高等数学

GAODENG ● SHUXUE

潘鹊屏　主编

江苏科学技术出版社

HIGHER
Mathematics

HIGHER
Mathematics

高 等 数 学

潘 鹊 屏 主编

江苏科学技术出版社

高 等 数 学

潘鹊屏 主编

出版、发行：江苏科学技术出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：江苏新华印刷厂

开本850×1168毫米 1/32 印张26.25 插页4 字数652,000

1990年2月第1版　1990年2月第1次印刷

印数1—300册

ISBN 7—5345—0835—5

O·59　定价：（精）13.20元

编 者 的 话

本书包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学、微分方程、级数的主要内容。它可以作为专科层次各类学校该课程的教材或教学参考书，也可以作为本科院校少学时专业的教材或教学参考书。

编者在以下几个方面作了努力：

总结自己在教学中的经验体会，力求写出新意；

内容的安排(包括例题与作业)有较大的选择余地，以满足不同情况读者的需要；

概念的叙述、定理的证明力求通俗简洁，例题的选择注意类型的广泛性，解题方法和技巧着意分析、归纳和小结。

本书有许多以小字体给出的“附注”和“说明”，它们可以帮助读者加深对内容的理解，提高分析和解决问题的能力，但教师不必一一讲授，可以把它们作为学生的自学材料。

本书是编者将目前常见的“教材”、“教学参考书”和“解题分析”这三类书籍融为一体的尝试，因此它对于自学这门课程的同志尤为适宜。

使用本书的课内学时为150～180学时。

本书由潘鹊屏同志主编，章平同志编写了第二、六、八章，叶宏光同志编写了第十一章，韩秀文、张澄同志选配了第一至五章的习题，赵其华同志选配了第六至第八章的习题，秦安坚同志绘制了全书的插图。

本书承陶永德教授作了斟字酌句的修改，他的许多宝贵意见，对编者的定稿工作颇有指导意义，南京航务工程专科学校的各级

领导，对本书的编写、出版给予了极大的关心和支持，在此编者谨向他们表示衷心的感谢。

虔诚地期待着读者与同行们的指正。

编　　者

1987年11月于南京

目　录

第一章 函数与极限

函数概念是近代数学的基本概念之一，数学分析就是以函数为研究对象的一个数学分支．极限是一个重要概念，借助它能建立其它许多重要概念；极限的方法则是数学分析中研究函数的基本方法．本章将介绍有关函数与极限的基本知识．

第一节 函 数

一、函数概念

在研究自然现象，解决数学或者实际问题时，我们常常会在同一个问题中遇到若干个变量，它们之间相互依赖、相互制约，存在着某种确定的关系．这在数学上就产生了函数这个概念，对于两个变量的情形，它可以叙述为以下定义．

定义 设有两个变量 x 和 y．如果对于非空数集 X 中的每一个数值 x，变量 y 通过确定的对应规律 f 都有一个确定的数值与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数***．记为

$$y=f(x)\qquad x\in X \tag{1}$$

其中变量 x 叫做函数 y 的**自变量**，数集 X 叫做该函数的**定义域**；变量 y 也叫做**因变量**，它所能取的值的全体构成的集合 Y 叫做该函数的**值域**．

* 这样的函数又称为单值函数．如果对于 $x\in X$，y 通过 f 有若干对应值，则称 y 为 x 的多值函数．例如，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$就是一个多值函数．

说明：1°定义表明，定义域X和对应规律f是函数的两要素。并非任何两个变量都能构成一个函数。例如，式子$y=\sqrt{-4+2\sin^2 x}$中的变量x和y就不能构成函数关系。读者还可举出许多类似的例子。对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应规律都相同时，它们才是相同的。因此，在给出一个函数时，一般应标明定义域。遇到不标明定义域的函数，就认为其定义域是使函数的表达式有意义的全体自变量值所构成的数集。此外，函数与表示变量的字母是无关的。例如，对于函数$y=\operatorname{arctg} t$与$y=\operatorname{arctg} x$来说，因为它们的定义域与对应规律都相同，所以尽管自变量的字母不同，却仍是同一个函数。

应当指出，若两个函数的定义域相同，且表示它们的对应规律的运算式可以通过恒等变形互相转化，则仍称它们是相同的函数，例如，$y=2\sin x\cos x$和$y=\sin 2x$是同一个函数。

