

高等数学·下·成人本科

李心灿

高等教育出版社

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

策划编辑	徐 可
责任编辑	胡 乃
责任绘图	朱 静
封面设计	张 楠
版式设计	胡志萍
责任校对	殷 然
责任印制	

内容提要

全书是按照教育部 1998 年颁布的成人高等教育工科各专业本科高等数学课程教学基本要求编写的.分上下两册出版.上册内容为一元函数微积分.下册内容分 6 章,包括向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数,常微分方程.节末有习题,章末有总复习题.例题丰富,应用实例涉及面广.讲解数学概念注重几何直观与物理解说.讲解数学方法,注意归纳、整理、总结,便于读者理解和掌握;附录中还编入了与本书有关的数学家简介.

与此教材配套,还编有高等数学学习辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下.成人本科 李心灿主编.—2 版.北京:
高等教育出版社,2003.6
ISBN 7 - 04 - 011957 - 9

. 高... . 李... . 高等数学 - 高等教育:
成人教育 - 教材 . 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037486 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: www.hep.edu.cn
总 机	010 - 82028899		http: www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷			
		版 次	1999 年 10 月第 1 版
开 本	850 × 1168 1/32		年 月第 版
印 张	16.375	印 次	年 月第 次印刷
字 数	420 000	定 价	22.10 元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

目 录

第七章	向量代数与空间解析几何	(1)
§ 7.1	空间直角坐标系	(1)
§ 7.2	向量的概念与线性运算	(6)
§ 7.3	向量的代数表示	(10)
§ 7.4	向量的数量积与向量积	(16)
§ 7.5	曲面方程与空间曲线方程	(24)
§ 7.6	平面方程	(33)
§ 7.7	空间直线方程	(42)
§ 7.8	常见的二次曲面	(52)
复习题七	(61)
第八章	多元函数微分学	(65)
§ 8.1	多元函数的概念	(65)
§ 8.2	偏导数	(80)
§ 8.3	全微分及其应用	(92)
§ 8.4	复合函数微分法	(104)
§ 8.5	隐函数微分法	(119)
* § 8.6	方向导数及梯度	(127)
§ 8.7	多元函数微分法在几何上的应用	(134)
§ 8.8	多元函数的极值	(142)
复习题八	(155)
第九章	重积分	(160)
§ 9.1	二重积分的概念及性质	(160)
§ 9.2	二重积分的计算	(165)
§ 9.3	三重积分的概念及算法	(195)

复习题九	(212)
第十章 曲线积分与曲面积分	(215)
§ 10.1 对弧长的曲线积分	(215)
§ 10.2 对坐标的曲线积分	(223)
§ 10.3 格林公式,平面曲线积分与路径无关的条件	(231)
§ 10.4 对面积的曲面积分	(242)
§ 10.5 对坐标的曲面积分	(249)
复习题十	(262)
第十一章 无穷级数	(265)
§ 11.1 无穷级数的概念和性质	(265)
§ 11.2 正项级数	(276)
§ 11.3 任意项级数	(286)
§ 11.4 幂级数	(294)
§ 11.5 函数展开为幂级数	(305)
§ 11.6 幂级数的求和	(319)
§ 11.7 傅里叶级数	(325)
§ 11.8 特殊区间上的傅里叶级数	(333)
复习题十一	(341)
第十二章 常微分方程	(344)
§ 12.1 微分方程的基本概念	(344)
§ 12.2 变量可分离的微分方程及齐次微分方程	(351)
§ 12.3 一阶线性微分方程	(362)
§ 12.4 全微分方程	(372)
§ 12.5 一阶微分方程的应用举例	(376)
§ 12.6 可降阶的高阶微分方程	(386)
§ 12.7 二阶线性微分方程解的性质与通解结构	(398)
§ 12.8 二阶常系数线性齐次微分方程的解法	(403)
§ 12.9 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	(410)
§ 12.10 二阶常系数线性微分方程的应用举例	(421)

复习题十二	(433)
附录一 本书中的有关数学家简介	(438)
附录二 二阶、三阶行列式简介	(469)
附录三 2002 年全国硕士研究生入学统一考试 数学 一试卷、数学三试卷中的“高等数学”试题及参 考解答	(474)
习题答案或提示	(493)

第七章 向量代数与空间解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形的学科. 若仅限于研究平面上的几何图形, 则称为平面解析几何; 若仅限于研究三维空间的几何图形, 则称为空间解析几何.

