21 世纪高职高专规划教材 · 公共基础系列

高等数学(经管类)

上　册

主　编　唐瑞娜　姜成建

副主编　邹慧超　曲仕敬　于静之

李春海　王秀红　王　敏

清 华 大 学 出 版 社

北京交通大学出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书分上下两册共 3 篇 10 章．第 1 篇是一元函数微积分，包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用(其中包括偏导数及其应用)、不定积分(其中包括微分方程初步)、定积分及其应用 5 章；第 2 篇是线性代数与线性规划初步，包括行列式与矩阵、线性方程组、线性规划初步 3 章；第 3 篇是概率论与数理统计基础，包括概率论、数理统计 2 章．每章节之后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案．

本书注意结合高职教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明；编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中；叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学．

本书可作为高职、高专、成人院校经管类专业的高等数学教材，也可作为高校经管类学生的高等数学自学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册:经管类/ 唐瑞娜，姜成建主编．—北京:清华大学出版社;北京交通大学出版社，2004.10
(21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列)
ISBN 7 81082 423 6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①唐…　②姜…　Ⅲ．高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 096616 号

责任编辑：孙秀翠
出 版 者：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010 - 62776969
　　　　　北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010 - 51686045，62237564
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　　印张：10.75　　字数：236 千字
版　　次：2004 年 10 月第 1 版　　2004 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7 81082 423 6/ O·18
印　　数：1～5 000 册　　定价：15.00 元

出 版 说 明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，它的根本任务是培养生产、建设、管理和服务第一线需要的德、智、体、美全面发展的高等技术应用型专门人才，所培养的学生在掌握必要的基础理论和专业知识的基础上，应重点掌握从事本专业领域实际工作的基本知识和职业技能，因而与其对应的教材也必须有自己的体系和特色。

为了适应我国高职高专教育发展及其对教学改革和教材建设的需要，在教育部的指导下，我们在全面范围内组织并成立了“21世纪高职高专教育教材研究与编审委员会”(以下简称“教材研究与编审委员会”)。“教材研究与编审委员会”的成员单位皆为教学改革成效较大、办学特色鲜明、办学实力强的高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院，其中一些学校是国家重点建设的示范性职业技术学院。

为了保证规划教材的出版质量，“教材研究与编审委员会”在全国范围内选聘“21世纪高职高专规划教材编审委员会”(以下简称“教材编审委员会”)成员和征集教材，并要求“教材编审委员会”成员和规划教材的编著者必须是从事高职高专教学第一线的优秀教师或生产第一线的专家。“教材编审委员会”组织各专业的专家、教授对所征集的教材进行评选，对所列选教材进行审定。

目前，“教材研究与编审委员会”计划用2～3年的时间出版各类高职高专教材200种，范围覆盖计算机应用、电子电气、财会与管理、商务英语等专业的主要课程。此次规划教材全部按教育部制定的“高职高专教育基础课程教学基本要求”编写，其中部分教材是教育部《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》的研究成果。此次规划教材按照突出应用性、实践性和针对性的原则编写并重组系列课程教材结构，力求反映高职高专课程和教学内容体系改革方向；反映当前教学的新内容，突出基础理论知识的应用和实践技能的培养；适用“实践的要求和岗位的需要”，不依照“学科”体系，即贴近岗位群，淡化学科；在兼顾理论和实践内容的同时，避免“全”而“深”的面面俱到，基础理论以应用为目的，以必要、够用为度；尽量体现新知识、新技术、新工艺、新方法，以利于学生综合素质的形成和科学思维方式与创新能力的培养。

此外，为了使规划教材更具广泛性、科学性、先进性和代表性，我们希望全国从事高职高专教育的院校能够积极加入到“教材研究与编审委员会”中来，推荐“教材编审委员会”成员和有特色的、有创新的教材。同时，希望将教学实践中的意见与建议，及时反馈给我们，以便对已出版的教材不断修订、完善，不断提高教材质量，完善教材体系，为社会奉献更多更新的与高职高专教育配套的高质量教材。

此次所有规划教材由全国重点大学出版社——清华大学出版社与北京交通大学出版社联合出版。适合于各类高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校及高等院校主办的二级职业技术学院使用。

21 世纪高职高专教育教材研究与编审委员会

2004 **年** 10 **月**

前　言

英国著名哲学家培根指出:“数学是科学的大门和钥匙.”数学分初等数学与高等数学.高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学.初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形,使用的方法一般来说是静止的、孤立的;而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法去研究变量和变化的图形,从而能更生动地反映出客观世界的变化规律,因此高等数学已成为现代科学技术、科学管理诸多领域理论研究的工具与基础,同时也是高职高专院校课程设置中的一门十分重要的文化基础课和工具课.

