普通高等教育“十五”国家级规划教材
(高职高专教育)

高等数学

上　册

第二版

同济大学　天津大学
浙江大学　重庆大学　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材,是根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲(非师范类)》,在第一版基础上修订的。全书分上、下两册,本书为上册,是一元函数微积分部分,包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用等6章,书末附有初等数学中的常用公式,几种常用的平面曲线方程及其图形、习题答案与提示等。

本书将教材与辅导融为一体,一书两用。每章末设"学习指导"。例题、习题丰富,重点内容滚动复习,便于自学。适当拓宽知识面,扩大了适应性,可为继续深造学习"专升本"打下基础。

本书主要适用于工科类高职高专各专业,也可供经管类专业使用,还可作为"专升本"及学历文凭考试的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册　同济大学等编.—2版.—北京:
高等教育出版社,2004.5
ISBN 7-04-014706-8

Ⅰ.高…　Ⅱ.同…　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第029337号

策划编辑　蒋　青　　责任编辑　蒋　青　　封面设计　杨立新　　责任绘图　尹文军
版式设计　王　莹　　责任校对　存　怡　　责任印制

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100011
总　　机　010-82028899

购书热线　010-64054588
免费咨询　800-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　17.75
字　　数　430 000

版　　次　2001年8月第1版
　　　　　年　月第2版
印　　次　年　月第　次印刷
定　　价　18.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19 号),提出了“力争经过 5 年的努力,编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用 2 至 3 年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用 2 至 3 年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从 2000 年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第二版前言

由同济大学、天津大学、浙江大学、重庆大学编写的教育部高职高专规划教材《高等数学》(上、下册),自2001年出版以来,受到广大读者的关注,得到许多兄弟院校的大力支持,在此首先对支持、帮助、鼓励我们工作的有关部门的领导、专家和读者表示诚挚的谢意。

为了进一步提高教材的质量,在已有的基础上逐步完善,更好地适应迅猛发展的高职高专教育的需要,与时俱进,跟上大众化教育前进的步伐,保证高职高专教学质量,全面贯彻"以应用为目的,以必需够用为度"的编写原则,使《高等数学(第二版)》更符合高职高专培养目标的要求,更具有高职高专的特色。我们认真总结了原教材在试用中存在的问题,听取有关兄弟院校对使用教材的意见,根据编者参与高职高专教学实践的亲身体会和感受及最近教育部举办的全国高职高专数学骨干教师培训班的精神,遵循教育部制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》,重新修订编写了这套高职高专教材。

新版教材与原教材的区别是:降低了难度,淡化了理论,加强了应用。易于教,便于学,更加贴近扩招形势下的高职高专学生的实际水平,但也不乏体现数学的文化修养和实际应用的双重功能。

新版教材仍分上、下两册。上册内容有函数及其图形,极限、连续和一元函数微积分及其应用;下册内容有向量代数与空间解析几何,多元函数微积分及其应用,无穷级数,微分方程等。

新版教材继续保留原教材高等数学与初等数学紧密衔接;基本概念、基本定理与实际相联系;数学知识与实际问题紧密结合;教材与学习指导融为一体,便于滚动复习;基本要求与拓宽知识相结合,适应于不同要求和不同层次的教学,深入浅出,难点分散,论证简明,系统性强等特色。

新版教材主要删减和修订的部分是:

1. 考虑到教学时数和高职高专学生的起点,新版教材将作为附录的上、下册8个"数学实验"全部删去;

2. 鉴于配合原教材学习辅导,典型题与难题详解的《高等数学训练教程》已由高等教育出版社于2003年5月出版,原教材中每章"学习指导"做了大量精简,其中"例题分析与解答"修订后改为"常见习题类型与解题思路",略去了例题分析与解答,删去每章总复习题中难度较大的(B)类习题;

3. 极限概念是高等数学的重点和难点,是否理解极限对于学好高等数学至关重要,为此新版教材对"极限与连续"一章做了较大的修改,由原来的九节改为八节,由原来极限的描述性定义与分析定义交叉讲述,新教材改为前七节对数列、函数极限,无穷大与无穷小,极限运算法则,函数的连续性等纯粹利用极限的描述性定义加以诠释,加"*"号的第八节是"再论极限的概念",在这节中给出了极限的分析定义,并用此定义讨论相关命题,独立的第八节可以不讲、不学,不会给教学带来不便,可作为要求较高的专业或学有余力的读者参考,从某种意义上讲摆脱了极限分析定义对高职高专学生的羁绊;

4. 原版教材中向量的坐标表达式是利用投影法引进的,比较抽象。新版教材是通过直观的几何方法和向量的线性运算性质给出的,对高职高专学生来说比较容易接受和理解;

5. 新版教材对第十一章微分方程在内容编排上做了较大的修改,由原教材六节改为八节,为便于联系实际,加强应用,增加了"一阶微分方程应用"和"二阶微分方程应用"各一节,删去为引进

