高等学校教材

高 等 数 学

下　　册

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社

内容简介

本书分上、下两册出版。上册主要内容包括函数、极限、函数的连续性，一元函数微分学及其应用，一元函数积分学及其应用；下册主要内容包括向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分及其应用，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程。

本书注重数学概念的几何直观表述，图文并茂，叙述详尽，说理透彻，通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广，具有代表性。

本书可作为高等工科院校理工科各专业本科生教材，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下册/南京理工大学应用数学系编．—北京：高等教育出版社，2004.11
ISBN 7－04－015483－8

Ⅰ．高...　Ⅱ．南...　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 103566 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	24.5	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	250 000	定　　价	26.40 元

物料号：15483－00

策划编辑　王　瑜
责任编辑　李　陶
封面设计　刘晓翔
责任绘图　杜晓丹
版式设计　马静如
责任校对　王　雨
责任印制

前　　言

本书是为适应 21 世纪数学教学的需要,按照教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容课程体系改革计划”的精神,在南京理工大学 1997 年出版使用的《高等数学教程》的基础上修订而成的。本书凝结了编者多年教学实践经验和体会,同时吸收了国内外现行的有特色教材的优点。

本书强调将基础知识的学习、数学思想方法的学习以及数学素质的培养融为一体。注重数学概念的几何直观表述,图文并茂,叙述详尽,说理透彻,通俗易懂。书中所选例题、习题覆盖面广,具有代表性。每节均配有习题,书末附有习题答案。凡超过“高等数学课程教学基本要求”的内容都用 * 标明。

本书分上、下两册出版。上册主要内容是函数、极限、函数的连续性,一元函数微分学及其应用,一元函数积分学及其应用;下册内容有向量代数与空间解析几何,多元函数微分法及其应用,重积分及其应用,曲线积分与曲面积分,无穷级数,微分方程。

本书共分十二章。全书由杨孝平教授主持修订和审阅,参加修订工作的有许春根(第一章),王为群(第二、三章),尹群(第四、五、六章),吴新民(第七、八章),刘德钦(第九、十章),俞军(第十一、十二章),陆毓琪教授也审阅了全书的书稿。感谢南京理工大学应用数学系的教师,他们对本书的编写提出了宝贵的意见和建议,提高了本书的质量。本书的出版得到了南京理工大学教务处的关心和资助,得到了高等教育出版社王瑜和李陶编辑的大力支持,在此谨向他们致以谢意。

由于编者水平有限,书中错误与不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

编　者

2004 年 7 月

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

向量这个数学工具广泛应用于工程技术之中. 本章先介绍向量的概念及其运算,然后叙述空间曲面与空间曲线的部分内容,最后以向量为工具来讨论空间的平面与直线.

第一节　向量的概念及其线性运算

一、向量的概念

通常我们遇到的物理量有两种,一种是数量(或标量),它们是仅有大小的量,如温度、功、时间、质量等等;另一种是向量(或矢量),它们是既有大小又有方向的量,如力、速度、加速度、电场强度等等.

我们知道,向量在几何上通常用有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点,以 B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 为简便起见,有时用一个上面加箭头的小写字母表示向量,如向量 $\vec{a}$. 在书刊印刷时也用黑斜体字母而省去箭头表示,如向量 $\boldsymbol{a}$.

向量的大小称为向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量; 模为零的向量叫做零向量, 记作 $\mathbf{0}$, 其方向可看作是任意的.

在几何和物理学的许多问题中,经常涉及一些向量与起点无关的问题,我们把凡经过平移能够完全重合的向量都认为是相等的,这种向量称为自由向量. 可见自由向量的起点可以放在空间任何位置上. 今后若不加声明,本书所涉及的向量均指自由向量.

由于我们只讨论自由向量,所以若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 模相等,又互相平行(即在同一条直线上或在平行直线上),且指向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的. 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，我们来定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.

定义 1　若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中模大的向量方向一致.

定义 2　以一定点为始点作不在同一直线上的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，再以这两个向量为邻边作平行四边形，从定点到这个平行四边形对角的顶点所构成的向量，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7.1 所示.

通常我们把这种用平行四边形的对角线向量来确定两个向量和的方法，称为向量加法的平行四边形法则.

由于平行四边形的对边平行且相等，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和还可以这样作出：以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为始点作向量 $\boldsymbol{b}$，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点至 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 7.2 所示. 这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则.

向量加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

交换律可直接由向量加法的平行四边形法则得到. 结合律根据向量加法的三角形法则得到，如图 7.3 所示.

