

成人高等教育系列教材
Chengrengao dengjiaoyuxiliejiancai

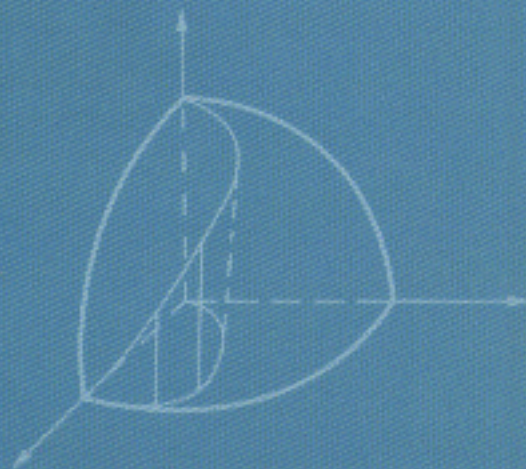
高等数学

[下册]

GaoDengShuXue

GAODENGSHUXUE

主编 陈凤平 副主编 洪潮兴 吴满



华南理工大学出版社

成人高等教育系列教材

高等数学

(下 册)

主 编 陈凤平

副主编 洪潮兴 吴 满

华南理工大学出版社
·广州·

目 录

第六章 微分方程.....	(vi)
第一节 微分方程的基本概念.....	(vi)
习题 2.1.....	(vii)
第二节 可分离变量的一阶微分方程.....	(viii)
习题 2.2.....	(viii)
第三节 一阶线性微分方程	(ix)
习题 2.3.....	(ix)
第四节 可降阶的高阶微分方程	(x)
一、形如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的微分方程	(xi)
二、形如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的微分方程	(xi)
三、形如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的微分方程	(xi)
习题 2.4.....	(xi)
第五节 二阶线性微分方程解的结构	(xii)
一、二阶线性齐次微分方程解的结构	(xii)
二、二阶线性非齐次微分方程解的结构.....	(xii)
习题 2.5.....	(xii)
第六节 二阶常系数线性齐次微分方程	(xiii)
习题 2.6.....	(xiii)
第七节 二阶常系数线性非齐次微分方程	(xiii)
一、 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 型	(xiii)
二、 $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 型	(xiii)
习题 2.7.....	(xiii)

第七章 空间解析几何	(原D)
第一节 空间直角坐标系	(原D)
一、空间直角坐标系	(原D)
二、点的空间直角坐标	(原D)
习题 巩固	(缘D)
第二节 空间解析几何的基本问题	(缘D)
一、空间两点的距离	(缘D)
二、空间有向线段	(缘D)
三、空间两直线的夹角	(缘D)
四、两直线垂直与平行的条件	(缘D)
习题 巩固	(缘D)
第三节 空间的平面与直线	(远D)
一、空间平面及其方程	(远D)
二、空间直线及其方程	(远D)
三、空间直线与平面间的相互关系	(远D)
习题 巩固	(远D)
第四节 曲面及其方程	(远D)
一、曲面方程的概念	(远D)
二、球面	(远D)
三、旋转曲面	(远D)
四、柱面	(远D)
习题 巩固	(远D)
第五节 空间曲线及其方程	(远D)
一、空间曲线的一般方程	(远D)
二、空间曲线的参数方程	(远D)
三、空间曲线在坐标平面上的投影	(远D)
习题 巩固	(远D)
第六节 二次曲面	(远D)
圆	

一、椭球面	(289)
二、单叶双曲面	(290)
三、双叶双曲面	(291)
四、椭圆抛物面	(292)
习题 285	(292)

第八章 多元函数微分学

第一节 多元函数的概念

一、引例	(293)
二、二元函数定义	(293)
三、二元函数的定义域	(294)
四、二元函数的几何意义	(295)

习题 293

第二节 二元函数的极限与连续性

一、二元函数的极限	(296)
二、二元函数的连续性	(296)