二阶常系数线性微分方程的弹簧振动的模型,其篇幅有所减少;

6. 为适应新形势,全书减少了一些较难的例题和习题,精简了一些定理的证明,有些可讲或可不讲的节或目加上“ * ”号,供教师选讲或学生选学。

我们认为高职高专一般专业学生都应学点一元函数微积分学,提高数学素养对其一生大有裨益。对于数学要求多一些的专业,例如,计算机信息、软件、土木工程与机电等工程类专业一定要学点多元函数微积分、无穷级数及微分方程等。为了这些学生的今后发展,数学课应适当加强,决不能削弱。

参加新版修改的是:同济大学李生文(第一、二、三、十一章)、郭景德(第七、八、九章)、天津大学齐植兰(第四、十章)、浙江大学张继昌(第五、六章)、重庆大学戴一明也参加部分内容的修改。由李生文教授负责总体规划及技术处理等工作。

本书在修改过程中,得到同济大学高等技术学院、上海建桥职业技术学院和参编者所在学校有关领导和教师的大力支持和帮助。本书主审同济大学章亮教授逐章逐节详细审阅了全部书稿,提出了许多宝贵意见,在此我们一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限,书中不足和考虑不周之处肯定不少,错误也在所难免,我们敬请各位专家、同行和读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编者

2004 年 1 月

第一版前言

为满足 21 世纪我国高职高专教育大力发展的需要，作为工程类、经济类专业重要的基础理论课的高等数学，应及时地拥有一本具有中国特色的高职高专教材。为此，我们根据教育部高职高专规划教材的要求，遵循教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲(非师范类)》，在研究、剖析、对比多种同类教材和广泛吸取全国同行意见的基础上组织同济大学、天津大学、浙江大学、重庆大学的具有高职高专教学经验的教师集体编写了本书。本书是上述四所大学的参编者集思广益和通力合作的成果。本书以"联系实际，深化概念，加强计算，注重应用，适度论证，重视创新，提高素质"为特色，充分体现了"以应用为目的，以必需够用为度"的编写原则，在内容编排上，紧密衔接初等数学，从特殊到一般，从具体到抽象，十分注意基本概念、基本定理用几何意义、物理意义和实际背景诠释，深入浅出，难点分散，论证简明，系统完整，易于教，便于学。归纳起来，本教材具有以下六个方面的特色：

1．高等数学与初等数学紧密衔接

在以往的教学实践中，我们充分注意到高职高专和大学本科学生的差距，因此在编写教材时，对于在本科教材中简写或略写的初等数学知识作了较多的介绍，体现出高等数学与初等数学紧密衔接的特色。例如，我们在第一章函数及其图形中较详细地对集合、区间、绝对值及其运算性质，函数概念及其特性，用初等数学方法作函数的图形等进行了回顾总结，以便使高职高专的学生通过复习初等数学知识更顺利地学习高等数学的内容。本书附录中的"初等数学中的常用公式"也是本科教材中不多见的内容。当然在使用本教材时，可根据教学时数和学生的基础进行取舍。

2．基本概念、基本定理与实际相联系

数学历来有"抽象"的名声，刚入学的大学生学习高等数学时一般都需要一段适应过程，而对高职高专的新生，更需一段不短的适应过程。为缩短这一过程，我们十分注意理论与实际相结合，尽量按辩证唯物论的认识论即"实践—理论—实践"的认识过程编写，做到由特殊到一般，再由一般到特殊。引进重要的数学概念和定理时，在保证数学概念的准确性及基本理论的完整性、系统性的原则下，尽量借助几何直观图形和物理意义来解释这些概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化。极限是微积分的灵魂，只有理解这一概念，才能领会微积分的实质。为了清楚地阐述这一概念，我们与实际相联系，用直观的几何图形给以说明，淡化函数极限的"ε-δ"定义等，但为了保持系统的完整性，同时也为了学生今后继续深造的需要，仍然保留"ε-δ"定义。对微分学中值定理，我们联系几何、物理问题说明其意义，同时对罗尔定理和拉格朗日中值定理进行严格证明，这样既加深学生对定理背景的理解，也可适度提高学生的论证能力。

3．数学知识与实际问题紧密结合

为提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，在编写教材时，我们是从两方面着手的。一方面，选择了较多工程上或经济上的应用性例题和习题，以提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力；另一方面，在附录中的"数学实验"中设计了若干数学实验模型，提高学生应用计算机解决实际问题的兴趣和扩充解决实际问题的手段，再次体现出"以应用为目的"的编写原则。

4．教材与辅导材料融为一体，便于滚动复习

根据高职高专学生的特点，我们将教材与辅导材料融为一体，一书两用，每章末都设“学习指导”，包括基本要求与重点、例题分析与解答以及总复习题 A 和总复习题 B 等。基本要求与重点是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的，例题分析与解答是依据该章基本要求，分若干类综合运用基本概念、基本定理、基本公式编写的。在每类题后都简要说明了解答这类问题的思路或方法，滚动复习有关知识。总复习题 A 主要是复习该章的基本题，总复习题 B 的难度一般也不大，而且编者认为难度较大的题都有提示。全面地复习整章之后，用总复习题进行自我检查是十分有益的。

