

成人高等教育系列教材
Chengrengao dengjiaoyuxilie jiaocai

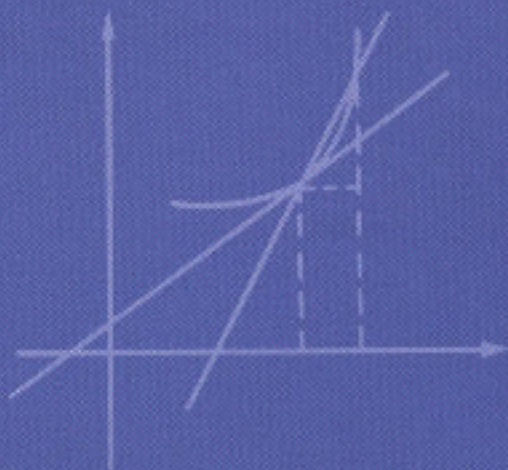
高等数学

[上册]

GaoDengShuXue

GAODENGSHUXUE

主編 陈凤平 副主編 洪潮兴 吴满



华南理工大学出版社

成人高等教育系列教材

高等数学

(上册)

主 编 陈凤平

副主编 洪潮兴 吴 满

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 (上下册) 陈凤平主编 广州: 华南理工大学出版社,
2004

(成人高等教育系列教材)

陈凤平 陈凤平 陈凤平 陈凤平

I 高... II 陈... III 高等数学 成人教育: 高等教育 教材
IV 高等

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 000000 号

总发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 5 号楼, 邮编 510640)

发行电话: 020-87533333 020-87533333 (传真)

电子邮箱: zhuang@scut.edu.cn

网址: <http://www.scut.edu.cn>

责任编辑: 乔丽

印刷者: 中山市新华印刷厂印装

开本: 185mm×260mm 印张: 10.5 字数: 250千字

版次: 2004 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

印数: 1-1000 册

定价 (上下册): 18.00 元

版权所有 盗版必究

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbo.com

前 言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分,提高成人高等教育教学质量的当务之急是编写适合成人教育特点的教材。

这本书正是针对成人教育的特点而精心编写的。根据国家教委对培养高等技术应用型人材,基础理论课的教学“以应用为目的,以必需、够用为度”和少而精的原则,作者结合自己长期从事各层次高等数学教学的丰富经验,力求在保证科学性的基础上侧重对基础知识的详解与分析,在做到概念准确、说理清楚、选材适当的同时注意减少数理论证,叙述通俗易懂、重点突出、例题广泛,注重基础运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。努力做到既便于教学,又利于读者自学,体现了成人教育的特色。

本书由陈凤平任主编,洪潮兴、吴满任副主编。它凝聚了作者及众多常年在华南理工大学成人教育学院教学第一线的教师们的经验,这次的出版得到了华南理工大学成人教育学院的大力支持,对此,我们表示衷心的感谢!

本书可作为各类成人高等院校工科专科教材,也可作为专科层次的高等教育自学考试、网络教育、函授教育、职工大学、夜大学、干部培训班的教材。

由于我们的水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

二〇〇五年 愿月于广州

目 录

第一章 函数、极限、连续性	(i)
第一节 函 数	(i)
一、变量与实数	(i)
二、函数的概念	(i)
三、函数的几种特性	(ii)
四、初等函数	(ii)
习题 1.1	(ii)
第二节 数列的极限	(ii)
一、整标函数与数列	(ii)
二、数列极限的定义	(iii)
习题 1.2	(iii)
第三节 函数的极限	(iii)
一、当自变量 x 的绝对值无限增大时的函数极限	(iii)
二、当自变量 x 趋向于定值 x_0 时的函数极限	(iv)
三、单侧极限	(iv)
四、关于极限的性质定理	(iv)
习题 1.3	(iv)
第四节 无穷小与无穷大	(iv)
一、无穷小概念	(iv)
二、无穷小与极限的关系	(v)
三、无穷小的性质	(v)
四、无穷大的概念	(v)
五、无穷小与无穷大的关系	(v)