习题 296

第三节 偏导数

一、偏导数的定义及其计算方法	(297)
二、二元函数偏导数的几何意义	(297)
三、高阶偏导数	(298)

习题 298

第四节 全微分

习题 299

第五节 多元复合函数微分法

一、复合函数求导的链式法则	(299)
二、全微分形式不变性	(300)

习题 300

第六节 隐函数微分法.....	(152)
一、由方程 $z = z(x, y)$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的 导数公式	(152)
二、由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导数公式	(152)
习题 6.....	(152)
第七节 多元函数的极值.....	(153)
一、二元函数的极值	(153)
二、二元函数的最大值与最小值.....	(153)
三、条件极值	(153)
习题 7.....	(153)
第九章 重积分.....	(154)
第一节 二重积分的概念与性质.....	(154)
一、二重积分的概念	(154)
二、二重积分的性质	(154)
习题 9.....	(154)
第二节 二重积分在直角坐标下的计算.....	(154)
习题 9.....	(154)
第三节 利用极坐标计算二重积分.....	(154)
习题 9.....	(154)
第四节 二重积分的应用.....	(154)
一、平面薄片的质量	(154)
二、平面薄片对坐标轴的力矩	(154)
三、平面薄片的重心	(154)
四、柱体的体积.....	(154)
习题 9.....	(154)
第五节 三重积分.....	(154)

一、三重积分的概念	(178)
二、三重积分在直角坐标下的计算	(178)
三、利用柱面坐标计算三重积分	(179)
习题 178	(179)
第十章 无穷级数	(180)
第一节 常数项级数的概念与性质	(180)
一、级数的基本概念	(180)
二、级数的基本性质	(180)
三、级数收敛的必要条件	(180)
习题 180	(180)
第二节 数项级数的审敛法	(181)
一、正项级数及其审敛法	(181)
二、交错级数及其审敛法	(181)
三、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	(181)
习题 181	(181)
第三节 幂级数	(181)
一、函数项级数的一般概念	(181)
二、幂级数及其收敛性	(181)
三、幂级数的运算	(181)
习题 181	(181)
第四节 把函数展开为幂级数	(181)
一、泰勒中值公式	(181)
二、泰勒级数	(181)
三、把函数展开成幂级数	(181)
习题 181	(181)
附 员 向量的基本运算	(181)
一、向量的概念	(181)

二、向量加减法	(圆圆)
三、数与向量的乘积	(圆圆)
四、向量在轴上的投影	(圆圆)
五、向量的坐标表示	(圆圆)
六、向量的模与方向余弦	(圆圆)
七、两向量的数量积	(圆圆)
八、两向量的向量积	(圆圆)
附圆 习题答案	(圆圆)

第六章 微分方程

微积分研究的对象是变量之间的函数关系,因此,寻求函数关系是数学的一个重要课题.但在许多问题中,往往不能直接找出所需的函数,却比较容易地找出含有待求函数及其导数的关系式.这样的关系式就是所谓的微分方程.通过对微分方程的研究,可以求得未知的函数.本章主要介绍微分方程的一些基本概念以及几类常见微分方程的解法.

第一节 微分方程的基本概念

先看两个实例.

例 1 一条平面曲线通过点 $(1, 0)$, 且曲线上任一点 $P(x, y)$ 处的切线的斜率为 $2xy$. 求这曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y = y(x)$. 根据导数的几何意义, 应有

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (1)$$

此外, 据题意还应满足下列条件:

当 $\mu > 1$ 时, 圆 (1.10)

(1.10)

方程 (1.10) 可写成 $\frac{dy}{dx} = \mu y^2$, 对方程两边积分得

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \mu dx$$

即

$$\frac{1}{y} = \mu x + C$$

(1.11)

其中 C 为任意常数

把条件 (1.10) 代入 (1.11) 式得 $\frac{1}{\mu y} = \mu x + C$, 由此定出 $C = \frac{1}{\mu y_0}$, 再把 C 代入 (1.11) 式, 可得所求曲线方程为

$$\frac{1}{y} = \mu x + \frac{1}{y_0}$$

(1.12)

