

高等数学.上册

仇庆久编.

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材,同时也是普通高等教育“九五”国家级重点教材。

本教材思路新,观点高,基础扎实,知识面宽,并注意运用近代数学的思想解决问题。本书分上、下两册。上册内容包括:几何与代数方法初步,导数——函数的分析与研究,积分——函数的分析与研究。

本书可作为高等院校理科各专业的教材,也可供各类专业人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 上册 仇庆久编. —北京:高等教育出版社,
2003 5

ISBN 7 - 04 - 011884 - X

高 ... 仇 ... 高等数学 - 高等学校 -
教材 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 009874 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100009	网 址	http: www hep .edu .cn
传 真	010 - 64014048		http: www hep .com .cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷

开 本	787 × 960 1/16	版 次	年 月第 版
印 张	23.75	印 次	年 月第 次印刷
字 数	430 000	定 价	24.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

责任编辑 薛春玲
封面设计 张楠
责任绘图 吴文信
版式设计 史新薇
责任校对 杨雪莲
责任印制

目 录

第一章 几何与代数方法初步	(1)
§1.1 引言.....	(1)
§1.2 向量.....	(3)
1.2.1 直角坐标系.....	(3)
1.2.2 向量及其表示.....	(4)
1.2.3 向量的内积、外积	(6)
习题	(9)
§1.3 空间中的平面与直线	(10)
1.3.1 空间中的平面及其方程	(10)
1.3.2 空间中的直线及其方程	(13)
1.3.3 平面与直线的关系	(17)
习题.....	(25)
§1.4 二次曲面	(27)
1.4.1 空间曲面	(27)
1.4.2 柱面及其方程	(29)
1.4.3 锥面及其方程	(33)
1.4.4 旋转面及其方程	(37)
1.4.5 直纹面	(41)
1.4.6 常见二次曲面的分类	(44)
习题.....	(47)
§1.5 行列式	(50)
1.5.1 问题的提出	(50)
1.5.2 行列式的定义及性质	(51)
习题.....	(64)
§1.6 矩阵	(65)
1.6.1 矩阵的定义及运算,初等变换.....	(65)
1.6.2 矩阵的秩	(82)
1.6.3 利用矩阵讨论线性方程组的解	(89)
习题	(101)
第二章 导数——函数的分析与研究	(106)
§2.1 引言.....	(106)
习题	(110)
§2.2 极限.....	(111)

目 录

2.2.1	数列的极限	(111)
2.2.2	函数的极限	(113)
2.2.3	极限运算及判别准则	(115)
2.2.4	两个重要的极限	(117)
2.2.5	无穷小量、无穷大量	(121)
2.2.6	函数的连续性	(122)
	习题	(127)
§2.3	导数	(129)
2.3.1	函数的导数概念	(129)
2.3.2	几种初等函数的导数	(133)
§2.4	求导法则	(134)
2.4.1	导数的四则运算	(134)
2.4.2	反函数的求导法则	(135)
2.4.3	复合函数的求导法则	(137)
2.4.4	对数求导法则	(138)
2.4.5	隐函数求导法则	(138)
2.4.6	参数式求导法则	(139)
2.4.7	导数基本公式表	(139)
	习题	(140)
§2.5	导数应用	(141)
2.5.1	应用的依据——三个重要定理	(141)
2.5.2	求极限的洛必达法则	(143)
2.5.3	函数性质及其图形的研究	(145)
2.5.4	平面曲线的曲率	(152)
§2.6	微分	(154)
2.6.1	微分的定义、几何意义	(154)
2.6.2	微分的运算法则	(155)
2.6.3	微分的应用	(156)
	习题	(160)
§2.7	多元函数	(161)
2.7.1	多元函数的概念	(161)
2.7.2	多元函数的极限	(162)
2.7.3	多元函数的连续性	(165)
2.7.4	多元函数的偏导数	(166)
2.7.5	多元函数的全微分、方向导数	(167)
2.7.6	多元函数的复合	(170)
2.7.7	应用	(173)
	习题	(177)