解析几何的实质是建立点与实数之间的关系, 把代数方程与曲线、曲面对应起来, 从而能用代数方法研究几何图形.

借助于解析几何, 几何概念可以用代数表示, 几何目标可以通过代数达到. 反过来, 借助于解析几何能给代数语言以几何解释, 使人们能直观地掌握代数语言的意义, 并启发人们提出新的结论. 这两方面构成了解析几何的基本问题. 也可以更明确地说, 解析几何的基本问题为:

- (1) 已知点的几何轨迹, 如何建立它的代数方程?
- (2) 已给代数方程, 如何确定它的几何轨迹?

§ 7.1 空间直角坐标系

由平面解析几何学可知, 笛卡儿 试图建立起一种通用的数学, 使算术、代数和几何统一起来. 他给出平面上点与实数对 (x, y) 间的关系, 进而将方程与曲线对应起来, 将“形”与“数”统一起来. 这种能用代数方法研究几何图形的理论是以坐标法为基础的. 同样, 空间的“形”与“数”联系的媒介是空间直角坐标系.

关于笛卡儿的简介, 请看附录一的 P438.

一、空间直角坐标系

下面先来介绍空间直角坐标系.

所谓空间直角坐标系是指:给定一点 O ,过该点引出以该点为原点的三条互相垂直的数轴 Ox , Oy , Oz (它们通常具有相同的长度单位).常称 O 为坐标原点;分别称 Ox , Oy , Oz 三个轴为 x 轴(或横轴), y 轴(或纵轴), z 轴(或竖轴).常记这个坐标系为 $Oxyz$.

如果将一只手的大拇指、食指、中指表为两两垂直的形态,令它们依次表示 Ox , Oy , Oz 轴.若用的是右手,则称所表示的这个坐标系 $Oxyz$ 为右手系.否则称为左手系.今后若不加声明,所给坐标系皆为右手坐标系.通常右手坐标系如图 7.1 所示.

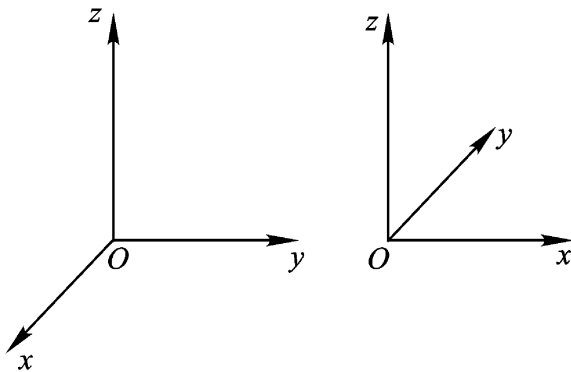


图 7.1

三个坐标轴 Ox , Oy , Oz 两两决定的三个互相垂直的平面,统称之为坐标平面,由 Ox , Oy 轴组成的坐标平面记为 xOy .由 Ox , Oz 轴组成的坐标平面记为 zOx .由 Oy , Oz 轴组成的平面记为 yOz .

设 M 为空间一点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴,并与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 A , B , C .设 $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$,则点 M 唯一决定了一组有序的三个数 x , y , z .反过来,在三个坐标轴上依次给定三个点 A , B , C ,且 $OA = x$,

$OB = y$, $OC = z$. 分别过点 A , B , C 作三个平面依次垂直于 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴, 则这三个平面相交于一点, 即一组有序的三个数 x, y, z 唯一决定了空间一点. 于是空间的点 M 与一组有序的三个数 x, y, z 建立了一一对应关系. 常称这组数 x, y, z 为点 M 的坐标, 并称 x 为 M 的横坐标, y 为 M 的纵坐标, z 为 M 的竖坐标, 常记为 $M(x, y, z)$. 如图 7.2 所示.