这是过定点 $(0, y_0)$ 的一条抛物线 (图 1.12) 可看做是由曲线 (1.12) 沿 y 轴上、下平移而得出的一族抛物线

例 1 把一物体垂直上抛, 开始时物体与地面的距离为 h (图 1.13), 初速度为 v_0 , 且设物体的运动只受重力作用, 试求该物体的运动方程

解 选择坐标轴垂直向上为正且坐标原点在地面上 (图 1.13) 物体运动经过时间为 t 与地面的距离为 s 根据牛顿运动定律有

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg$$

其中 m 为物体的质量, F 为物体所受的力

因物体只受重力作用, 所以 $F = -mg$ (其中

g 为重力加速度, 取负号是因为重力的方向与所选坐标轴的正方向相反), 因此得

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g$$

即

$$\frac{ds}{dt} = -gt + v_0$$

(1.13)

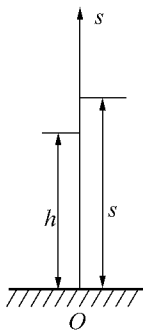


图 1.13

此外,据题意还应满足两个条件:

$$\begin{cases} \text{泽} > \text{澡} \\ \text{凿} > \text{增} \end{cases} \quad (2.107)$$

把方程 (2.106) 两边积分,得

$$\frac{\text{凿}}{\text{凿}} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}} \quad (2.108)$$

再对 (2.108) 式两边积分,得

$$\text{泽} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}} \quad (2.109)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

把条件 $\frac{\text{凿}}{\text{凿}} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}}$ 和 $\text{泽} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}}$ 分别代入 (2.108) 式和 (2.109) 式得 $\frac{\text{凿}}{\text{凿}} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}}$ 和 $\frac{\text{凿}}{\text{凿}} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}}$

再把 $\frac{\text{凿}}{\text{凿}}$ 和 $\frac{\text{澡}}{\text{澡}}$ 的值代回 (2.109) 式,得

$$\text{泽} > \frac{\text{澡}}{\text{澡}} \quad (2.110)$$

这就是物体的运动方程

上面两个例子中的方程 (2.106) 和 (2.107) 都含有未知函数的导数,它们都是微分方程

一般地,把含有未知函数、未知函数的导数 (或微分) 以及自变量的方程,称为微分方程

必须指出:在微分方程中,自变量或未知函数有时可以不出现,但必定应含有未知函数的导数 (或微分)

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶。例如方程 (2.106) 是一阶微分方程,方程 (2.107) 是二阶微分方程

如果把函数以及它的各阶导数代入微分方程,能使方程成为

恒等式, 这函数就称为微分方程的解. 例如, 函数 $y = C_1 e^x$ 和 $y = C_2 e^x$ 都是微分方程 $y' = y$ 的解.

如果微分方程的解中含有任意常数且任意常数的个数正好与微分方程的阶数相同, 这样的解称为微分方程的通解. $y = C_1 e^x$ 是方程 $y' = y$ 的通解, $y = C_2 e^x$ 是方程 $y' = y$ 的通解.

应该指出: 微分方程通解中的各任意常数必须是彼此独立的, 例如

$$y = C_1 e^x + C_2 e^x$$

$$y = C_1 e^x + \frac{C_2}{e^x}$$

$$y = \left(C_1 + \frac{C_2}{e^x} \right) e^x$$

其中 $\frac{C_2}{e^x}$ 可以合并写成一个任意常数 C_2 , 故此函数只含有一个任意常数, 而不能说它含有两个任意常数.

在微分方程的通解中, 按一定的条件确定出任意常数的特定值, 从而得到不含任意常数的解, 称之为微分方程的特解. 如 $y = e^x$ 是方程 $y' = y$ 的特解, $y = e^{2x}$ 是方程 $y' = 2y$ 的特解.