目 录

第三章 积分——函数的分析与研究	(182)
§3.1 积分定义	(182)
§3.2 积分性质与计算	(187)
3.2.1 定积分的性质, 牛顿 - 莱布尼茨公式	(187)
3.2.2 不定积分的定义、性质、意义与积分法	(189)
3.2.3 定积分的计算	(207)
3.2.4 椭圆积分	(210)
习题	(211)
§3.3 多重积分	(216)
3.3.1 二重积分的定义、性质	(216)
3.3.2 二重积分的计算, 直角坐标、极坐标下的计算公式	(219)
3.3.3 二重积分换元积分法	(223)
3.3.4 三重积分及多重积分	(225)
习题	(235)
§3.4 曲线积分、曲面积分	(238)
3.4.1 第一型曲线积分定义、性质、计算公式	(238)
3.4.2 第二型曲线积分定义、性质、计算公式	(242)
3.4.3 第一型曲面积分定义、性质、计算公式	(247)
3.4.4 第二型曲面积分定义、性质、计算公式	(252)
3.4.5 格林公式、斯托克斯公式、高斯公式	(260)
习题	(275)
§3.5 积分的应用	(277)
3.5.1 曲线长度、曲面面积、立体体积	(277)
3.5.2 力、力矩、惯性矩、转动惯量	(284)
3.5.3 场论——梯度、散度、旋度	(290)
习题	(299)
§3.6 反常积分, 含参量的积分	(301)
3.6.1 收敛性与发散性、判别法	(301)
3.6.2 含参量的积分, 一致收敛概念	(309)
3.6.3 斯蒂尔切斯积分	(316)
习题	(317)
§3.7 复变量函数的微积分	(318)
3.7.1 复数与复映射	(318)
3.7.2 复映射的极限、微积分	(322)
习题	(332)
§3.8 勒贝格积分	(333)
3.8.1 勒贝格积分的定义, 黎曼积分的推广	(333)
3.8.2 勒贝格积分的重要性质	(336)

目 录

3.8.3 黎曼积分与勒贝格积分的比较	(338)
3.8.4 勒贝格平方可积空间	(340)
习题	(340)
附录	(341)
Fourier 变换表	(341)
习题答案	(345)
参考文献	(365)

前 言

1996 年上半年,本书作者向原国家教委呈报《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项申请书》,1997 年 5 月得到批准,本书正式立为《“九五”国家级重点教材》项目。自 1996 年 9 月起,作者领导的教学小组在南京大学基地班开始进行教学改革试点,经过 3 年的教学实践,1999 年 9 月开始,又在南京大学基础学院进行第 4 次教学,边教、边改、边总结,并在 2000 年初,由原国家教委高等学校教学与力学教学指导委员会主任姜伯驹院士推荐作为“面向 21 世纪课程教材”出版。2000 与 2001 两个学年继续在南京大学基础学院进行第 5、6 次教学,在此基础上写成了现在这本书。

20 世纪 90 年代前期,作者得知南京大学物理系卢德馨教授锐意改革,在教学实践基础上,为南京大学基础学科教学强化部写了一本《大学物理学》,集力学、热物理、电磁学、近代物理于一书,思路新、观点高,基础扎实、知识面宽,体现了物理学教学大力度的改革,这对作者确实是一个很大的震动。多年来,不少数学家对非数学类专业的高等数学课程进行了教学改革,编写了不少好教材。作者在卢德馨教授的启发下,想进一步考虑如何做到: 传授数学基本知识与加强数学素质教育相结合; 培养数学思维方法与解决实际问题的能力相结合;

快速发展的现代数学与大学数学教学相结合。通过这些结合,使学生不仅学到必要的数学知识,而且以教材中精选的数学知识为载体,得到数学思维的训练和数学素质的提高,达到牢固掌握并灵活运用本学科领域所需的数学思想和工具,特别是近代数学的思想和工具的水平,使数学成为他们未来工作中赖以生存的“强者的翅膀”,从而成为在新世纪中有创造能力的、本学科领域中的开拓者。这便是作者进行高等数学课程体系、教学内容、教材和教学手段改革的目的。

本书是这样安排的:

第一章介绍几何与代数方法初步。在中学所学初等数学知识的基础上,把学生对数学思维方法的认识提高一步,通过向量和向量空间的引入,强调几何与代数方法的渗透与结合。把空间解析几何与线性代数作为基本知识和载体,使学生掌握空间常用的几何形体(包括直线、平面、二次曲面等)的代数表示,并熟练掌握一次、二次代数方程的几何图形。然后,提出几何形体在不同坐标架下的表示并引入坐标变换,从而加强学生对几何方法与代数方法相互渗透的理解和使用。进一步,把从中学所学的二元一次代数方程组与向量的运算引入行列式,并拓广到矩阵,再引申到一般线性代数方程组。如此在初等数学知识基础上形