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》,结合高职高专经管类专业特点,针对高职高专的培养对象而编写的.在编写过程中,注意做到了以下几点.

1. **定位准确,针对性强.**以高职高专院校的培养目标为依据,以适用、够用、好用为指导思想,在体现数学思想为主的前提下删繁就简,深入浅出,做到既注重高等数学的基础性,适当保持其学科的科学性与系统性,同时更突出它的工具性.

2. **教材编排模块化.**考虑到高职高专经管类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因,教材的编写采用了模块化.全书分为上下两册三大模块.上册包括第一模块:一元函数微积分;下册包括线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计基础两大模块.每块内容相对独立,有利于学校根据实际情况灵活安排课程,方便教师有选择地教学.

3. **内容安排重点突出,层次分明.**一元函数微积分是高等数学的主要内容,是现代工程技术和科学管理的主要数学支撑,也是高职高专经管类学生学习高等数学的首选,因此作为必学把它放在第一模块;偏导数与常微分方程是建立在一元函数微积分基础之上的,考虑到偏导数与常微分方程在实际中的广泛应用,所以把它们也放在第一模块,并与一元函数微积分一起组成上册的内容.

4. **理论联系实际,注意把数学知识与解决实际问题结合起来.**在教材的各个部分都安排了实际应用的内容,有助于培养学生应用数学知识解决实际问题的能力;书中概念的引入、定理的证明等都尽可能地从实际背景入手,有助于学生对其的理解与掌握,并能使学生在学习中领略数学概念、数学理论的发现与发展过程,这对培养学生的创新思维能力是大有益处的.

5. **加大了例题的示范性,利于学生快速掌握数学方法.**习题的配备类型合理,文题对应,难易适中,具有一定的梯度,符合学生的认识规律.

参加本书编写的是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师.在编写过程中,我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍,融进了自己的教学心得和体

验，结合实际，反复推敲，力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高等数学教材．尽管如此，由于编者水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者与同行指正．

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第 1 篇　一元函数微积分

第 *1* 篇　一元函数微积分

微积分是高等数学的核心内容，是重要的数学分支，也是数学联系实际的重要工具．微积分包括一元函数微积分与多元微积分．这里只介绍一元函数微积分．

第 1 章　函数的极限与连续

微积分的研究对象是函数，主要的是所谓的连续函数，而连续函数是用极限定义的，因此在这一章里，首先介绍函数的概念，给出函数极限及连续的定义，然后讨论它们的有关性质与运算.

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

客观世界中的事物都是遵循着一定的规律，在相互变化、相互依赖、相互关联着的 . 其中一种相依关系，在数学上的表现形式就是所谓的函数关系 .

定义 1.1　设 D 为非空实数集，x 与 y 是两个变量 . 如果对变量 x 在 D 中的每一个值，按照一定的对应法则 f，变量 y 都有确定的实数值与之对应，那么就称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 有时也简记为 $y=f(x)$. 其中变量 x 称为自变量；y 称为因变量；与 x 对应的 y 值称为 x 处的函数值；自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域；而相应的函数值 y 的全体称为函数的值域，记作 $f(D)$. 即 $f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$.

如果对于 D 中每一个 x，对应的 y 值惟一，称这样的函数为单值函数，否则称为多值函数 . 微积分中介绍的函数均是指单值函数 .

定义域与对应法则是确定一个函数的两要素 . 当两个函数的两要素分别相同时，称这两个函数是相同的(或相等)，否则称这两个函数是不相同的(或不相等).

例 1.1　判断下列每组函数是否相同 .

(1) 函数 $y=1$ 与函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

(2) 函数 $y=|x|$ 与函数 $y=\ \ x^2$

解: (1) 虽然两个函数表面形式不一样，但由于它们的定义域都是实数集 **R**，对 **R** 中每一个数 x，它们都对应惟一实数 1，所以二者表示的是同一个函数 .

同理(2)函数 $y=|x|$，与函数 $y=\ \ x^2$ 也表示相同的函数 .