2° 为简便起见，我们有时也采用

$$y=y(x),\quad s=s(t),\quad \cdots$$

这类函数记号，这儿的y、s等等既表示函数，又表示对应规律，即它们具有双重“身分”。

3° 若某一确定的数值$x_0\in \boldsymbol{X}$，则称函数$y=f(x)$在x_0处有定义，且以$f(x_0)$、$y|_{x=x_0}$或者$f(x)|_{x=x_0}$表示该函数在$x=x_0$处的值。

4° $y=C$（C为任何常数），是一个函数。它的定义域为一切实数，对于一切$x\in \boldsymbol{X}$，y都等于C。人们称之为**常数函数**。

二、函数的表示法

对应规律f的不同表示方式，产生了表示函数的不同方法。通常采用的函数表示法有四种：公式法、表格法、图示法和语句表示法。

1. 公式法

用一个或者若干个公式表示函数的方法叫做函数的公式表示法。例如

$$f(x)=x^3+5;\quad f(x)=\frac{\lg x-\sin x}{2x^2-1};\quad f(x)=2^x+\sqrt{5-3x};$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1\\ \sin x, & x>1\end{cases};\quad f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

等等，都是用公式法表示的函数。值得注意的是，最后两个函数具有一个共同的特征：在定义域的不同范围内，它们具有不同的表达式。这样的函数叫做**分段函数**。分段函数在工程技术上应用较为普遍。在计算分段函数的函数值时，自变量取的值属于定义域的哪一个范围，就按在该范围所给定的公式去计算函数值。

例 1 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1\\ \sin x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(0),f(1)$和 $f(\pi)$。

解 因为 $0,1\in(-\infty,1]$，$\pi\in(1,+\infty)$，所以

$$f(0)=0^2+1=1,\quad f(1)=1^2+1=2$$

而

$$f(\pi)=\sin\pi=0$$

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，求 $f(x)|_{x=9}$，$f(0)$和$f(-2)$。

解 因为 $9\in(0,+\infty)$，$0\in\{0\}$，$-2\in(-\infty,0)$，所以

$$f(x)|_{x=9}=1,\quad f(0)=0,\quad f(-2)=-1$$

例 2 中的这个函数称为符号函数，记为 $\operatorname{sgn}x$。人们常运用它将一些分段函数写得简洁一些。例如函数

$$f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{1+x^2}, & x\leqslant 0\\ x\sqrt{1+x^2}, & x>0\end{cases}$$

可以记为

$$f(x)=x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sgn}x$$

例 3 设火车站收取行李费的规定为：当行李不超过50公斤时，每公斤收费0.15元；当超过50公斤时，超重部分每公斤收费

0.25元．那么运费 y（元）与重量 x（公斤）之间的函数关系为

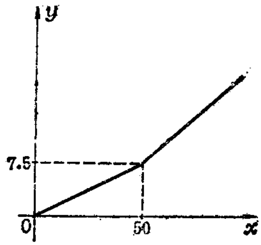

图 1.1

$$y=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50\end{cases}$$

这就是一个分段函数，其图形如图 1.1 所示．

2．**表格法**

将自变量取的值与对应的函数值以表格形式列出来表示函数的方法，叫做函数的表格表示法．如三角函数表、对数表、学校历年招生人数表和工厂历年的产值表等，都是以这种方法表示函数的实例．

3．**图示法**

以图形表示函数的方法，叫做函数的图示法．例如，图 1.1中的图形表示例3所求的函数，由温度自动记录仪描绘的某地一昼夜的温度曲线表示温度是时间的函数，它们都是以图示法表示函数的例子．

4．**语句表示法**

纯粹用语言描述函数的方法叫做函数的语句表示法．例如，"取整函数"就是用"函数 y 是不超过自变量 x 的最大整数"这一语句表示的一种函数，常记为 $y=[x]$，其图形如图 1.2 所示．