成“几何方法与代数方法相互渗透”的思维,使刚离开高中踏进大学的学生既不感到所学知识的跳跃太大,又能在认识问题和思考问题方面有一个较大的提高。

第二、三、四章以函数的分析与研究为主线,介绍经典微积分的主要内容:微分、积分、级数。重点强调这些概念的来龙去脉、发展过程、定义、性质、运算,同时在每个部分都以极限为基础,给微分、积分、级数以准确的定义,使学生对数学的严格性、逻辑性、系统性有进一步深入的理解。在熟练掌握有关的基本知识后,结合物理、几何等实例,强调微积分的应用,使学生深刻认识到微积分是研究函数的有力工具。然而,也必须指出,这些工具决非万能的,还必须引入新的概念与新的工具,由此介绍勒贝格(Lebesgue)积分的基本概念、性质、应用,为第五章奠定基础。第二、三、四章是本教材的核心部分,作者致力于从经典微积分到近代分析的自然过渡,引导学生在牢固掌握经典微积分工具的前提下逐步过渡到对现代数学思维方法的理解及对其重要数学工具的应用。

第五章是微分方程和傅里叶(Fourier)分析,以物理学及其应用为背景,介绍常、偏微分方程的基本理论、数值方法等,自然过渡到傅里叶分析与谱分析。在介绍傅里叶分析的基本理论和应用之后,把在现代科技理论和实际应用中起特殊作用的小波分析——近二十余年才发展起来的重要分析工具——及其应用作为本章的结束。

由于20世纪后几个十年中,自然科学的许多领域更多地用到近代数学的知识,因此第六章将步入现代数学的大门,以介绍空间结构的点集拓扑、泛函分析、近世代数的基本知识开始,继而是分布理论,然后把刻画宇宙本质的、作为现代科技基础的非线性科学介绍给学生。一是为了后行课的需要,二是为大学生准备必要的近代数学基础知识。

本教材所选用的知识载体跨度较大,为使学生顺利掌握知识、学会数学思维,我们还着力于教学手段的改革,以形象思维启发抽象思维,以几何直观引导分析概念,并辅助以启发性的思考题,形成一个既可作为辅助教材又可独立使用的完整的多媒体资料。多媒体辅助资料的使用,使教材中知识载体的跨度显得相对稳定。这可以说是我们在教学改革过程中的另一个重要措施和大胆尝试。

本教材是在教育部直接领导下,在江苏省教育厅和南京大学校领导的关怀、指导、支持下进行改革的。教学小组的同志,南京大学苏维宜、姚天行、尹会成教授,马传渔、江惠坤副教授为教材的初稿分别撰写了许多章节,配以习题,并进行教材的试教;苏维宜教授承担教材的试教、多次修改、统稿工作;吴兆金副教授为本教材的配图和题解做了大量有益的工作;南京大学基础学院的领导和同事们,卢德馨院长,赵航东女士等,对于本教材的改革与使用都给予大力支持,在此一并致谢。

由于作者水平有限,对教学改革的理解还很不深刻,教材的改革思路、取材、

前 言

编写等方面错误在所难免,还存在许多不尽如人意之处,敬请专家、教授和读者不吝赐教。

作 者

2003 年 1 月于南京大学

第一章 几何与代数方法初步

本章介绍高等数学中用到的最基本的几何与代数方法,包括向量、三维空间中平面、直线与常见的二次曲面的方程;行列式、矩阵的概念与性质以及它们在解多元线性代数方程组中的应用.

§ 1.1 引言

数学是研究事物(对象)的存在形式与数量关系的科学,它是一切科学的基础.近年来,数学已被诸多领域的科学家称为“数学科学”,足见其对科学发展所起的重要作用及产生的深远影响.

当代科学的发展需要数学,需要用数学工具定量地、定性地刻画事物内在的规律,通过建立数学模型,使用数学方法并借助电脑的计算与控制,从而得到所需的结果,以达到高新科技的各种技术特性与数据的要求.数学已渗透到各个学科中,推动着科学技术的发展.同时,数学的发展也需要当代科学,如物理学、天文学、生命科学、地球科学、计算机科学、乃至一切科学,它们都是数学的源泉与数学发展的动力.大自然就是在各科学分支的相互联系、相互渗透、相互交叉、相互推动的微妙关系中被认识、被研究、被改造、被发展,从而服务于人类的.

数学在研究事物(对象)存在形式与数量关系时,有其自身的特点其着眼点不仅是事物的具体内容,而且是事物的内在结构.通过具体事物,分析其存在的空间形式、自身的以及与其它事物之间的数量关系,总结、升华,得到普遍规律与数学模型,使数学科学具有高度的抽象性和广泛的应用性.