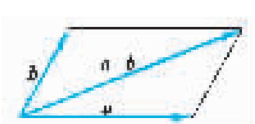
图 7.1

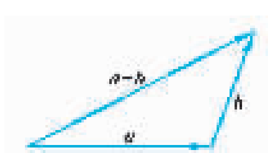
图 7.2

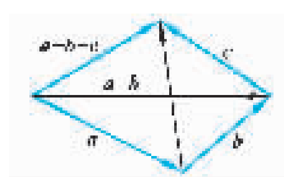
图 7.3

根据向量加法的交换律与结合律可得出多个向量相加的法则——首尾相接法. 即使前一个向量的终点作为次一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_n$，再以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点作一个向量，这个向量就是向量 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_n$ 的和向量

$$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_n.$$

定义 3　若一个向量与向量 $\boldsymbol{b}$ 之和等于向量 $\boldsymbol{a}$，则这个向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由该定义可知，从一个始点作出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，则从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点所作的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 7.4 所示.

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量（或相反向量），记为 $-\boldsymbol{a}$. 故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，从而有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$. 这样，向量的减法也有相应的平行四边形法则和三角形法则，如图 7.4 和 7.5 所示.

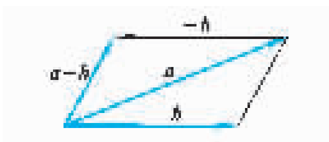

图 7.4

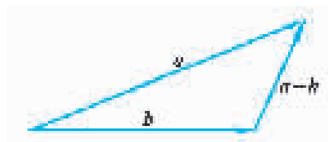

图 7.5

2. 数与向量的乘法

根据向量加法的定义，把 n 个相同的向量相加可得向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\cdots+\boldsymbol{a}$，它是一个模为 $n|\boldsymbol{a}|$ 且方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同的向量，记为 $n\boldsymbol{a}$，这实际上就是数与向量的乘法.

定义 4　设 λ 为实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是个向量，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模和方向规定如下：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 方向一致，模等于 $|\boldsymbol{a}|$ 的 λ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量，方向可任意.

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 反向，模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍，即 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

数与向量乘法满足下列运算规律：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

其中 λ,μ 为实数.

以上运算规律，利用向量加法及平面几何知识容易得到证明. 例如对于运算规律(3)，由向量加法及相似三角形对应边成比例这个性质即可得到证明，如图 7.6所示.

设 $\boldsymbol{e}_a$ 是与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，那么根据数与向量的乘法可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \quad \text{或} \quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}$$

向量的加减法及数与向量的乘法总称为向量的线性运算.

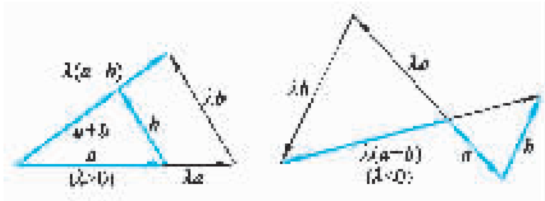

图 7.6

例 1 证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且等于第三边的一半.

证 设三角形 ABC 中，E，F 分别为 AC 与 BC 的中点，如图 7.7 所示. 故 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. 根据向量减法的三角形法则可得

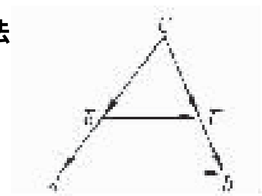

图 7.7

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

即证得了 $\overrightarrow{EF}\parallel\overrightarrow{AB}$，且 $|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

例 2 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量，且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，证明：$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线（即平行或在同一条直线上）的充要条件是存在常数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证 必要性 (1) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，取 $\lambda=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\geqslant 0$，则

$$|\lambda\boldsymbol{b}|=\lambda|\boldsymbol{b}|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|，\text{即 } \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，取 $\lambda=-\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\leqslant 0$，则

$$|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|，\text{即 } \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

充分性 由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

例 3 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为不平行的两个非零向量，证明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所确定的平面内任一个向量均可唯一地表示成 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$.

证 设 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定的平面内的任一向量，过同一始点 O 作出向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，这三个向量的终点在同一平面内，过 $\boldsymbol{c}$ 的终点作直线分别与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行，且交 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线于点 A 和 B，如图 7.8 所示，则

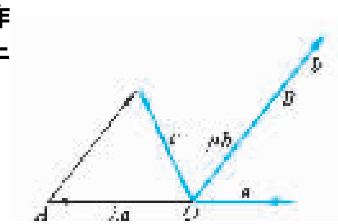

图 7.8

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

设 $\boldsymbol{c}$ 有两种表示方法，

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda'\boldsymbol{a}+\mu'\boldsymbol{b},$$

移项得 $(\lambda-\lambda')\boldsymbol{a}=(\mu'-\mu)\boldsymbol{b}$.