习题 1.5.1	(1.5.1)
第五节 极限运算法则	(1.5.1)
习题 1.5.2	(1.5.2)
第六节 两个重要极限	(1.5.2)
一、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$	(1.5.2)
二、重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	(1.5.2)
习题 1.5.3	(1.5.3)
第七节 无穷小的比较	(1.5.3)
习题 1.5.4	(1.5.4)
第八节 函数的连续性	(1.5.4)
一、函数在一点处的连续性	(1.5.4)
二、区间内的连续函数	(1.5.4)
三、函数的间断点	(1.5.4)
习题 1.5.5	(1.5.5)
第九节 初等函数的连续性	(1.5.5)
一、基本初等函数的连续性	(1.5.5)
二、连续函数的四则运算	(1.5.5)
三、反函数的连续性	(1.5.5)
四、复合函数的连续性	(1.5.5)
习题 1.5.6	(1.5.6)
第十节 闭区间上连续函数的性质	(1.5.6)
习题 1.5.7	(1.5.7)
第二章 导数与微分	(1.6.1)
第一节 导数的概念	(1.6.1)
一、两个引例	(1.6.1)
二、导数的定义	(1.6.1)

三、左导数与右导数	(150)
四、几个简单函数的导数	(151)
五、导数的几何意义	(151)
六、函数可导性与连续性的关系	(151)
七、用导数求解变化率问题	(151)
习题 151	(151)
第二节 导数的运算法则	(151)
一、函数四则运算的求导法则	(151)
习题 151(1)	(151)
二、反函数的求导法则	(151)
三、复合函数的求导法则	(151)
四、求导的基本公式和法则	(151)
习题 151(2)	(151)
第三节 高阶导数	(151)
习题 151	(151)
第四节 隐函数求导法	(151)
一、隐函数求导法	(151)
二、对数求导法	(151)
习题 151	(151)
第五节 参数方程所确定的函数的导数	(151)
习题 151	(151)
第六节 微分	(151)
一、微分概念	(151)
二、微分的基本公式及四则运算法则	(151)
三、一阶微分形式的不变性	(151)
四、微分在近似计算中的应用	(151)
习题 151	(151)

第三章 微分中值定理与导数应用.....	(100)
第一节 微分中值定理.....	(100)
一、罗尔定理	(100)
二、拉格朗日微分中值定理	(103)
三、柯西中值定理	(103)
四、微分中值定理的分析证明	(104)
习题 獐.....	(104)
第二节 罗彼塔法则.....	(105)
一、 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型待定式	(105)
二、 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 型待定式	(105)
三、其他待定式	(105)
习题 獐.....	(105)
第三节 函数和曲线的性态讨论.....	(105)
一、函数单调性的判定	(105)
习题 獐(10)	(105)
二、函数的极值	(105)
习题 獐(10)	(105)
三、曲线的凹凸性	(105)
四、曲线的拐点	(105)
五、函数作图	(105)
习题 獐(10)	(105)
第四节 最大值和最小值问题.....	(105)
习题 獐.....	(105)
第五节 弧微分.....	(105)
习题 獐.....	(105)
第四章 不定积分.....	(105)
第一节 原函数与不定积分概念.....	(105)
源	

一、原函数	(151)
二、不定积分	(151)
三、不定积分的几何意义	(151)
四、不定积分的基本性质	(151)
习题 151	(151)
第二节 换元积分法	(151)
一、第一换元法	(151)
习题 151(1)	(151)
二、第二换元法	(151)
习题 151(2)	(151)
第三节 分部积分法	(151)
习题 151	(151)
第五章 定积分及其应用	(151)
第一节 定积分概念	(151)
一、实际问题举例	(151)
二、定积分定义	(151)
三、定积分的几何意义	(151)
习题 151	(151)
第二节 定积分的性质	(151)
习题 151	(151)
第三节 微积分基本定理	(151)
一、变上限的定积分	(151)
二、积分上限函数的导数	(151)
三、牛顿—莱布尼兹公式	(151)
习题 151	(151)
第四节 定积分的换元法	(151)
习题 151	(151)

第五节 定积分的分部积分法.....	(圆苑)
习题 缘缘	(猿园)
第六节 广义积分.....	(猿圆)
一、无穷区间的广义积分	(猿猿)
二、无界函数的广义积分	(猿源)
习题 缘远	(猿远)
第七节 定积分的应用.....	(猿远)
一、定积分应用的微元分析法	(猿远)
二、平面图形的面积	(猿源)
习题 缘苑(员)	(猿猿)
三、立体体积与平面曲线的弧长.....	(猿缘)
习题 缘苑(圆)	(猿圆)
四、定积分的物理应用	(猿源)
习题 缘苑(猿)	(猿猿)
附：习题答案	(猿缘)