5．基本要求与拓宽知识相结合，适应不同要求和不同层次的教学

编写教材时，我们是根据教学的基本要求，按照够用为度的原则编写的，但也考虑到有些专业的特殊需要，适当地增加了一些内容，如在一元函数微积分中增加了曲率及其计算公式、导数在经济学中的应用、定积分在物理学和经济学中的简单应用，在多元函数积分学中增加了平面曲线积分，在幂级数中增加了求和函数和近似计算等。增加的这些内容的标题前都加了 * 号，以示区别。为适应部分学生“专升本”继续深造的需要，有些章节的内容略有加深。我们认为，有利于实施弹性模式教学，扩大了本书的适应性。

6．高等数学与数学实验相结合

鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为促进教学手段不断改革和创新，提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，激发学生的兴趣，尝试高等数学的教学与计算机功能的结合，进而提高学生的素质，我们在本书上、下册附录中分别编入四个内容简单、涉及面小、生动有趣、易于理解、便于上手操作的数学实验，并在下册配有演示光盘。这些实验是高等数学的组成部分和延伸补充，但具有相对独立性，可在完成基本教学内容的基础上，根据实际情况演示或实验。

本书分上、下两册。上册内容为一元函数微积分，书末附有初等数学中的常用公式，几种常用的平面曲线方程及其图形，数学实验。下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数和常微分方程，书末附有行列式简介和数学实验等。各册书末均有本册习题答案与提示。

本书主要适用于工科类高职高专各专业，也可供经管类各专业使用，还可作为“专升本”及学历文凭考试的教材或参考书。

参加本书编写的有：同济大学李生文（第一、二、三章）、郭景德（第七、八章）、天津大学齐植兰（第四、十章）、浙江大学张继昌（第五、六章）、重庆大学戴一明（第九、十一章），同济大学朱晓平编写了上、下册全部数学实验。由李生文教授负责总体规划、制定编写大纲、修改统稿及技术处理等工作。

本书在组织编写和统稿过程中，得到同济大学高等技术学院院长董大奎教授、李卫芬老师的大力支持和帮助，得到高等教育出版社编辑李艳馥同志和参编者所在学校的有关领导的大力支持。本书主审同济大学骆承钦教授详细审阅了大部分初稿，重庆大学谢树艺教授审阅了第九、十一章的初稿，他们都对初稿提出了许多宝贵意见。在此我们一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限，加上任务本身的难度大，时间又紧，书中不足和考虑不周之处肯定不少，错误也在所难免，我们期望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编者

2001 年 1 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数及其图形

高等数学以变量为研究对象.函数关系是变量之间的最基本的一种依赖关系.为便于读者学习,本章是在回顾中学数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数的.先简要介绍集合,再讨论函数的概念及其特性、基本初等函数、复合函数、初等函数及其图形等.

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是现代数学的一个基本概念,数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号.学习高等数学、线性代数、概率统计等都必须熟悉集合的概念与运算.

所谓 合 指具有某种共同属性的事物的总体,例如,一个教室里的全体学生;学校图书馆内全部的经济学类书籍;代数方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有根;自然数的全体等,都分别组成一个集合.组成这个集合的事物或个体称为该集合的 素 .

通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合;用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就记为 $a \in A$ (读作 a 属于 A),如果 b 不是集合 A 的元素,就记为 $b \notin A$ (或 bú A) (读作 b 不属于 A).对于给定的集合 A,个体 $x \in A$ 或 $x \notin A$,二者必择其一.

集合的表示法一般有两种,一种是列举法,即把集合中的元素列举出来,比如,小于 10 的正奇数所组成的集合可以表示为 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.又如,满足 $|x - 2| \leq 6$ 的整数所成集合 $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 等.用列举法表示集合时,必须列出集合中所有元素,既不能遗漏,也不能重复.另一种是描述法,例如,上述集合 A 也可表示为 $A = \{x \mid x$ 是小于 10 的正奇数$\}$,在这里用一个命题:“x 是小于 10 的正奇数”来描述集合 A 的所有元素的属性.这种表示集合的方法称为描述法.例如,集合 C 是方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的解集,就可表示为

$$C = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}.$$

一个集合中,若只有有限个元素,则称为有限集;不是有限集的集合称为无限集.

对于数集,有时我们在表示数集的字母的右上角标上“ * ”来表示该数集内排除数 0 的集合,标上“ + ”来表示该数集内排除 0 与负数的集合.

习惯上,自然数的集记作 **N**,即

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^* = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

全体整数的集合记为 **Z**,即

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

全体有理数的集合记作 Q,即

$$\mathbf{Q} = \quad \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^{*} \quad ,$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^{+}$ 表示全体正实数 .