若 $\lambda-\lambda'\neq 0$，可得 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mu'-\mu}{\lambda-\lambda'}\boldsymbol{b}$，由数与向量乘法定义可知，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，这与题设矛盾. 故必有

$$\mu=\mu',\qquad \lambda=\lambda'.$$

习 题 7.1

1. 试举例说明：什么是数量？什么是向量？

2. 什么叫单位向量？什么叫零向量？什么叫向量的模？

3. 如果把空间的一切单位向量的始点都平移在同一点，问它们的终点构成什么图形？

4. 回答下列问题：

(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点相同，且当向量 $\boldsymbol{a}$ 旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 时恰与向量 $\boldsymbol{b}$ 重合，问 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 吗？为什么？

(2) 已知二个单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 与 $\boldsymbol{b}^\circ$，问 $\boldsymbol{a}^\circ+\boldsymbol{b}^\circ$ 是单位向量吗？为什么？$\boldsymbol{a}^\circ=\boldsymbol{b}^\circ$ 吗？为什么？

(3) 从 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是否可以得出 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$？反过来从 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是否可以得出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$？为什么？

(4) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，能否构成三角形？向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 能否构成三角形？若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，它们能否构成三角形？

5. 已知平行四边形两条对角线向量为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，求这平行四边形四条边上的向量.

6. 用向量证明对角线互相平分的四边形为平行四边形.

7. 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别满足什么条件时，下列各式才成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$； (6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(7) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$； (8) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

8. 设 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为 60°，试求：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$； (2) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角；

(4) $|4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$； (5) $4\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角.

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 不共面. 问 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是否共线？$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是否共线？

第二节　向量的坐标表示

直角坐标系的建立是划时代的，它建立了空间图形与数的对应关系.

一、空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的推广. 我们过空间一定点 O（叫原点），作三条互相垂直的数轴，分别叫 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 通常把 x 轴、y 轴放在水平面上，而 z 轴是铅垂的；一般三个坐标轴具有相同的长度单位. 每两个坐标轴所决定的平面叫坐标面. 由 x 轴、y 轴所决定的平面叫 xOy 坐标面，y 轴、z 轴所决定的平面叫 yOz 坐标面，x 轴、z 轴所决定的平面叫 xOz 坐标面. 由 x 轴，y 轴，z 轴组成的坐标系叫空间直角坐标系 $Oxyz$.

通常我们采用右手系，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 7.9 所示.

三个互相垂直的坐标面，把整个空间分成八个部分，每一个部分叫卦限. 在 xOy 面的上方，yOz 面的前方，xOz 面的右方一部分叫第一卦限. 在 xOy 上方，按逆时针方向去数，其余三个部分依次叫第二卦限、第三卦限、第四卦限. 第一，第二，第三，第四卦限对应的 xOy 平面下方四个部分依次叫第五，第六，第七，第八卦限.

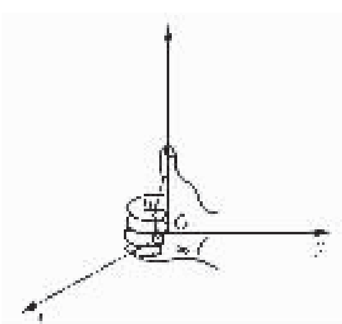

图 7.9

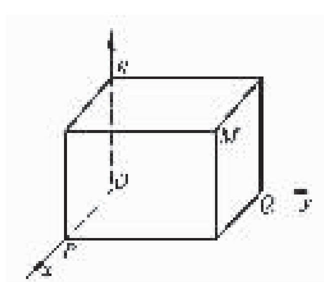

图 7.10

设 M 为空间任意一个已知点，过 M 分别作平面与 x 轴、y 轴、z 轴垂直，与坐标轴交点分别为 P、Q、R，如图 7.10 所示.

坐标轴上相应于点 P、Q、R 的实数 x、y、z 称为点 M 的坐标. 记为 $M(x, y, z)$，可见空间每一点均有一组有序实数组 (x, y, z) 与之对应.