第一章 函数、极限、连续性

反映两个变量之间相互关系的函数是高等数学的主要研究对象,而作为高等数学的主要内容的微积分,其理论基础是极限论,进一步,作为可微性与可积性的前提又与函数的连续性有密切的关系,因此,在全面学习微积分之前,本章将主要阐述函数、极限、连续性等基本概念、基本理论和基本方法。

第一节 函 数

函数是高等数学的研究对象,关于函数的概念、表示法、基本性态及基本函数的知识,中学数学已有较详细的介绍,本节将对上述内容进行一次总结性的概括与复习,并作必要的补充与提高。

一、变量与实数

1. 常量与变量

运用数学方法研究各种科学技术问题时,必然要处理各种各

样的量 援 这些量按其 在研究过程中的取值情形 , 可以分成两大类 ; 有一类量 , 在研究的整个过程中不起变化 , 只取一个定值 , 我们称之为常量 ; 另一类量 , 在研究过程中可以取不同的数值 , 我们称之为变量 援

初等数学主要研究常量 , 而高等数学则主要研究变量 , 也就是说 , 把一个量置于某个变化过程中来考察 , 因而变量是绝对的 , 常量只能是相对的 援 有些量在某一研究过程中表现为常量 , 但在另一个过程中却可以表现为变量 援 例如 : 由直线 $y=0.8x$, y 轴及直线 $x=1$ 所围成的三角形 (如图 1.1.1) 的面积是 0.4 援 在这样的 问题中 , 0.4 是定值 援 但如果将直线 $y=0.8x$ 视为一条动直线 , 则研究所给三角形面积与这一动直线的关系时 , 应将 x 作为变量 援

另一方面 , 有些量虽然也有变化 , 但在一定的条件下变化很小 , 我们也将它作为常量来处理 援 如重力加速度 早是随地点的不同其取值也略有不同的 , 但由于变化不大 , 在要求不很高的计算中 , 早就被作为常数来处理 援

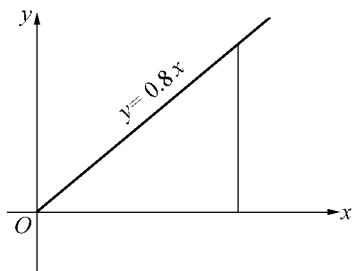


图 1.1.1

1.1.2 实数的绝对值

绝对值的概念和性质在高等数学中有着特别重要的作用 援 要复习如下 :

本书中变量所取的值 , 如无特别声明 , 假设都是实数 援 一个实数 早可以与数轴上的点 酝 建立一一对应关系 , 为了叙述方便 , 我们将 “实数 早”与 “它在数轴上的对应点 酝”统称为 “点 酝” 援

实数 早的绝对值定义为 : 正数的绝对值是它本身 ; 负数的绝

对值等于它的相反数, x 的绝对值仍为 $|x|$, x 的绝对值记为 $|x|$ 即

$$|x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0 \\ -x & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ 在数轴上表示点 x 与原点的距离, 而 $|x_1 - x_2|$ 表示点 x_1 与点 x_2 两点间的距离. 援

绝对值的性质:

(1) 对任意实数 x : $|x| \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $|x| = 0$;

(2) 对任意实数 x : $|x| = |-x|$;

(3) 对任意实数 x, y : $|x \pm y| \leq |x| + |y|$;

(4) 对任意实数 x, y ($y \neq 0$): $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$;

(5) 设 $x > 0$, 不等式 $|x| \leq y$ 等价于 $-y \leq x \leq y$;

(6) 设 $x > 0$, 不等式 $|x| \geq y$ 相当于 $x \geq y$ 或 $x \leq -y$;

(7) 对任意实数 x 和 y 恒有

$$|x - y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \geq ||x| - |y||$$

(8) 对任意实数 x 和 y 恒有

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2. 区间与邻域

研究变量的第一步, 就是要确定变量的取值范围. 变量在其变化过程中所可能取的一切值, 构成了实数集 \mathbb{R} 的一个子集 I . 本书将不严格区分数集 I 及其在数轴上对应的点集. 最常见的一类数集是区间. 援

现将区间表示的数集分述如下:

数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 简记为 (a, b) 或 (a, b) ;