如果一个集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素,就称 A 是 B 的<u> 集</u>,记为 $A \quad B$ (读作 A 包含于 B)或者记为 $B \quad A$ (读作 B 包含 A) .

如果集合 A 与集合 B 含有相同的元素,就称 A 与 B <u>相等</u>,记为 $A = B$ (或 $B = A$) .此时 $A \quad B$ 且 $B \quad A$.

例如,$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{1, -1\}$,必有 $A = B$ 或 $B = A$.

如果 $A \quad B$ 且 $A \neq B$,就称 A 是 B 的<u> 子集</u>,记为 $A \quad B$.例如,$\mathbf{N} \quad \mathbf{Z} \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为<u> 集</u> .例如

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x^2 + 2 = 0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2 + 2 = 0$ 的实数不存在 .空集记作 ,且规定空集 是任何集合 A 的子集,即 A .注意,空集 不能与含有单个元素"0"的集合$\{0\}$相混淆 .如,集合$\{x \mid 3^x = 1\}$就不是空集,而是集合$\{0\}$.

二、集合的运算

如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样,集合与集合之间也有一些特定的运算及运算规律,集合的基本运算是并、交、差 .

1. 集合的并

设 A 和 B 是两个集合,所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的<u> 集</u>(简<u> 并</u>),记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.图 1 - 1 中阴影部分表示并 $A \cup B$.

例如,$A = \{1, 2, 3, 4\}$与 $B = \{2, 4, 6, 7\}$的并 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

2. 集合的交

设 A 和 B 是两个集合,所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的<u> 集</u>(简<u> 交</u>),记作 $A \cap B$.即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.图 1 - 2 中阴影部分表示交 $A \cap B$.

例如,集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$与 $B = \{2, 4, 6, 7\}$的交 $A \cap B = \{2, 4\}$.

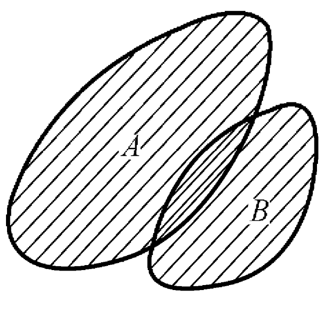

图 1 - 1

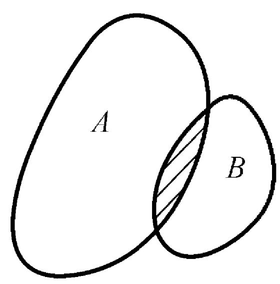

图 1 - 2

3. 集合的差

设 A 和 B 是两个集合,所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的<u> 集</u>(简称差)记作 $A \setminus B$.即 $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.图 1 - 3 中斜线阴影部分表示差 $A \setminus B$,竖线阴影部分表示差 $B \setminus A$.

例如,集合 $A=\{x|0<x<2\}$,集合 $B=\{x|1<x<3\}$,则 $A\setminus B=\{x|0<x\leq 1\}$.

有时,在研究和处理问题时,把所考虑事物的全体称为____集(相对全集),并用 U 表示 .例如,在讨论实数问题时,可把实数的全体看成全集 .

设 A 是一个集合,U 是包含 A 的全集,把 $U\setminus A$ 称为 A 的____集 ____集,记作箪$_U A$,图 1 - 4 中阴影部分表示箪$_U A$.

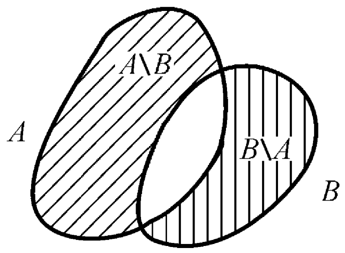

图 1 - 3

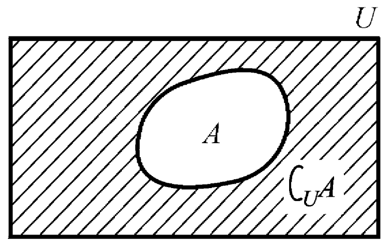

图 1 - 4

例如,在实数集 **R** 中,集合 $A=\{x|0\leq x<1\}$的余集就是

$$箪_{\mathbf{R}} A=\{x|x<0 \text{ 或 } x\geq 1\} .$$

集合的并、交、余运算满足下列规律:

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列四个定律成立:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 箪$(A\cup B)=$箪 $A\cap$箪 B,

箪$(A\cap B)=$箪 $A\cup$箪 B .

以上四个定律都可根据集合相等的定义验证 .这里我们仅对对偶律用实例给予直观的说明 .

设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5\}$.

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\},箪_U(A\cup B)=\{6,7,8\},$$

$$箪_U A=\{4,5,6,7,8\},箪_U B=\{1,2,6,7,8\},$$

显然箪$_U A\cap$箪$_U B=\{6,7,8\}$,即对偶律第一式箪$(A\cup B)=$箪 $A\cap$箪 B 成立 .