函数的定义域一般用区间来表示 . 常见的区间有:

(1) 闭区间$[a, b]$，有$[a, b]=\{x \mid a \leq x \leq b\}$;

(2) 开区间(a, b)，有$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$;

(3) 半开半闭区间$[a, b)$或$(a, b]$，有$[a, b)=\{x \mid a \leq x<b\}$，$(a, b]=\{x \mid a<x \leq b\}$;

以上 3 种区间称为有限区间.

(4) 无限区间$(-\infty, b]$或$[a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$，有$(-\infty, b]=\{x \mid x \leq b\}$，$[a, +\infty)=\{x \mid x \geq a\}$，$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

上述各种类型的区间统称为区间，有时简记为 I.

称开区间$(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$. 即有 $U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，简记为 $U(a)$;

称$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$为点 a 的 δ 空心邻域，记为 $U^{\circ}(a, \delta)$. 简记为 $U^{\circ}(a)$.

当 δ 很小时，$U(a, \delta)$表示 a 附近的所有点.

函数的表示方法通常有以下几种.

(1) 解析法(又称为公式法)　即自变量 x 与因变量 y 的函数关系由数学式子给出，它便于理论研究. 微积分中的绝大部分函数都是用这种方法表示的.

(2) 图像法　把函数关系用平面的点集$\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$反映出来. 一般情况下，它是一条平面曲线. 例如，气象站的温度记录器，记录了温度与时间的函数关系，它就是借助于仪器自动描绘在纸带上的一条曲线来表达的. 用图像法表示函数，形象直观，函数的性态表现得十分明显.

(3) 表格法　变量间的函数关系，通过列表形式反映出来. 例如，火车时刻表就是用列表的方法，把火车的进(出)站的车次与时间的函数关系表示了出来. 这种表示方法使得自变量与因变量的对应关系一目了然.

(4) 语言描述法　即函数关系需要用语言文字把它描述出来.

例 1.2　(1) 取整函数 $f(x)=\operatorname{ent} x=[x]$，它表示不超过 x 的最大整数. 由取整函数的定义知 $\frac{3}{4}=0$，$\frac{8}{5}=1$，$[-3.4]=-4$.

(2) 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 为有理数} \\ 0 & x\text{ 为无理数}\end{cases}$

例 1.3　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } x<0 \text{ 时}\end{cases}$

对任意实数 x，有 $x=|x| \operatorname{sgn} x$.

例 1.4　邮资 y 是信件重量 x 的函数. 按照邮局的规定，对于国内的外埠平信，按邮件重量，每 20 克应付邮资 0.80 元；不足 20 克以 20 克计算；当信件的重量在 60 克以内时，则此函数关系表达式为:

$$y = \begin{matrix} 0.80 & 0 < x \leq 20 \\ 1.60 & 20 < x \leq 40 \\ 2.40 & 40 < x \leq 60 \end{matrix}$$

像上述这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同的式子表示的函数，通常称为分段函数．

分段函数虽然表达式分几段，但它表示的是一个函数．其定义域是所有段中自变量取值的全体．如取整函数 $f(x) = [x]$**与符号函数** sgn x **的定义域都是实数集 R．而例** 1.4 **中的函数的定义域是半开半闭区间**$(0, 60]$**．**

函数的定义域指明了函数关系的适用范围，只有当自变量在定义域中取值时，因变量才有惟一确定的对应值．因此研究函数关系时，必须会确定其定义域．如果函数是由解析式子给出时，函数的定义域就是使该式子有意义的自变量的全体；如果函数关系描述的是实际问题，则其定义域的确定需要符合实际意义．

例 1.5　**求函数** $f(x) = \arcsin \dfrac{x-1}{5} + \quad 25 - x^2$ **的定义域，并求函数值** $f(0)$**与** $f(1)$**.**

解：要使函数有意义，必须有 $\left| \dfrac{x-1}{5} \right| \leq 1$ **且** $25 - x^2 \geq 0$

即有 $|x-1| \leq 5$ **且** $|x| \leq 5$

因此有 $-4 \leq x \leq 5$**．于是函数定义域为**$[-4, 5]$**.**

因为 $x = 0 \in [-4, 5]$，$x = 1 \in [0, 5]$

所以 $f(0) = -\arcsin \dfrac{1}{5} + 5$，$f(1) = 2 \quad 6$．

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.2　**设函数** $y = f(x)$**在区间** I **上有定义．如果存在正数** M**，使得对** I **内每一个** x**，都有** $|f(x)| \leq M$**，则称函数** $f(x)$**在区间** I **上有界．如果这样的** M**不存在，则称** $f(x)$**在区间** I **上无界．**