三个坐标平面将空间分为八个部分, 称其每个部分为卦限. 这八个卦限用下述方法规定其顺序, 如图 7.3 所示:

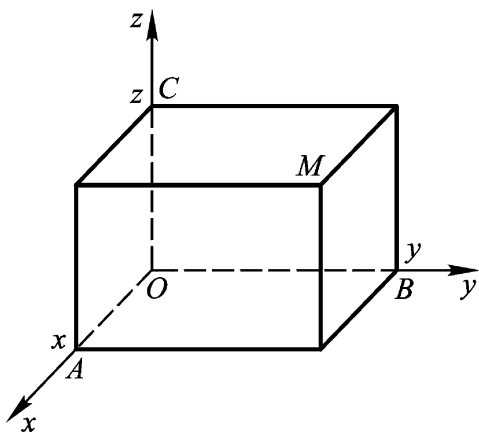


图 7.2

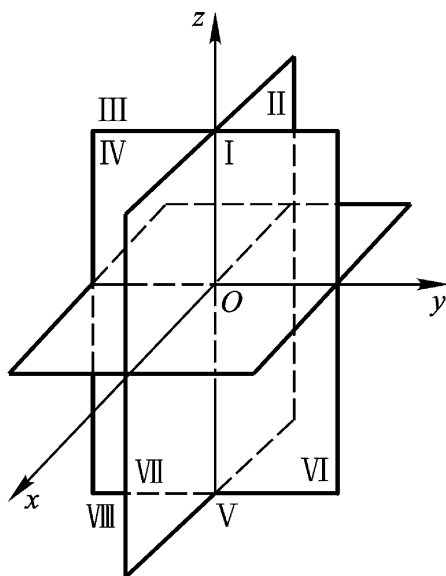


图 7.3

- 第一卦限 $x > 0, y > 0, z > 0$;
- 第二卦限 $x < 0, y > 0, z > 0$;
- 第三卦限 $x < 0, y < 0, z > 0$;
- 第四卦限 $x > 0, y < 0, z > 0$;
- 第五卦限 $x > 0, y > 0, z < 0$;
- 第六卦限 $x < 0, y > 0, z < 0$;
- 第七卦限 $x < 0, y < 0, z < 0$;
- 第八卦限 $x > 0, y < 0, z < 0$.

有必要指出,位于坐标平面或坐标轴上的点,我们约定它不属于任何卦限.这些点的坐标有以下特性:

原点的三个坐标都是 0,即坐标为 $(0, 0, 0)$.

在 x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$.

在 y 轴上点的坐标为 $(0, y, 0)$.

在 z 轴上点的坐标为 $(0, 0, z)$.

在 xOy 平面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$.

在 yOz 平面上的点的坐标为 $(0, y, z)$.

在 zOx 平面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点.过点 M_1 , M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 $M_1 M_2$ 为对角线的长方体,如图 7.4 所示.由勾股定理可得

$$\begin{aligned} |M_1 M_2|^2 &= |M_1 N|^2 + |N M_2|^2 \\ &= |M_1 P|^2 + |M_1 Q|^2 + |M_1 R|^2. \end{aligned}$$

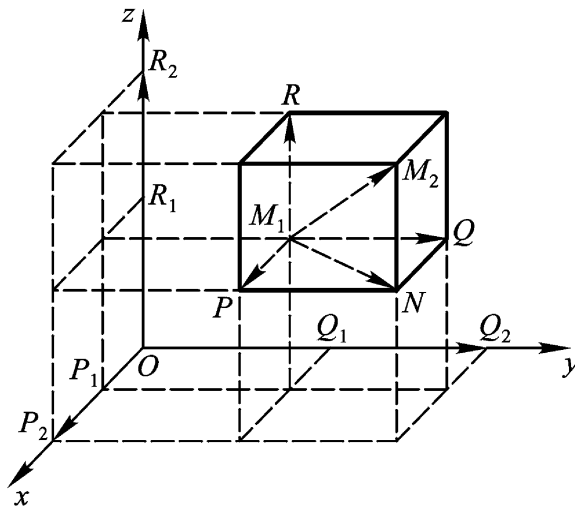


图 7.4

注意到

$$| M_1 P | = | P_1 P_2 | = | x_2 - x_1 |,$$

$$| M_1 Q | = | Q_1 Q_2 | = | y_2 - y_1 |,$$

$$| M_1 R | = | R_1 R_2 | = | z_2 - z_1 |,$$

可知

$$| M_1 M_2 |^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

因而

$$| M_1 M_2 | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

上式(1)又称为 M_1, M_2 两点间的距离公式.

例 1 已知两点 $M_1(-1, 0, 2), M_2(0, 3, -1)$, 求此两点间的距离.

解 由空间两点间的距离公式(1), 有

$$\begin{aligned} | M_1 M_2 | &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{[0 - (-1)]^2 + (3 - 0)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{19}. \end{aligned}$$

例 2 在 y 轴上求一点 M , 使其到两点 $M_1(2, 0, -1)$ 与 $M_2(1, -1, 3)$ 的距离相等.