又 $A\cap B=\{3\}$,箪$_U(A\cap B)=\{1,2,4,5,6,7,8\}$,综上可知

$$箪_U A\cup箪_U B=\{4,5,6,7,8\}\cup\{1,2,6,7,8\}=\{1,2,4,5,6,7,8\},$$

故 对偶律第二式箪$(A\cap B)=$箪 $A\cup$箪 B 成立 .

三、实数的绝对值

在学习高等数学时,经常涉及实数的绝对值,回顾并复习这些内容十分必要 .

对于任意一个实数 x,它的____对值

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0 .\end{cases}$$

例如,$|-5|=|5|=5$;$|-1.4|=1.4$;$|0|=0$ 等 .

绝对值$|x|$的几何意义:实数 x 的绝对值$|x|$等于数轴上的点 x 到原点的距离.

绝对值有如下性质:

设 a,b 为任意实数,则有

1. $|a|=\sqrt{a^2}$;　　2. $|a|\geq 0$,仅当 $a=0$ 时,$|a|=0$;

3. $|-a|=|a|$;　　4. $-|a|\leq a\leq |a|$;

5. $|a+b|\leq |a|+|b|$;　　6. $\big||a|-|b|\big|\leq |a-b|$;

7. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;　　8. $\left|\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{|b|}{|a|}\ (a\neq 0)$.

上述性质 1～4 可以由绝对值的定义直接得到.现对性质 5 和性质 6 给予证明,其余留给读者考虑.

性质 5 的证明　由绝对值的定义,得

$$-|a|\leq a\leq |a|,\quad -|b|\leq b\leq |b|.$$

将上述两个不等式相加,得

$$-(|a|+|b|)\leq a+b\leq |a|+|b|.$$

于是有

$$|a+b|\leq |a|+|b|.$$

故性质 5 成立.

性质 6 的证明　由 $a=(a-b)+b$,在性质 5 中,用 $a-b$ 替换 a,可得

$$|a|=|(a-b)+b|\leq |a-b|+|b|,$$

即

$$|a|-|b|\leq |a-b|. \tag{1}$$

类似的方法,又可得

$$|b|-|a|\leq |a-b|. \tag{2}$$

综上(1),(2)两个不等式,得

$$\big||a|-|b|\big|\leq |a-b|.$$

从而性质 6 成立.

由绝对值的性质可知,$|x|\leq a\ (a>0)$等价于 $-a\leq x\leq a$,因此,集合$\{x\,\big|\,|x|\leq a\}$与集合$\{x|-a\leq x\leq a\}$是相同的.

四、区间与邻域

区间是用得较多的一类实数集合.

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$ 数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为__区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的__点,其中 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

数集$\{x|a\leq x\leq b\}$称为__区间,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\},$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，其中 $a \in [a, b]$，$b \in [a, b]$.

类似地，可说明

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为 开区间 .

以上这些区间都称为 限区间 .闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来，分别如图 1 - 5(a)与(b)所示 .另外还有所谓 限区间 .引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1 - 5(c)与(d)所示 .

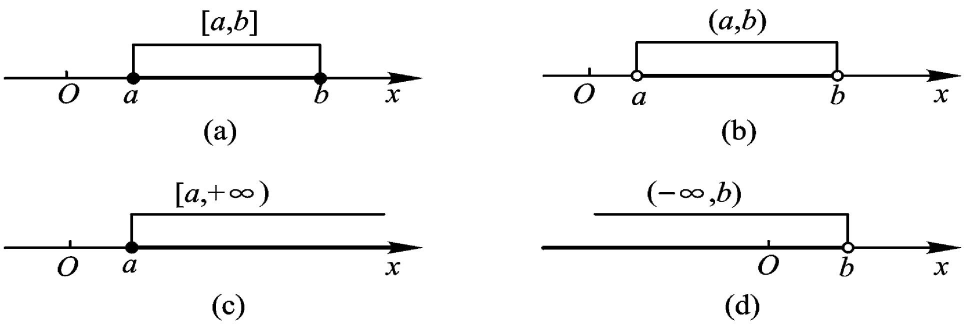

图 1 - 5

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间 .

以后凡是不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间或是无限区间时，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示 .

下面引入在高等数学中常用的 域概念 .以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$.

所谓点 x_0 的 δ 邻域，是指以 x_0 为中心，以 2δ $(\delta > 0)$ 为长度的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，如图 1 - 6(a)所示 .记作 $U(x_0, \delta)$.即 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$.