例如：$y = \sin x$，**因为存在** $M = 1 > 0$，**对任一** $x \in \mathbf{R}$，**都有**

$$|\sin x| \leq 1$$

故函数 $y = \sin x$ **在**$(-\infty, +\infty)$**有界；**

又如函数 $y = \dfrac{5}{x}$**．因为存在** $M = 5 > 0$，**对任一** $x \in [1, +\infty)$**，有** $\left|\dfrac{5}{x}\right| \leq 5$**.**

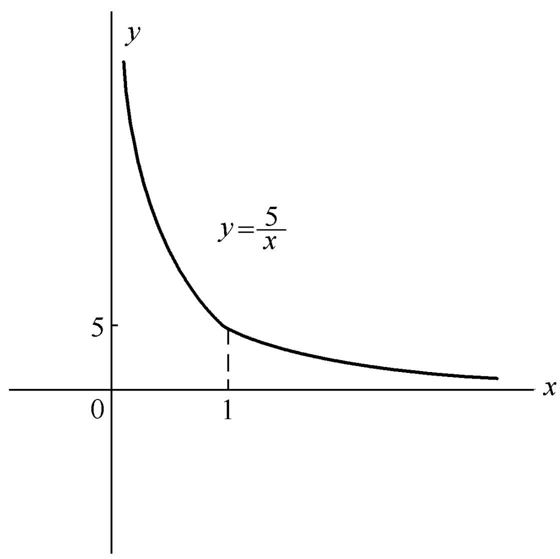

图 1 1

所以函数 $y=\frac{5}{x}$在$[1, +\infty)$有界．但它在$(0, 1)$内是无界的．这由图 1 1 不难得知．

2. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义．如果对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的，或称 $f(x)$是区间 I 上的单增函数；如果总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$是区间 I 上的严格单增函数．

如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geq f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的，或称 $f(x)$是区间 I 上的单减函数；如果总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$是区间 I 上的严格单减函数．

单增函数与单减函数统称为单调函数；严格单增函数与严格单减函数统称为严格单调函数．

使函数保持单调性的自变量的取值区间称为函数的单调区间．

例如：函数 $y=x^2$，在区间$[0, +\infty)$内严格单调增加，在区间$(-\infty, 0]$内严格单调减少；在定义区间$(-\infty, +\infty)$内则不具单调性．

严格单调增加(或减少)的函数，其图形是随着自变量的增加而上升(或下降)的曲线．

3. 函数的奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$的定义域D 是关于原点对称的区间，如果当 $x\in D$ 时，恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数；如果当 $x\in D$ 时，恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为奇函数．

例如：函数 $f(x)=x^3$、$\sin x$ 及符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 等都是奇函数；而函数 $f(x)=x^2$、$\cos x$ 等都是偶函数；$y=x^3+x^2$ 则既不是奇函数也不是偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

4. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D. 如果存在非零常数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$, 且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为周期函数．T 称为 $f(x)$的一个周期，其中的最小正周期称为 $f(x)$的基本周期．通常所说的周期函数的周期均指的是基本周期．

例如：函数 $y=|\sin x|$，$y=\tan x$，$y=\cos^2 x$ 等周期均为 π；而函数 $y=\cos\frac{x}{3}$的周期为 6π.

1.1.3 反函数与复合函数

1. 反函数

在函数关系中，自变量与因变量可以是相对的．例如在函数 $y=0.5x$ 中，若把 x 解出，得$x=2y$. 这时 y 成为了自变量，而 x 成为因变量，后一函数就称为前一函数的反函数．一

般地有如下定义.

定义 1.6　给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，值域 $f(D)$. 如果把 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=g(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 记为 $x=f^{-1}(y)$. 即 $x=f^{-1}(y)=g(y)$. 称函数 $y=f(x)$ 为直接函数. 此时，直接函数的值域成为反函数的定义域，而直接函数的定义域则成为了反函数的值域.