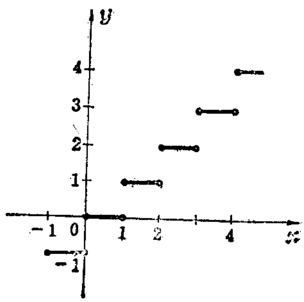

图 1.2

三、函数的分类

下面介绍用公式法表示的几种常见函数．

1．**显函数和隐函数**

由公式

$$y=f(x) \qquad x\in \boldsymbol{X}$$

给出的等式右边不含 y 的函数叫**显函数**。比如

$$y=\sin 5x \quad 和 \quad y=1+\frac{x^2}{x+\sin x}$$

都是显函数，其中 a 为常数。

若存在一个非空集合$\boldsymbol{X}$，当 $x_0\in \boldsymbol{X}$时，方程

$$F(x_0,y)=0$$

相应地有一个实数解，则称由方程

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

所确定的函数 y 为 x 的**隐函数**。例如

$$x^2+y^2=a^2 \quad 和 \quad xy^3+4x^2y-9=0$$

都是隐函数。

方程(2)也许确定着若干个函数。如 $x^2+y^2=a^2$就确定了两个函数：

$$y=\sqrt{a^2-x^2} \quad 和 \quad y=-\sqrt{a^2-x^2}$$

此外，还应当指出，有的方程(比如 $xe^y-ye^x=0$) 虽然确定了 y 为 x 的隐函数，但无法将它化为显函数。因此，就确定隐函数的方程本身来研究隐函数，将是一个常常遇到的课题。

2. 直接函数和反函数

若函数 $y=f(x)$的定义域为$\boldsymbol{X}$，值域为$\boldsymbol{Y}$，且对于每个 $y\in \boldsymbol{Y}$ 只有一个 $x\in \boldsymbol{X}$与之相对应，那么由函数的定义可以得到一个以$\boldsymbol{Y}$为定义域、$\boldsymbol{X}$为值域，且 y 与 x 仍满足关系 $y=f(x)$的新函数，记为 $x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$*。这时，我们称 $y=f(x)$为**直接函数**，$x=\varphi(y)$或 $x=f^{-1}(y)$为 $y=f(x)$的**反函数**。也称它们互为反函数。

例如，函数 $y=3^x$ 的反函数是 $x=\log_3 y$；$y=2x-3$ 的反函

---

* f^{-1}，$f^{-1}(y)$是整体记号，不是 f 或 $f(y)$的 -1 次幂的记号。

数为 $x=(y+3)/2$。

为了符合人们通常以 x 表示自变量、y 表示函数的习惯，我们常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写为 $y=\varphi(x)$。例如，$y=3^x$ 的反函数 $x=\log_3 y$ 可以记为 $y=\log_3 x$；$y=\sin x$ 的反函数 $x=\arcsin y$ 可以写成 $y=\arcsin x$，等等。

说明：1° 反函数 $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 表示的是同一个函数。因为决定函数的是对应规律和定义域，而与变量用什么字母表示是没有关系的。

2° 由反函数的概念，不难知道 $f^{-1}[f(x)]=x$。例如，若 $y=7x+5$，则 $x=f^{-1}(y)=(y-5)/7$，从而可得到

$$f^{-1}[f(x)]=\frac{(7x+5)-5}{7}=x$$

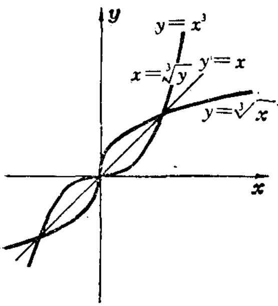

图 1.3

3° 直接函数 $y=f(x)$ 的图形与其形如 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）的反函数的图形相同，但与习惯写法的反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 为对称（图 1.3）。

3. 基本初等函数，复合函数，参数方程所示的函数，初等函数

（1）基本初等函数　常数函数 $y=c$，幂函数 $y=x^\alpha$（α 为实数），指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$，$\csc x$，反三角函数 $y=\arcsin x$、$\arccos x$、$\operatorname{arctg}x$、$\operatorname{arcctg}x$、$\operatorname{arcsec}x$、$\operatorname{arccsc}x$ 叫做**基本初等函数**。