在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0，所得集合记作 $U(x_0, \delta)$，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，如图 1 - 6(b)所示 .即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

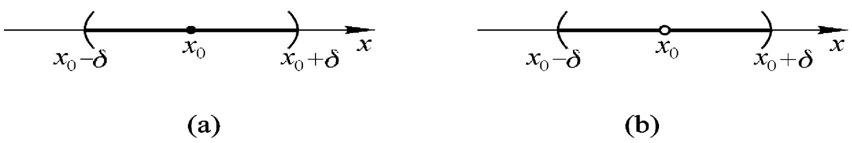

图 1 - 6

或用区间的并表示为 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

例如，$U(3, 0.5) = \{x \mid |x - 3| < 0.5\}$ 表示点 3 的 0.5 邻域，也可表示为开区间 $(2.5, 3.5)$.$U(1, 0.25) = \{x \mid 0 < |x - 1| < 0.25\}$ 表示点 1 的 0.25 去心邻域，它可用两个开区间的并表示为

$(0.75,1)\cup(1,1.25)$.

注意,$0<|x-x_0|$表示 $x\neq x_0$,即邻域内不含点 x_0 .

习题 1 - 1

1 . 单项选择题:

(1) 下列集合中有限集是( );

A . $I_1=\{x \mid |x-2|<2\}$ B . $I_2=\{a,b,c\}$

C . $I_3=\{x \mid x^2-3x+2>0\}$ D . $I_4=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$

(2) 下列集合中无限集是( );

A . $I_1=\{x \mid x>5\}$ B . $I_2=\{(x,y) \mid y=2x$ 且 $y=x\}$

C . $I_3=\{(x,y) \mid y=x^2$ 且 $y=x\}$ D . $I_4=\left\{x \mid \cos x=1,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right\}$

(3) 下列集合中空集是( );

A . $\{1,2,3\}\cap\{3,5,6\}$ B . $\{0,1,2\}\cap\{3,5,6\}$

C . $\{(x,y) \mid y=x^2$ 且 $y=x+1\}$ D . $\left\{x \mid |x-1|<\frac{1}{2}\right\}$

(4) 设集合 $P=\{a,5,6,8\}$, $M=\{b,2,4,7\}$,则 a,b 取值为( )时, $P\cap M=\{4,5\}$;

A . $a=4,b=5$ B . $a=5,b=5$

C . $a=5,b=4$ D . $a=4,b=4$

(5) 设 $I_1=\{x \mid 3<x<6\}$, $I_2=\{x \mid x>5\}$,则 $A\cup B=$ ( );

A . $\{x \mid x>5\}$ B . $(5,+\infty)$

C . $\{x \mid 5<x<6\}$ D . $(3,+\infty)$

(6) 设 $P=\{1,2,3\}$, $M=\{1,3,5\}$,则 $P\setminus M=$ ( );

A . $\{5\}$ B . $\{2\}$ C . $\{1\}$ D . $\{3\}$

(7) 数集 $I=\{x \mid 0<|x-5|<1\}$用区间表示为( );

A . $[4,6]$ B . $(4,6)$

C . $(4,5)\cup(5,6)$ D . $[4,6)$

(8) 设实数集 $\mathbf{R}$ 表示全集,区间 $I=[1,5)$,那么箄$_{\mathbf{R}} I$ 为( ) .

A . $(-\infty,1]\cup(1,5)$ B . $(-\infty,1)\cup(1,5)$

C . $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ D . $(-\infty,1)\cup[5,+\infty)$

2 . 用描述法表示下列集合:

(1) 不小于 6 的所有实数集合;

(2) 抛物线 $y=2x^2$ 与直线 $y=2$ 的交点的集合;

(3) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$内部(不含椭圆边界)的一切点的集合;

(4) 点 2 的去心$\frac{1}{3}$邻域 .

3 . 用列举法表示下列集合:

(1) $x^3-8x^2+19x-12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y^2=x$ 与 $x=1$ 的交点的集合;

(3) 集合$\{x \mid 0<|x-2|\leq 5,\ x\in\mathbf{Z}\}$;

(4) 方程 $2^{x-1}=1$ 的根的集合.

4. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围:

(1) $2<x\leq 6$;　　(2) $|x|<3$;

(3) $|x-2|<\frac{1}{10}$;　　(4) $|x|>100$;

(5) $0<|x-1|<0.01$.

5. 设 $x\in U(1,\delta)$时, $|2x-2|<\varepsilon$,当 ε分别等于 0.1 和 0.01 时,求邻域半径 δ各等于多少?

6. 设 $A=\{x|3<x<5\}$, $B=\{x|x>4\}$,求:(1) $A\cup B$; (2) $A\cap B$.

第二节　函　　数

一、函数概念

在考察某些自然现象或社会现象时,往往会遇到几个变量.这些变量并不是孤立地变化的,而是存在着某种相互依赖关系,为了说明这种关系,先举两个例子.

例 1　自由落体运动　设物体下落时间为 t,落下的距离为 s,假设开始下落的时刻 $t=0$,那么 s 与 t 之间的对应关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 为重力加速度.假设物体着陆的时刻 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时,按上式 s就有一个确定的数值与其相对应.

例 2　某工厂每天生产产品 A 的件数为 x,机械设备等固定成本为 1 600 元,生产每件产品所花费的人工费和使用原材料费用等单位产品变动成本为 6 元,那么每天日产量 x 与每天的生产总成本 C 之间的对应关系由下式

$$C=1\,600+6x$$

给出.假定该厂日产量最多为 350 件,那么当产量 x 在数$\{0,1,2,\cdots,350\}$上任意取定一个数值时,按上式 C就有一个确定的数值与它相对应.