习惯上，用 x 代表自变量，y 代表因变量，因此函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$. 这时，在同一坐标系下，直接函数与反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

可以证明，严格单调的函数必有反函数.

例 1.6　求函数 $y=x^3-1$ 的反函数.

解：由 $y=x^3-1$ 得 $x=\sqrt[3]{1+y}$.

按习惯记法，则所求的反函数为 $y=\sqrt[3]{1+x}$.

2. 复合函数

定义 1.7　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，$u\in D$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在某一区间 I 上取值时，有 $\varphi(I)\subset D$，则称 y 是 I 上关于 x 的复合函数. 记作 $y=f(\varphi(x))$，$x\in I$. 也称 $y=f(\varphi(x))$ 是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的，x 称为自变量，u 称为中间变量.

函数的复合可以是多重的，也就是说，一个复合函数其中间变量可以是有限多个.

例 1.7　设 $y=f(u)=2u^3-3$，$u=\varphi(x)=\sin x+\cos x$，求 $f(\varphi(x))$.

解：$f(\varphi(x))=2(\sin x+\cos x)^3-3$.

与函数的复合对应的是函数的分解，能够把一个复杂的函数正确地分解成有限个简单函数的组合，这是后面求函数的导数、积分等的必要保证. 这里说的简单函数一般指高中数学中介绍的几种函数.

例 1.8　将下列函数分解成简单函数.

(1) $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$　　　(2) $y=e^{2\sin^3 x^2}$

解：(1) 由外而内有 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x}{2}$.

(2) 由外而内有 $y=e^u$，$u=2v^3$，$v=\sin t$，$t=x^2$.

1.1.4　初等函数

1. 基本初等函数

通常把高中数学中学过的六大类函数，统称为基本初等函数. 即

(1) 常量函数 $y=c$(c为实常数)

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α为实常数)

(3) 指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$，特别有 $y=\mathrm{e}^{x}$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$)

(4) 对数函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$，特别有 $y=\log_{\mathrm{e}} x=\ln x$

(5) 三角函数 $y=\sin x$ $y=\cos x$

$y=\tan x$ $y=\cot x$

$y=\sec x$ $y=\csc x$

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x$ $y=\arccos x$

$y=\arctan x$ $y=\operatorname{arccot} x$

基本初等函数的定义域、值域、图像及性质等见附录 A.

2. 初等函数

定义 1.8 凡是由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算而得到的能够用一个数学式子表示的函数，统称为初等函数.

例如：$y=\arcsin \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$，$y=\ln \dfrac{1+x}{1-x}$等都是初等函数.

而分段函数，大多不能用一个数学式子表示出来，因而不是初等函数. 但也有例外，如分段函数 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$可以改写为 $y=|x|=\sqrt{x^2}$，所以它还是初等函数.

微积分中研究的函数绝大部分都是初等函数.

1.1.5 经济学中常用的函数

1. 总成本函数

总成本函数是指在一定的时期内，生产某种产品所消耗的费用总和，记为 $C=C(Q)$，其中 Q为产量.

一般来讲，总成本 = 变动成本 + 固定成本. 其中固定成本指的是不随产量的变化而变动的费用，如厂房、机器设备等费用；变动成本是指随产量的变化而变动的费用，如原材料费、工人的工资支付费等.

2. 需求函数与供给函数

(1) 消费者对产品的需求随价格的波动而波动. 需求量 Q关于价格 P构成的函数关系称为需求函数，记为 $Q=D(P)$. 一般地，需求是随价格的提高而减少的，所以需求函数一般是价格的减函数，例如需求函数 $D(P)=\dfrac{1}{P}$，$D(P)=2-P$等.

(2) 同样，对某种产品的供给量，也随价格的变化而变化．那么供给量 Q 关于价格 P 构成的函数关系称为供给函数，记为 $Q=Q(P)$.

供给函数与需求函数相反，一般地，它是随价格的增加而增加的．当然也有例外情况发生．例如，珍贵文物和古董等价格上升后，人们会把存货拿出来出售，从而供给量增加，而当价格上升到一定限度后，人们会以为它们可能更贵重，就不会再提供到市场去出售．因而价格显然上升，供给量反而减少．

例 1.9　设某种品牌的汽车价格为 20 万元/辆时，销量为 10 000 辆，已知汽车价格每提高 2 万元，需求量就减少 2 000 辆，求需求函数．

解： 设 Q 为汽车的需求量，P 为价格，由题意可知

$$Q=10\,000-\frac{P-20}{2}\times 2\,000=30\,000-1\,000P=1\,000(30-P)$$

由此可知，汽车的价格 P 不能等于或超过 30 万元，否则就没有销路了．

例 1.10　某地区某天对鸡蛋的需求函数为 $Q=65-9P$，供给函数为 $Q=5P-5$(单位：Q 为吨，P 为元/公斤).