（2）复合函数　若 y 是 u 的函数 $y=F(u)$，定义域为 $\boldsymbol{U}_1$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，值域是 $\boldsymbol{U}_2$，且 $\boldsymbol{U}_2\subseteq\boldsymbol{U}_1$，那么 y 通过 u 也是 x 的函数，且称之为由 $y=F(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，也常叫做函数的函数，记为

$$y=F[\varphi(x)]$$

其中变量 u 叫做**中间变量**。

注意：1° 函数 $y=F[\varphi(x)]$ 的定义域是使得 $u=\varphi(x)$ 的值落入 $\boldsymbol{U}_1$ 中

的那些 x 值的集合.因此,它可能是$u=\varphi(x)$的定义域,也可能是$u=\varphi(x)$的定义域的一个子域,例如,$y=u^2$的定义域U_1是$(-\infty,+\infty)$,$u=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,复合函数 $y=u^2=\cos^2 x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,它与$u=\varphi(x)=\cos x$ 的定义域相同。但是,由函数 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 构成的复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是$[-1,1]$,它只是 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一个子域,只有当 $x\in[-1,1]$时,$u=\varphi(x)=1-x^2$ 的值才落在 $y=F(u)=\sqrt{u}$的定义域$[0,+\infty)$上.

因此,并非任何两个函数都能构成复合函数的。例如,$y=\arcsin u$,$u=\sqrt{2}+x^2$ 就不能构成复合函数 $y=\arcsin(\sqrt{2}+x^2)$,理由请读者自行说明.

2° 复合函数还可以由两个以上的函数复合而成。例如,由函数 $y=\log_3 u$,$u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$,可以构成复合函数 $y=\log_3\sin(x^2+1)$

例 4 设 $f(x)=1/(x+1)$,$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$,求 $f[\varphi(x)]$和$\varphi[f(x)]$。

解 先求 $f[\varphi(x)]$。这时应将 $f(x)$中的 x 视为中间变量 u,认为是由 $y=f(u)=1/(u+1)$和 $u=\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$ 求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$。因此可得

$$f[\varphi(x)]=\frac{1}{\sqrt{\sin x}+1}$$

再求$\varphi[f(x)]$.这时应将$\varphi(x)$中的 x 视为中间变量 u,认为是由 $y=\varphi(u)=\sqrt{\sin u}$ 和$u=f(x)=1/(x+1)$求$\varphi[f(x)]$.因此有

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin\frac{1}{x+1}}$$

例 5 设$f(x)=\sqrt{1-x^2}$,试求$f(x^2)$。

解 本题可以看成已知 $f(u)=\sqrt{1-u^2}$ 和 $u=\varphi(x)=x^2$求 $f[\varphi(x)]=f(x^2)$,因此有

$$f[\varphi(x)]=f(x^2)=\sqrt{1-(x^2)^2}=\sqrt{1-x^4}$$

例 6 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(2x+1)$。

解 方法一 由

$$f(x-1)=x^2=[(x-1)+1]^2$$

可知所给的函数与函数 $f(x)=(x+1)^2$ 相同，故原来的问题变成由 $y=f(u)=(u+1)^2$ 与 $u=\varphi(x)=2x+1$ 求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的问题，因此

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$$

方法二 直接令 $t=x-1$，得 $f(t)=(t+1)^2$，再求 $f(t)=(t+1)^2$ 与 $t=2x+1$ 的复合函数得

$$f(2x+1)=[(2x+1)+1]^2=4(x+1)^2$$

我们不但要会将若干个函数复合成一个复合函数，还应当能够准确地指出一个复合函数是由哪些函数怎么复合而成的，即要善于“分解”复合函数。

例 7 指出 $y=\lg\sin(x^2+1)$，$y=\sin 2x$，$y=(3x+5)^{10}$ 的复合过程。

解 $y=\lg\sin(x^2+1)$是由 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$ 二次复合而成的；

$y=\sin 2x$ 是由 $y=\sin u$，$u=2x$ 一次复合而成的；

$y=(3x+5)^{10}$ 是由 $y=u^{10}$，$u=3x+5$ 一次复合而成的。

例 8 分解复合函数 $y=5^{-\frac{1}{x^2}}$，$y=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$，$y=\dfrac{1+\cos^2 x}{x-\lg 5x}$。

解 $y=5^{-\frac{1}{x^2}}$ 可分解为 $y=5^u$，$u=-\dfrac{1}{x^2}$；

$y=\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$ 可分解为 $y=\sqrt{u}$，$u=\operatorname{ctg}v$，$v=\dfrac{x}{2}$；

$y=\dfrac{1+\cos^2 x}{x-\lg 5x}$ 可分解为 $y=\dfrac{u}{v}$，$u=1+w^2$，$w=\cos x$；$v=x-\lg\omega$，$\omega=5x$。