反过来，已知一组有序实数组 (x, y, z)，则在 x 轴、y 轴、z 轴上分别找到坐

标为 x 的点 P，坐标为 y 的点 Q 以及坐标为 z 的点 R，然后过点 P,Q,R 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M，就是由这三个有序的实数组 (x,y,z) 所确定的点. 这样就建立了空间点与三个有序实数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系. 称 (x, y, z) 为点 M 的坐标，而数 x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 特别当点 M 在 xOy 面上时，则点 M 的坐标为 $(x,y,0)$ 或竖坐标 $z=0$，同样，当点在 xOz 面上时，有 $y=0$；点 M 在 yOz 面上时，有 $x=0$. 又当点 M 在 x 轴上时，有 $y=z=0$；同样 y 轴、z 轴上的点分别有 $x=z=0$，$x=y=0$；当点 M 在坐标原点时，有 $x=y=z=0$.

例 1　画出点 $M(-1,2,3)$.

解　建立空间直角坐标系 $Oxyz$，先在 x 轴上取 -1 个单位；然后沿平行于 y 轴方向取 2 个单位；最后沿 z 轴方向取 3 个单位即为 M 点，如图 7.11 所示.

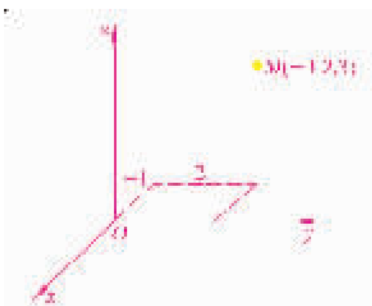

图 7.11

二、向量在轴上的投影及投影定理

1. 两个向量的夹角

设有非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点均移置于同一点 O，如图 7.12 所示. 在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 决定的平面内，把其中一个向量绕 O 点旋转，使两个向量的正方向重合时，所转过的角度称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，且规定 $0 \leqslant (\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \leqslant \pi$. 特别当 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 时，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 其一为 $\boldsymbol{0}$ 时，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 可在 0 与 π 之间任意取值.

2. 向量在轴上的投影

设给定单位向量 $\boldsymbol{e}$ 及其确定的轴 L（规定了方向和长度单位的直线称为轴）（图 7.13），任给向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}$，分别过点 A 与 B 作与 L 轴垂直的平面交 L 轴于

点 A' 与 B'（分别称 A' 与 B' 为点 A 与 B 在轴 L 上的投影），向量$\overrightarrow{A'B'}$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 L 轴上的分向量，由于 $\overrightarrow{A'B'} \parallel \boldsymbol{e}$，因此存在唯一的数 λ，使得 $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \boldsymbol{e}$，称数 λ 为向量在轴 L 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_L \boldsymbol{r}$.

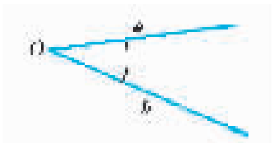

图 7.12

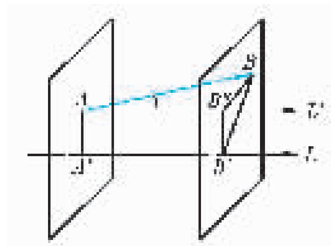

图 7.13

3. 投影定理

定理 1　设向量$\overrightarrow{AB}$与轴 L 的夹角为 θ，则

$$\mathrm{Prj}_L \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta.$$

证　设向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 L 上的投影为 $A'B'$ 如图 7.13 所示. 过点 A 作轴 $L' \parallel L$，且指向相同，显然向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 L' 的夹角也是 θ，且有

$$\mathrm{Prj}_{L'} \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_L \overrightarrow{AB}.$$

又因为 $\mathrm{Prj}_{L'} \overrightarrow{AB} = AB'' = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$

所以
$$\mathrm{Prj}_L \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta.$$
■

说明 1：当 $\overrightarrow{AB} \neq 0$ 时，$\mathrm{Prj}_L \overrightarrow{AB}$ 可正，可负也可为零.

事实上，设 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 L 夹角为 θ，且 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$，则

$$\mathrm{Prj}_L \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\theta \begin{cases} > 0 & \text{当 } 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ = 0 & \text{当 } \theta = \dfrac{\pi}{2}, \\ < 0 & \text{当 } \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

说明 2：相等向量在同一轴上的投影相同（请读者自己证明）.

定理 2　设给定向量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 及轴 L，则

$$\mathrm{Prj}_L(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = \mathrm{Prj}_L \boldsymbol{A}_1 + \mathrm{Prj}_L \boldsymbol{A}_2.$$