从特解的定义可知, 微分方程的特解必含在通解之内. 不包含在微分方程通解之内的解称为奇解, 本书将不考虑微分方程的奇解, 且在例题与习题中, 若没指明要求特解的, 均指求通解.

正如在例 1 和例 2 见到的那样, 微分方程的特解是按一定条件由通解确定出任意常数后而得到的. 如例 1 中的 $y = e^x$ 与例 2 中的 $y = e^{2x}$ 就是用来确定特解的条件. 这种条件用以表明曲线经过的特定点或表明物体运动的初始状态, 习惯上叫做初始条件. 一般地说, 当自变量取某值时, 规定未知函数及其导数应取给定值的条件, 叫做初始条件. 如果微分方程是二阶的, 则初始条件为当 $x = x_0$ 时, $y = y_0, y' = y'_0$, 写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{越增,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \text{越增}$$

其中 y, x, z 都是给定的值援

例猿 验证下列所给函数是微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 的解, 并指出哪个是通解, 哪个是特解?

(员) $y = Cx^2$;

(圆) $y = Cx^2 + C_1$;

(猿) $y = Cx^2 + C_1x$;

(其中 C, C_1 为任意常数)援

解 (员) 由 $y = Cx^2$ 可求得

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

将 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 代入方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 有

$$2Cx = \frac{Cx^2}{x}$$

方程成为恒等式, 故 $y = Cx^2$ 为所给微分方程的解, 又因它不含任意常数, 所以是特解援

(圆) 由 $y = Cx^2 + C_1$ 可求得

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

将 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 代入 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 有

$$2Cx = \frac{Cx^2 + C_1}{x}$$

方程成为恒等式, 所以 $y = Cx^2 + C_1$ 是所给微分方程的解, 且它所含任意常数的个数与微分方程的阶数都为 圆, 因此 $y = Cx^2 + C_1$ 是所给微分方程的通解援

(猿) 由 $y = Cx^2 + C_1x$ 可求得

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx + C_1$$

将 y 及 $\frac{dy}{dx}$ 代入 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 有

$$2Cx + C_1 = \frac{Cx^2 + C_1x}{x}$$

方程成为恒等式, 因此 $y = Cx^2 + C_1x$ 是所给微分方程的解, 因 y 中只含一个任意常数, 而微分方程的阶数为 圆, 故它不是通解, 也不是特解, 只能说 $y = Cx^2 + C_1x$ 是微分方程的解援

例源 验证由方程 $y = Cx^2$ 所确定的隐函数是微分方程 $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ 的解

证 把方程 $y = Cx^2$ 两边对 x 求导, 得

$$y' = \frac{2Cx}{1} \quad \text{即} \quad y' = \frac{2y}{x}$$

上式两边再对 x 求导, 得

$$y'' = \frac{2y'x - 2y}{x^2}$$

整理可得

$$(x^2 - y^2)y'' - 2xy' = 2xy$$

此即为所给的微分方程, 因而由方程 $y = Cx^2$ 所确定的隐函数满足所给的方程, 于是得证

此例说明微分方程的解也可用隐函数的形式给出

例缘 求曲线族 $y = Cx^2 + C^2$ (其中 C 是任意常数) 所满足的微分方程

解 由 $y = Cx^2 + C^2$ 可求得 $y' = 2Cx + 2C$ 并由两式消去 C 可知 $y' - 2x = \frac{y - Cx^2}{x^2}$ 即为曲线族所满足的微分方程

习题 远员

远指出下列各微分方程的阶:

(员) $(y')^2 + y = x$

(圆) $y'' + y' + y = x^2$

(猿) $y'' + y' + y = x^2 + x$

(源) $y'' + y' + y = x^2 + x + C$

远验证下列各函数是否为对应微分方程的解? 并指出是特解, 还是通解?

