是函数)(i, $j=1, 2, \cdots, n$)组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，横排为行，竖排为列．n 阶行列式 D 表示一个代数和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}，\ (i=1，2，\cdots，n) \tag{6 6}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}，\ (j=1，2，\cdots，n) \tag{6 7}$$

其中 A_{ij} 代表元素 a_{ij} 的代数余子式．(i、$j=1，2，\cdots，n$)．它是把行列式 D 中元素 a_{ij} 所在的行与列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式．式(6 6)与式(6 7)分别称为 n 阶行列式 D 按第 i 行展开公式和按第 j 列展开公式．

根据行列式的展开公式知，n 阶行列式可降为 $n-1$ 阶行列式表示之．于是我们可用二阶行列式计算三阶行列式的值，用三阶行列式计算四阶行列式的值，依此类推，便可以计算出任意阶行列式的值 (规定由一个元素构成的一阶行列式 $|a|=a$)．

n 阶行列式具有与三阶行列式相同的性质．

例 6.4　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解：由式(6 6)，将 D 按第 1 行展开，得

$$\begin{aligned} D &= 2\times A_{11}+0\times A_{12}+1\times A_{13}+1\times A_{14} \\ &= 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\times(-4)+(-2)+4=-6 \end{aligned}$$

例 6.5　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+a & 2+a & 3+a \\ 1+b & 2+b & 3+b \\ 1+c & 2+c & 3+c \end{vmatrix}$

解：根据行列式的性质有

$$D\ \underset{③列+①列\times(-1)}{\overset{②列+①列\times(-1)}{=\!=\!=}}\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 2 \\ 1+b & 1 & 2 \\ 1+c & 1 & 2 \end{vmatrix}\ \underset{公因子 2}{\overset{③列提出}{=\!=\!=}}\ 2\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1+b & 1 & 1 \\ 1+c & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

例 6.6　计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解: $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow{①行+②+③+\cdots+ⓝ} \begin{vmatrix} x+(n-1)y & x+(n-1)y & \cdots & x+(n-1)y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

$= [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{②行+①\times(-y);\ ③行+①\times(-y),\ \cdots,\ ⓝ行+①\times(-y)} [x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}$

$= [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$

习题 6.1

1. **判断下列各题的正确性**.

(1) (　　) **任一行列式都大于或等于** 0.

(2) (　　) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$

(3) (　　) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(4) (　　) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

(5) (　　) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24$

2．填空题．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$ ________　　(2) $\begin{vmatrix} c & c^2 \\ d & d^2 \end{vmatrix} =$ ________

设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$，则

(3) 元素 b 的代数余子式 = ________

(4) 元素 c 的余子式 = ________

(5) 元素 c 的代数余子式 = ________

(6) D 的值 = ________

3．计算下列行列式．

(1) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

4．证明：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + a_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

5．计算 n 阶行列式：$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+n \end{vmatrix}$

6.2 矩阵

6.2.1 矩阵的概念与运算

1. 矩阵的概念

所谓矩阵，其实就是一个数表，它是实际生活中与数字有关的表格的一种简单表示形式.

例 6.7 要将货物从甲、乙、丙三产地，运往 A、B、C、D 四个销售地，建立调运计划表如表 6 1 所示.

表 6 1 调运计划表

产地 \ 销售地 货运量	A	B	C	D
甲	10	11	12	13
乙	7	8	9	10
丙	12	10	8	6

将上面矩形表中的数字取出，用符号

$$\begin{matrix} 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 10 & 8 & 6 \end{matrix}$$

表示，这就是一个矩阵. 一般地，有如下定义.

定义 6.6 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \tag{6 8}$$

叫做 m 行 n 列矩阵，或 $m\times n$ 阶矩阵，a_{ij} 叫做该矩阵的第 i 行第 j 列元素. 矩阵的元素可以是数，也可以是函数. 我们这里主要讨论取实数的情况.

矩阵一般用大写字母 A, B, C, …表示，有时为了强调矩阵的行数 m 与列数 n，也把矩阵表示为 $A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{mn}$.

当 $m=n$ 时，矩阵称为 n 阶方阵，简称为方阵，记为 A_n 或 $(a_{ij})_n$;

当 $m=1$ 时，矩阵称为行矩阵，此时矩阵

$$A=[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}].$$

当 $n=1$ 时，矩阵称为列矩阵，有 $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 0.

从左上角到右下角的对角线，称为矩阵的主对角线；从右上角到左下角的对角线，称为矩阵的反对角线；关于主对角线对称的元素都相等的方阵称为对称矩阵．例如，$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 就是一个对称矩阵．

除主对角线上的元素之外，其余的元素都是零的 n 阶方阵，称为对角矩阵，其一般形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

主对角线上的元素全为 1 的对角矩阵叫做单位矩阵，记作 E，即 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

主对角线一侧的元素全为零的方阵，叫做三角矩阵，其一般形式为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，称前者为上三角矩阵，后者为下三角矩阵．

把矩阵 A 的行与列互换后得到的新矩阵，称为原矩阵 A 的转置矩阵，记作 A^{T} 或 A'. 显然，有以下结论：

(1) 若 A 是 m 行 n 列的矩阵，则 A^{T} 是 n 行 m 列的矩阵；

(2) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(3) 任何一个对称矩阵的转置矩阵都是它本身．

定义 6.7　由方阵 A 的元素，按其在矩阵中的位置所构成的行列式，称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$.

即若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

矩阵与行列式是两个完全不同的概念．二者除了记法不同外，最本质的区别是：行列式是一个代数式，它最终表示的是一个数或是函数，元素不同的两个行列式，其值可能相等；而矩阵则仅是一个数表而已，两个矩阵相等，当且仅当它们的行数与列数都相等，且对应元素也分别相同时，才能称它们是相等的．

2. 矩阵的运算

1) 矩阵的加法与减法

例 6.8　设有甲、乙两种产品(单位：吨)从三个产地运往四个销地，其调配方案分别用矩阵 A、B 表示为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

那么从各产地运往各销地的两种产品的总运量，用矩阵表示应为

$$C=\begin{pmatrix} 3+1 & 5+3 & 7+2 & 2+0 \\ 2+2 & 0+1 & 4+5 & 3+7 \\ 0+0 & 1+6 & 2+4 & 3+8 \end{pmatrix}$$

自然定义矩阵 $C=A+B$，一般地有以下定义．

定义 6.8　由两个 m 行 n 列矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素相加而得到的矩阵，称为 A 与 B 的和矩阵，记作 $A+B$. 即 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$

同样，可以定义矩阵 A 与 B 的差矩阵为

$$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

显然两个 m 行 n 列的矩阵相加(减)得到的和(差)矩阵仍是一个 m 行 n 列的矩阵．容易验证，矩阵的加法和减法满足以下运算律：

ⅰ) 交换律 $A+B=B+A$

ⅱ) 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$

ⅲ) $A-B=A+(-B)$.

其中，A、B、C 都是 $m\times n$ 阶矩阵，$-B$ 为 B 的负矩阵，即有

$$-B=-(b_{ij})_{m\times n}=(-b_{ij})_{m\times n}$$

2) 矩阵的数乘

例 6.9　某产品的三个产地与四个销地的距离(单位：公里)，用矩阵表示为