在例 1 中,时间 t 可以取闭区间$[0,T]$上的每一个数值,距离 s 可以取 $\left[0,\frac{1}{2}gT^2\right]$ 上每一个数值.在例 2 中,日产量 x 可以取数集$\{0,1,2,\cdots,350\}$中对应的每一个数值,总成本 C 可以取数集$\{1\,600,1\,606,1\,612,\cdots,3\,700\}$中相对应的每一个数值.

例 1 与例 2 中各有两个变量(例 1 中 t和 s,例 2 中 x 和 C)且每对变量间都有确定的对应关系,这种对应关系正是函数概念的实质.

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的__数,记作 $y=f(x)$.

数集 D 称为函数 $f(x)$的__义域,即 $D=D(f)$ (简记为 D_f).习惯上,x 称为__变量,y 称为__变量.

当 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在 x_0 处的__数值,记作 $f(x_0)$,当 x 遍取 D_f 内的各个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$R(f) = \{ y \mid y = f(x), x \in D_f \}$$

称为函数 $f(x)$的__域,简记为 R_f .

函数 $y = f(x)$中表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母 .例如,拉丁字母“ g”,“ F”或希腊字母“ φ”、“ ψ”等 .这时函数就记作 $y = g(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$,等等 .

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的 .如例 1 中, $D_f = [0, T]$,在例 2 中,定义域是不大于 350 的正整数集 .

在数学中,有时抽去函数的实际意义,单纯地讨论用算式表达的函数,这时可以规定函数的__然定义域 .在实数范围内,函数的自然定义域是使得算式有意义的一切实数组成的数集 .例如, $s = \frac{1}{2} g t^2$ 的自然定义域是$(-\infty, +\infty)$,又如,函数 $y = \quad 1 - x^2$ 的自然定义域为$[-1, 1]$等 .

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值只有惟一的一个,称这种函数为__值__数;否则,如果有多个函数值与之对应,就为__值函数 .例 1 和例 2 以及我们所定义的函数都是单值函数 .本课程所讨论的函数也都是指单值函数 .为使读者能正确区分单值函数与多值函数,下面再举一例 .

例 3 在直角坐标系中,半径为 a,圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = a^2$,此方程在闭区间$[-a, a]$上确定一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数 .当 x 取 $-a$ 或 a 时,对应的函数值都只有一个,但当 x 取开区间$(-a, a)$内的任一个数值时,对应的函数值就有两个 .所以这一函数是多值函数 .

以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数 .

设函数 $y = f(x)$的定义域为 D_f,取定一个 $x \in D_f$,对应一个函数值 $y = f(x)$,这时(x, y)在 xOy 平面上确定一个点 .当 x 取遍 D_f 上每个值时,得到 xOy 平面上的点集 G:

$$G = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D_f \},$$

点集 G 称为函数 $y = f(x)$的__形(也叫__像) .图形 G 在 x 轴上的垂直投影点集就是定义域 D_f, G 在 y 轴上的垂直投影点集就是值域 R_f,见图 1 - 7 .

下面举几个函数的例子,例中所说的定义域均指自然定义域 .

例 4 (1)常数函数 $y = 5$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$,值域为单点集$\{5\}$.

(2) 函数 $y = x^2$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = [0, +\infty)$,其图形称为__物线,如图 1 - 8 所示 .

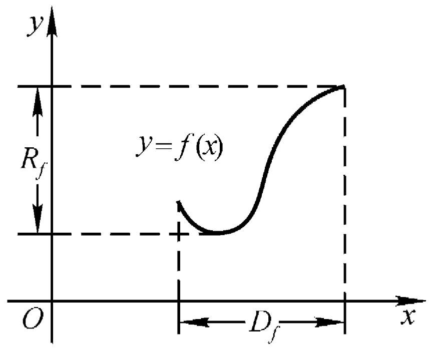

图 1 - 7

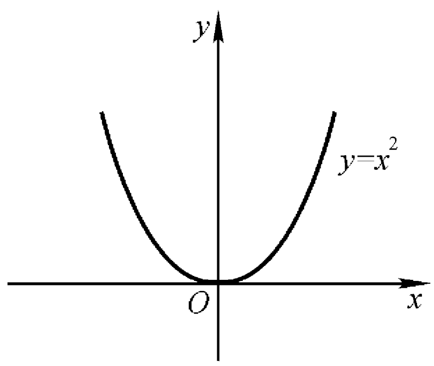

图 1 - 8

例 5 函数 $y = \frac{1}{x}$的定义域 $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,值域 $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,其

图形称为<u> 轴双曲线</u>,如图 1 - 9 所示 .

例 6 函数 $y = x^3$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_f = (-\infty, +\infty)$,其图形为立方抛物线,如图 1 - 10 所示 .