函数

微分方程

(员) $y = Cx^2$

$(x^2 - y^2)y' = 2xy$

(圆) 赠越原曾

赠原赠越园

(猿) 赠越槽曾垣槽曾

赠原赠越园

(源) 赠越原曾垣袁

赠垣袁赠越园

(缘) 赠越曾

赠原赠垣赠越园

(远) 原赠垣原曾越槽

$$\frac{\text{曾}}{\text{曾}} \text{越原}$$

猿 求微分方程 $\frac{\text{曾}}{\text{曾}}$ 越曾的通解, 以及满足初始条件 赠 越员

的特解, 并画出这特解的图形 援

源 写出由下列条件所确定的曲线应满足的微分方程 援

(员) 曲线在任意点 酝 (曾, 赠) 处的切线斜率等于该点横坐标与纵坐标的乘积;

(圆) 曲线上任意点 酝 (曾, 赠) 处的切线与线段 音酝 垂直;

(猿) 曲线上任意点 酝 (曾, 赠) 处的切线与点 酝 和原点的连线, 以及横坐标轴所围成的三角形面积为常数 葬 援

缘 潜水艇垂直下沉时所遇到的阻力和下沉的速度成正比, 如果潜水艇的质量为 皂, 并且是在水面由静止开始下沉, 求下沉的速度所应满足的微分方程和初始条件 援

第二节 可分离变量的一阶微分方程

如果一阶微分方程能表达成

$$\frac{\text{曾}}{\text{曾}} \text{越枣(曾)早(赠)} \quad (\text{远})$$

则称为可分离变量的一阶微分方程 援它的特点是: 未知函数的导数

可以用关于自变量的函数与关于未知函数的函数以乘积的形式来表示

当 $x \neq 0$ 时, 方程 (1) 可变形为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

即把未知函数 (及其微分) 与自变量 (及其微分) “分离”于方程的两边, 将此式两边积分, 有 $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, 积分后便可得微分方程的通解

在 $x > 0$ 时, 若它有根 $y = Cx$ 则 $y = Cx$ 必满足微分方程, 所以它也是微分方程的解, 这个解若是特解, 它必含于通解之内, 若它不是特解我们不予讨论, 因此, 以后在解题时, 就当作 $x \neq 0$ 来进行就可以了

例 1 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ 的解

解 当 $x \neq 0$ 时, 将方程分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

两边积分得

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1$$

故

$$|y| = e^{\ln|x| + C_1} = e^{\ln|x|} \cdot e^{C_1} = |x| \cdot e^{C_1}$$

即

$$y = \pm e^{C_1} x$$

因 e^{C_1} 仍为任意常数, 把它记作 C ($C \neq 0$), 便得到

$$y = Cx$$

此外, $x = 0$ 显然也是微分方程的解, 若在上面通解中补充 $C = 0$ 可取

零值,就得到这个解.因此,微分方程的通解可写为 $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$ (C_1, C_2 为任意常数)。

上述解法是严格的,过程的每一步书写严密,结论准确。但在解题过程中,时常采用下列简化的表达方法,且得出的结果同样是正确的。

解 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = \frac{a}{b} dx$$

两边积分得

$$\ln y = \frac{a}{b} x + C_1$$

从而得

$$y = C_2 e^{\frac{a}{b} x}$$

故原方程的通解为 $y = C_1 e^{\frac{a}{b} x} + C_2 e^{-\frac{a}{b} x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数。

今后我们常常使用这一写法,把 $\ln y = \frac{a}{b} x + C_1$ 写成 $y = C_2 e^{\frac{a}{b} x}$ 而不再采用前面严密的书写格式,也不再一一加以说明。

例 圆 解微分方程 $(x^2 - y^2) dx + 2xy dy = 0$

解 原方程可改写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

分离变量

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} dy$$

两边积分,可得

$$\ln x = \frac{1}{2} \ln y^2 - \frac{1}{2} \ln x^2 + C_1$$

化简得

$$\ln \frac{x^2}{y^2} = C_1$$

这就是微分方程的通解。

在例 圆中我们还可以看到:当积分后结果出现 $\ln \frac{x^2}{y^2} = C_1$ 或