解 由于点 M 在 y 轴上, 可设其坐标为 $(0, y, 0)$. 由题意有

$$| M M_1 | = | M M_2 |,$$

即

$$(0 - 2)^2 + (y - 0)^2 + (0 + 1)^2 = (0 - 1)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 3)^2.$$

解此方程得 $y = -3$. 因此所求点为 $M(0, -3, 0)$.

例 3 试判定以 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的 ABC 的几何特性.

解 由空间两点间距离公式(1)有

$$| AB |^2 = (10 - 4)^2 + (-1 - 1)^2 + (6 - 9)^2 = 49,$$

$$|AC|^2 = (2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2 = 49,$$

$$|BC|^2 = (2-10)^2 + [4-(-1)]^2 + (3-6)^2 = 98.$$

由于 $|AB|^2 = |AC|^2$,可知 $AB = AC$,因而 ABC 为等腰三角形.

又由于 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$,可知 ABC 为直角三角形.

故知 ABC 为等腰直角三角形.

习题 7.1

1. 指出下列各点在空间中的哪一个卦限?

(1) $(-1, 3, 2)$; (2) $(3, 3, -1)$; (3) $(-5, -2, -2)$; (4) $(-5, 1, -1)$.

2. 若空间点 $M(x, y, z)$ 的坐标满足条件: $xyz < 0$,问 M 点可能在空间中的哪几个卦限?

3. 求点 $M(a, b, c)$ 分别关于(1) zOx 面, (2) x 轴, (3)原点对称点的坐标.

4. 设 $A(-3, x, 2)$ 与 $B(1, -2, 4)$ 两点间的距离为 $\sqrt{29}$,试求 x .

5. 证明: $A(-3, 2, -7)$, $B(2, 2, -3)$, $C(-3, 6, -2)$ 是一个等腰三角形的三个顶点.

6. 证明: $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 5)$, $C(2, 4, 3)$ 是一个直角三角形的三个顶点.

7. 在 z 轴上求与两点 $A(4, -1, 7)$ 和 $B(-3, 5, -2)$ 等距离的点.

§ 7.2 向量的概念与线性运算

一、向量的概念

向量是用代数方法研究几何图形的基本工具.在力学、物理学等问题中所遇到的量,可以分为两大类:其中一类在选定了某个单位以后完全可以用数值来表示,比如质量、温度、时间、面积、体积等,常称这种量为数量.另一类量不仅有大小,而且有方向,比如力、速度、加速度等等,常称这类量为向量.

可以把向量用具有一定长度和方向的线段来表示. 这种有确定长度和确定方向的线段常称为有向线段. 常称这个确定的长度为向量的大小, 向量的大小又称为向量的模; 称这个确定的方向为向量的方向.

模为 1 的向量称为单位向量.

特别定义模为零的向量为零向量, 记为 0 . 零向量的方向可以看作是任意的.

若 A 为向量的始点, B 为终点, 常记为 \overline{AB} . 通常也用小写黑体字 a, b 等表示向量.

若向量 a, b 的模相等, 且它们的方向也相同, 则称向量 a 与 b 相等, 记为 $a = b$.

与向量 a 的模相等, 而方向相反的向量, 称为 a 的负向量, 记为 $-a$.

由向量相等的定义可以看出, 它有两个要素: 两个向量的模相等, 方向相同(与向量的始点与终点无关!). 通常称与始点与终点无关的向量为自由向量. 下面所研究的向量除特殊声明外, 概指自由向量.

仿照力、加速度的合成法则, 可以定义向量的线性运算.

二、向量的加法

由物理学可以知道: 如果有两个力 F_1 与 F_2 作用在某物的同一点上. 则合力 F 的方向是如图 7.5 所示的以 F_1, F_2 为邻边的平行四边形的对角线的方向. F 的大小为该对角线之长.

仿此可以定义向量的加法. 设 a, b 为不位于同一条直线上的两个向量. 将它们的始点移到同一点 O , 并记 $a = \overline{OA}, b = \overline{OB}$. 以 $\overline{OA}, \overline{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$, 如图 7.6(a) 所示.