(1) 找出均衡价格，并求出此时的供给量与需求量．

(2) 在同一坐标系中画出供给函数曲线与需求函数曲线．

解： (1) 因为均衡价格，就是供给量与需求量相等时的价格．故有 $65-9P=5P-5$. 解得 $P=5$. 即均衡价格为 $P=5$(元/公斤). 此时供给量 = 需求量 = 20(吨).

(2) 供给函数曲线用 AB 表示，需求函数曲线用 CD 表示，显然二者交点 E 对应的横坐标 P，就是所求的均衡价格，如图 1 2 所示．

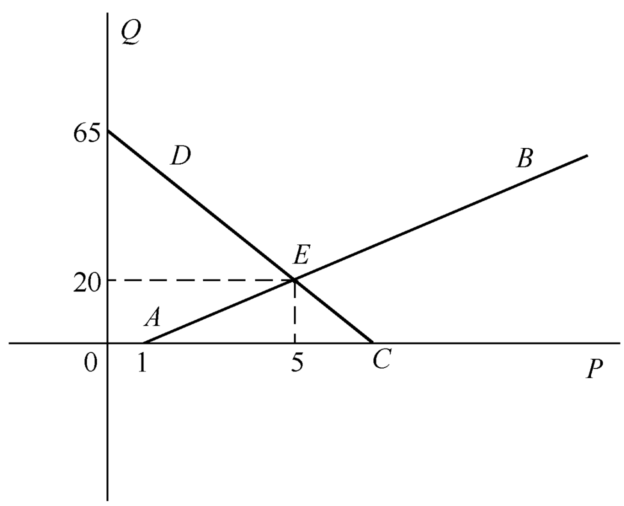

图 1 2

3. 总收益函数

设某种产品的价格为 P，相应的需求量为 Q，则销售该产品的总收益为 $R=QP$.

若需求函数 $Q=f(P)$，则总收益函数 $R=f(P)P=R(P)$，即总收益是价格的函数；

若由需求函数 $Q=f(P)$得到价格函数 $P=f^{-1}(Q)=g(Q)$，则总收益函数 $R=Qg(Q)=R(Q)$. 即总收益又成为需求量 Q 的函数了．

4. 利润函数

总收益函数减去总成本函数就是利润函数．记为 $L(Q)$

即有
$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

例 1.11 已知某产品的价格函数 $P=15-\dfrac{Q}{5}$，成本函数 $C=40+7Q$. 求产量 Q 是多少时，总利润最大？

解： 因为总利润函数 $L(Q)=$ 总收益函数 $R(Q)-$ 成本函数 $C(Q)$

而
$$R(Q)=PQ=15Q-\frac{Q^2}{5},$$
$$C(Q)=40+7Q$$

故
$$L(Q)\quad 15Q-\frac{Q^2}{5}-40-7Q=-\frac{1}{5}(Q^2-40Q+400)+40$$
$$=-\frac{1}{5}(Q-20)^2+40$$

所以，$Q=20$ 时取得最大利润，且最大利润为 40.

习题 1.1

1. 试问函数关系 $y=\arcsin 3x$，$(1\leq x\leq 2)$ 是否有意义？为什么？

2. 下列函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一个函数？说明其理由.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=(\quad x)^2$

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\quad x^2$

(3) $f(x)=\sin(\arcsin x)$，$g(x)=\arcsin(\sin x)$

(4) $f(x)=\ln\quad x-1$，$g(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$

(5) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$，$g(x)=x$.

(6) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases} x-1 & \text{当 } x>1 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x=1 \text{ 时} \\ 1-x & \text{当 } x<1 \text{ 时} \end{cases}$

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}+\quad 1-x^2$

(3) $y=\quad -2\quad\sin x$　　(4) $y=\quad\dfrac{1+x}{1-x}$

4. 判断下列函数的单调增减性.

(1) $y=2x+1$　　(2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$