数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 简记为 $[a, b]$ 或 $[a, b]$;

数集 $\{x \mid a \leq x < b\}$ 及数集 $\{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开闭区间, 分

别简记为 $葬 \leq 曾 \leq 遭$ 及 $葬 \leq 曾 < 遭$ 或 $[葬, 遭]$ 及 $(葬, 遭)$ 援

以上四种区间统称为以 $葬, 遭$ 为端点的有限区间, 可统一记为 $陨葬, 遭$ 或区间 $陨$ 今后在不需要考虑端点 $葬, 遭$ 是否属于该区间时, 就采用这种统一记号 $陨$ 区间 $陨葬, 遭$ 在数轴上对应着以点 $葬$ 点 $遭$ 为端点的线段, 这些区间的长度都是 $遭 - 葬$ 援

除有限区间外, 还有无限区间 $戮集 \{曾 \geq 葬\}$ $\{曾 \leq 葬\}$ $\{曾 \geq 遭\}$ 以及 $\{曾 \leq 遭\}$ 都叫做无限区间, 并分别记为: $葬 \leq 曾 < 垣$ 肆、 $葬 < 曾 \leq 垣$ 肆、 $原$ 肆 $\leq 曾 < 遭$ 以及 $原$ 肆 $\leq 曾 \leq 遭$ 或分别记为 $(葬, 垣$ 肆)、 $[葬, 垣$ 肆)、 $(原$ 肆, 遭) 或 $(原$ 肆, 遭] 这些区间对应数轴上的射线 援

实数集 $砸$ 本身也可以用区间表示为 $(原$ 肆, 垣 肆) 援

以点 $曾_0$ 为中心, 长度等于 2δ 的开区间 $(曾_0 - \delta, 曾_0 + \delta)$ 叫做点 $曾_0$ 的 δ 邻域, 记为 $哉(曾_0, \delta)$, δ 叫做该邻域的半径, 在不需要强调邻域的半径等于多大时, 简称为点 $曾_0$ 的邻域 援 δ 邻域内的一切曾值所成的集合可表示为

$$哉(曾_0, \delta) = \{曾 \mid 曾_0 - \delta < 曾 < 曾_0 + \delta\}$$

或叙述为适合不等式 $曾_0 - \delta < 曾 < 曾_0 + \delta$ 的一切曾值 援

如果 $曾_0$ 恰是闭区间 $[葬, 遭]$ 的端点, 则点 $曾_0$ 的任何邻域必有一半不含于该区间 援 为了叙述方便, 我们约定: 点 $葬$ 的 δ 邻域是指区间 $[葬, 葬 + \delta)$ (又叫做点 $葬$ 的右邻域), 点 $遭$ 的 δ 邻域是指区间 $(遭 - \delta, 遭]$ (又叫做点 $遭$ 的左邻域) 援

从点 $曾_0$ 的 δ 邻域中除去点 $曾_0$ 本身所得的集合叫做点 $曾_0$ 的去心邻域, 记为 $毅(曾_0, \delta)$ 援

二、函数的概念

研究各种自然现象或技术过程时, 所需处理的变量往往不止一个, 而且各个变量的变化也不是孤立的, 而是相互联系的 援 量

之间的相互联系大量地表现为函数关系援

函数概念

定义员 设在某变化过程中有两个变量 曾与 赠砸是一个实数集 如果对于变量 曾在数集 砸中所取的每一个值,按照一定的对应法则 枣变量 赠都有确定的值与之对应,则称 枣是定义在实数集 砸上的函数 援为

$赠 = z(x), x \in R$

并称变量 曾为自变量,变量 赠为函数(或称因变量),数集 砸表示自变量 曾的取值范围,称为函数的定义域 援

依定义要求,如果对于 砸中的每一个 曾值,变量 赠只有一个值与之对应,这种函数我们称之为单值函数 援但有时对于 砸中的一个确定的 曾值,却可能有多个 赠值与之对应,我们称这种函数为多值函数 援如:设 砸是区间 $(0, +\infty)$,变量 曾,赠按关系式:

$曾 = z^2, z \in R$

确定 赠是 曾的函数,则对于区间 $(0, +\infty)$ 内每一个值 曾,变量 赠有两个值: $z = \sqrt{曾}$ 与 $z = -\sqrt{曾}$ 与之对应 援我们说关系式 $曾 = z^2$ 确定了定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的多值函数 $z = \pm\sqrt{曾}$ 援今后如无特别声明,本书只讨论单值函数,在确需研究多值函数时,往往指定变量 赠的一个取值范围使它成为单值函数 援如上例中,如果限制 赠的取值范围为 $(0, +\infty)$,则 $曾 = z^2, z \in (0, +\infty)$ 只确定一个单值函数 $z = \sqrt{曾}$;而如果限制 赠的取值范围为 $(-\infty, 0]$,则 $曾 = z^2, z \in (0, +\infty)$ 也只确定一个单值函数 $z = -\sqrt{曾}$ 援

对函数概念要着重掌握两个要素,即函数的定义域与两个变量间的对应法则 援

例员 下列各题中,枣(曾)和 早(曾)是否表示同一函数,为什么?

(员) 枣(曾)越曾, 早(曾)越 $\sqrt{\text{曾}}$

(圆) 枣(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{早}}$, 早(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{枣}}$

(猿) 枣(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{早}}$ 早(曾)越 $\sqrt{\frac{\text{曾}}{\text{早}}}$

解 (员) 因 早(曾)越 $\sqrt{\text{曾}}$ 越 $\frac{\text{曾}}{\text{枣}}$ 当 曾约远时, 枣(曾)≠早(曾), 对应法则不同, 所以它们不表示同一函数援

(圆) 因 枣(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{早}}$ 的定义域是 (原肄, 园)∪ (园, 垣肄), 而 早(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{枣}}$ 的定义域是 (园, 垣肄), 所以它们不表示同一函数援

(猿) 枣(曾)越 $\frac{\text{曾}}{\text{早}}$ 与 早(曾)越 $\sqrt{\frac{\text{曾}}{\text{早}}}$ 的定义域都是 (原肄, 垣肄), 且对应法则相同, 所以它们表示同一函数援

圆函数的定义域

在函数定义中, 自变量的取值范围叫做函数的定义域援反映实际问题的函数关系中自变量具有非常具体的实际意义, 这种函数的定义域应由自变量所表示的实际意义来确定援例如圆面积 粤与圆半径 则的关系为 粤越 $\frac{\text{则}^2}{\text{早}}$ 按实际意义, 则的取值范围为 (园, 垣肄); 又如自由落体运动的路程 杂与时间 贼的关系为 杂越 $\frac{\text{员}}{\text{圆}}\text{贼}^2$, 贼的取值范围为 [园, 贼], 这里的 贼是物体落到地面所需的时间, 如物体从高 匀处自由下落, 则 贼越 $\sqrt{\frac{\text{匀}}{\text{早}}}$; 再如抛物线 赠越 $\frac{\text{曾}^2}{\text{早}}$ 上点 酝(曾, 赠)的纵坐标与横坐标的关系为 赠越 $\frac{\text{曾}^2}{\text{早}}$, 这里的 曾可取一切实数援

对于无需考究 曾 赠的实际意义, 而用数学运算式来表示的函数, 函数的定义域是指能使该算式在实数范围内有意义的全体自变量的值的集合, 确定这种函数定义域时, 必须依据如下基本规定:

(员) 分式的分母不能等于 园;

- (圆) 负数不能开偶次方；
 (猿) 零和负数不能取对数；
 (原) 正弦、余弦的绝对值不超过 员；
 (缘) 无意义援

例 圆 确定函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \ln \frac{x+1}{x-1}$ 的定义域援

解 由 $x^2 - 1 > 0$ 解得 $x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ；又由 $\frac{x+1}{x-1} > 0$ 解得 $x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ，故所求定义域为

$$x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$$

用区间表示为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 援

例 猿 用区间表示函数的定义域援

$$z = \sqrt{\ln \frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{x+1}{x-1}}$$

解 依基本规定 (圆) 知 $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$ 解得 $x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ；

依基本规定 (猿) 知 $\frac{x+1}{x-1} > 0$ 解得 $x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$ ；

依基本规定 (员) 知 $\frac{x+1}{x-1} \neq 1$ 解得 $x \in \{x \mid x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2\}$ 援

故所求定义域为

$x \in \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 1\} \cap \{x \mid x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 2\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 援

用区间表示为

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

函数值及函数记号

函数概念的核心是变量 x 与变量 y 之间的对应法则，表示这种对应关系的方法是多种多样的，对于具体函数的表示方法，通常