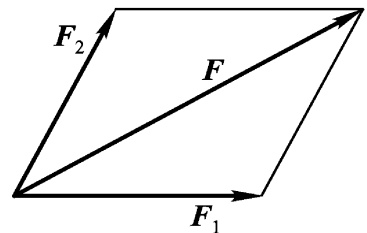


图 7.5

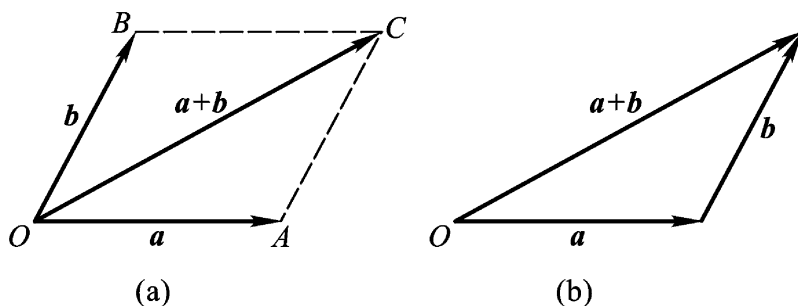


图 7.6

则称 $\overline{OC} = c$ 为 a 与 b 的和向量. 记为 $c = a + b$.

上述用平行四边形对角线确定两个向量和的方法, 常称为向量加法的平行四边形法则.

注意图 7.6(a) 中 $\overline{AC} = b$, 可以简化向量的求和: 自 a 的终点 A , 作 $\overline{AC} = b$, 连接 OC , 则向量 \overline{OC} 即为 a 与 b 的和向量. 如图 7.6(b) 所示. 这种求和常称为向量加法的三角形法则.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量之和的问题中去. 若给定了向量 a, b, \dots, d, e . 则从任一点 O 引出向量 a , 然后从 a 的终点引出 b, \dots 从 d 的终点引出 e . 则以点 O 为始点, 以上述向量折线中 e 的终点为终点的向量记为 s , 则 s 为上述向量 a, b, \dots, d, e 之和, 记为

$$s = a + b + \dots + d + e,$$

如图 7.7 所示.

若 a, b 方向相同或相反时, 可称 a 与 b 平行. 此时 a, b 之和可依三角形法则确定. 即当 a 与 b 方向相同时, 定义其和向量与这两个向量方向相同, 其模为这两个向量模的和. 当 a 与 b 方向相反时, 定义其和向量的方向与 a, b 中模较大向量的方向相同, 而和向量的模等于 a, b 中较大的模与较小的模之差.

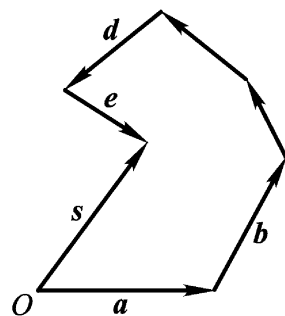


图 7.7

三、向量的减法

定义 $a - b = a + (-b)$. 利用上面求向量和的平行四边形法则可以求出 $a - b$. 如图 7.8 所示. 作出 $a, -b$ 为邻边的平行四边形 $OACB$, 其对角线 \overline{OC} 即为所求. 注意 $\overline{OC} = \overline{BA}$, 为简化运算, 可以定义为:

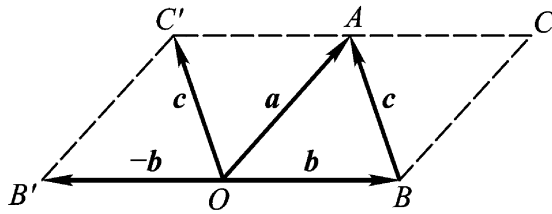


图 7.8

将 a 与 b 的始点移到点 O , 记 $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b$. 则由 \overline{OB} 的终点 B 到 \overline{OA} 的终点 A 的向量 \overline{BA} 即为 $a - b$, 称之为 a 与 b 之差.

上述简化运算求向量之差的方法常称为向量减法的三角形法则.

四、向量与数的乘法

若给定向量 a 和数量 λ , 则定义 λa (或 $a\lambda$) 为向量与数的乘法, 它表示一个向量:

(1) λa 的模等于 a 的模的 $|\lambda|$ 倍 ($|\lambda|$ 为 λ 的绝对值); 常记 $|a|$ 为 a 的模, 因此有 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$. 注意 $|\lambda|$ 表示数 λ 的绝对值, $|a|$ 表示向量 a 的模.

(2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向相同.

当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反.

特别, 当 $\lambda = \frac{1}{|a|}$ 时, 则 $a = \frac{1}{|a|} a$ 为与 a 同方向的单位向

量. 常记为 $e_a = \frac{1}{|a|} a$.