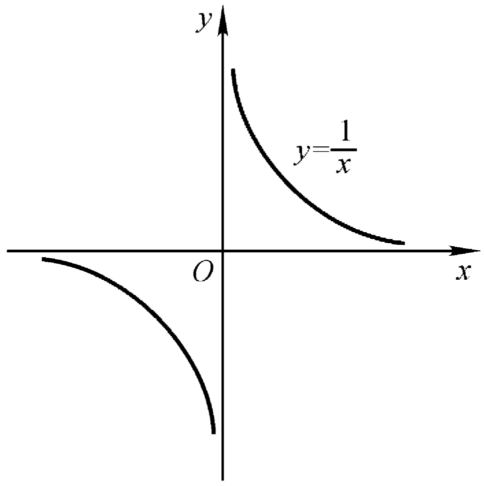

图 1 - 9

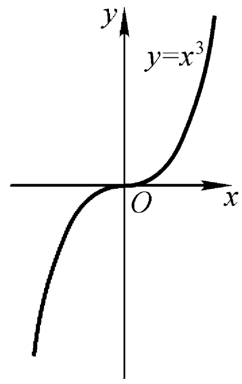

图 1 - 10

例 7 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} . \end{cases}$$

显然,函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域是$\{0, 1\}$,函数不能用图形表示出来 .

通过对函数的定义和以上各例题的分析讨论不难发现,确定一个函数,起决定作用的因素是:

(1) 对应法则(规则) f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系);

(2) 定义域 D_f(即自变量 x 的变化范围) .

如果两个函数的“对应法则 f”和“定义域 D_f”都相同,那么这两个函数就是<u> 同的</u>(或称相等的),否则就是不相同的 .至于自变量和因变量用什么字母表示,则无关紧要 .因此,只要对应法则 f 相同,定义域 D_f 相同时,那么 $y = f(x)$与 $u = f(v)$就表示同一个函数 .

例 8 下列各对函数是否相同 ?为什么 ?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;

(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$;

(4) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, $g(x) = \sin x$.

解 (1)不相同 .$D_f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $D_g = (0, +\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$与 $g(x)$不相同;

(2) 不相同 .$f(-1) = -1$, $g(-1) = 1$,两个函数的对应法则不同,所以 $f(x)$与 $g(x)$不相同 .

(3) 相同 .定义域均为$(-\infty, +\infty)$,对应法则也相同,因此 $f(x)$与 $g(x)$相同 .

(4) 不相同 .虽然两个函数的定义域都是$(-\infty, +\infty)$,但其对应法则不同, $f(x)$的值域 $R_f = [0,1]$, $g(x)$的值域 $R_g = [-1,1]$.

二、函数的表示法

函数常用解析法,表格法,图像法表示 .

1. 解析法

对自变量和常数通过加、减、乘、除四则运算,作乘幂、取对数、取指数、取三角函数、取反三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式,用解析表达式表示一个函数的方法称为____析法(也称____式法) .本节的上述各例题都是用解析法表示的函数 .高等数学中所讨论的函数大多是由解析法给出的,这是因为用解析表达式便于进行各种运算和研究函数的性质 .但要指出一点,用解析法表示函数,不一定总是用一个式子表示,也可以用几个式子表示一个函数,习惯上,称用多个式子表示的这种函数为____段函数 .

例 9 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$.它的图形如图 1 - 11 所示,对任何的 $x\in\mathbf{R}$,有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$或$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$.如,$-5=\operatorname{sgn}(-5)\cdot|-5|=(-1)\cdot5=-5$,$|-5|=(-5)\cdot\operatorname{sgn}(-5)$,即$5=(-5)\cdot(-1)$.

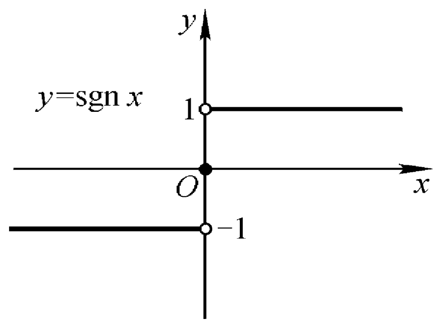

图 1 - 11

例 10 取整函数 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的____数部分,记为$[x]$.例如,$\left[\frac{3}{7}\right]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$[-1]=-1$,$[-3.8]=-4$.把 x 看作变量,则函数

$$y=[x]$$

的定义域是 $\mathbf{R}$,值域是 $\mathbf{Z}$,其图形如图 1 - 12 所示,这个函数称为____整函数 .

取整函数还可以表示成

$$y=[x]=n,\ n\leq x<n+1,$$

$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 11 函数

$$y=\begin{cases}x^2, & x\leq0,\\ 1+x, & x>0 .\end{cases}$$

$D_f=(-\infty,+\infty)$,$R_f=[0,+\infty)$,图形由图 1 - 13 给出 .

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com