可以验证

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) a &= a + \mu a, \\
 (\mu a) &= (\mu) a, \\
 (a + b) &= a + b.
 \end{aligned}$$

习题 7.2

1. 设 $u = a + b, v = a - b, w = -a$. 求 $u + v + w$.
2. 设 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ 是一个正六边形, 并设 $u = \overline{A_1 A_2}, v = \overline{A_1 A_6}$, 试用 u, v 表出 $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_2 A_3}, \overline{A_3 A_4}, \dots, \overline{A_6 A_1}$.
3. 根据向量加法的平行四边形法则说明 $|a + b| \leq |a| + |b|$, 并指出等号何时成立.
4. 设 $u = -a + 3b - 2c, v = 2a - b + c$, 试用向量 a, b, c 表示 $2u - 3v$.
5. 已知 $\triangle ABC$ 两边的向量 \overline{AB} 和 \overline{AC} , D 是 BC 边上的中点, 试用 \overline{AB} 和 \overline{AC} 表示中线向量 \overline{AD} .

§ 7.3 向量的代数表示

一、向量的坐标表示式

为了能将向量作为研究几何图形的工具, 需要将向量运算用代数表示. 因此先建立空间直角坐标系. 若将向量的始点移到坐标原点 O , 则这个向量完全由其终点所确定; 反过来, 任给空间一点

M , 总可以唯一确定一个向量 \overline{OM} , 因此可以说, 空间的点与始点在原点的向量有一一对应关系. 通常向量 \overline{OM} 可称为点 M 对点 O 的向径. 设点 M 的坐标为 (x, y, z) , 即

$$OA = x, OB = y, OC = z,$$

如图 7.9 所示.

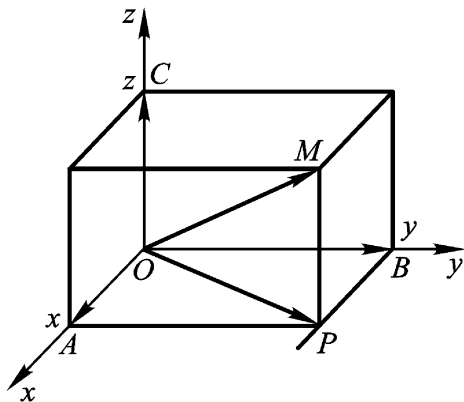


图 7.9

由向量的加法法则可知

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \overline{OA} + \overline{AP} + \overline{PM} \\ &= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.\end{aligned}$$

如果在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别取三个以坐标轴正向为其方向的单位向量, 并依次记为 i, j, k , 则称其为基本单位向量. 由数与向量的乘法运算可知

$$\overline{OA} = xi, \overline{OB} = yj, \overline{OC} = zk.$$

称它们为向量 \overline{OM} 在三个坐标轴上的分向量. 可以记为

$$\overline{OM} = xi + yj + zk. \quad (1)$$

常称(1)式为向量 \overline{OM} 的坐标表示式或向量在坐标轴上的分解. 为了方便, 也常记为

$$\overline{OM} = (x, y, z). \quad (2)$$

二、向量在轴上的投影

若给定一轴 u 及轴外一点 A . 过点 A 引出与轴 u 垂直的平面, 设轴 u 与平面的交点为 A' , 如图 7.10 所示. 则称 A' 为点 A 在轴 u 上的投影.

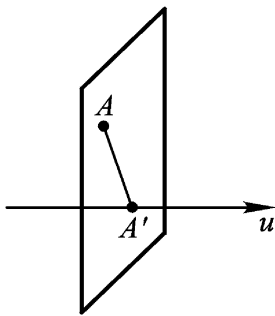


图 7.10

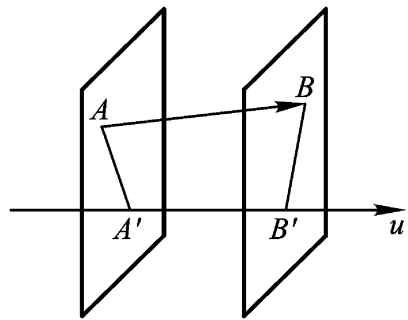


图 7.11

若给定向量 \overline{AB} 及轴 u , 设 A', B' 分别为点 A, B 在轴 u 上的投影, 则称 $\overline{A'B'}$ 为向量 \overline{AB} 在轴 u 上的投影, 如图 7.11 所示. 常记