那么,如何研究事物存在的空间形式与数量关系呢?数学科学蕴含着丰富的思维方法和技巧,而高等数学则着重介绍数学的基本概念、重要理论、解题技巧,展示数学的思维方法,进行数学素质教育,培养使用数学工具的能力.这里,首先给出一个例子,就是作为数学思维方法之一的几何方法与代数方法的结合.

早在 17 世纪,法国科学家笛卡儿(Descartes, R.)在他的数学著作《几何学》中,就已阐明了关于解析几何的思想.笛卡儿将空间形式的研究与相应的数量关系的研究结合起来,显示了极大的优越性.他的做法是:首先引入“坐标系”,然后将空间中的点与坐标系中的数(或有序的数组)建立起“一一对应”关系,从而把对空间形式的研究与对坐标系中数的关系的研究结合起来.读者记得,在平面几何的证题术中,不太提倡用代数的方法,那是初等数学所希望遵循的证题思路,

高等数学却不再受这个限制.

在直线上建立(一维)坐标系的过程如下:在该直线上任取一个点 O ,使其对应于数 0 ,称 O 为原点.在直线上指定一个方向,例如向右为正向(则向左为负向),再取一个单位长度(如图 1.1.1),我们称赋予原点、正向与单位长度的直线为坐标轴,于是建立了直线上的坐标系.从原点 O 起,将所有正实数按其大小排列在坐标轴的正方向,负实数排列在负方向,这样就实现了数轴上的点与实数之间的一一对应.于是数轴上的任一点 M 与一个实数相对应,反之亦然.称实数为点 M 的坐标.此时数轴上的任意两点 A 与 B 之间的距离用 (A, B) 表示

$$(A, B) = |x_A - x_B|,$$

其中 x_A 与 x_B 分别为 A 与 B 的坐标.

类似地,在平面上可建立(二维)坐标系,只是坐标轴为两条互相垂直的直线,其交点取为坐标原点 $O(0,0)$,再取定单位长度,并用一对有序实数 (α, β) 表示平面上任一点 P 的坐标(如图 1.1.2),此时平面上的任意两点 $A(\alpha_1, \beta_1)$ 与 $B(\alpha_2, \beta_2)$ 之间的距离 (A, B) 表示为

$$(A, B) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2.$$

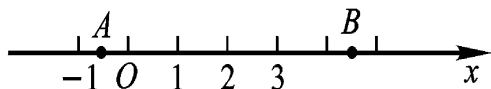


图 1.1.1

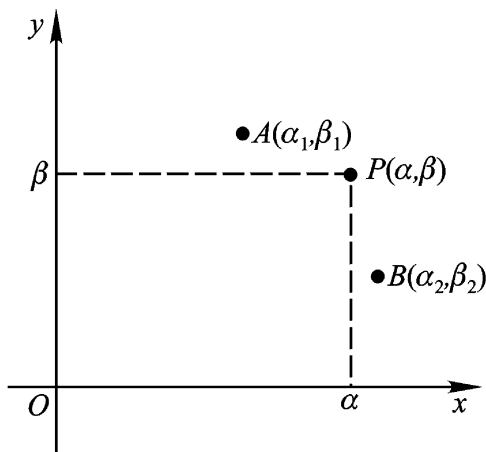


图 1.1.2

当然,在空间可以建立(三维)坐标系.

借助于上述方法,可以用数量关系刻画平面上的曲线,所得的关系式称为曲线方程;还可以刻画空间中的曲线与曲面,所得的关系式称为曲线方程与曲面方程.这是问题的一个方面.

问题还有另一方面:为了讨论事物数量之间的关系,我们必须深入了解并掌握数量关系的几何结构;同时,由于几何的直观性,用几何语言描述研究对象并展现事物的几何结构,能更形象、更本质地呈现事物之间的数量关系,而且往往能对较为复杂的数量关系赋予更为生动的感性认识,也更有助于对问题的理解

与研究.

以上两个方面可理解为“几何方法与代数方法的结合”,解析几何这门成熟的数学课程中就充满了几何方法与代数方法相结合的实例.

§ 1.2 向 量

中学数学教程中已经学习过平面解析几何,我们从讨论空间中的几何图形的代数表示开始.

1.2.1 直角坐标系

类似于平面直角坐标系的建立,在空间中取定一点 O 作为坐标系的原点,过 O 点引三条互相垂直的直线作为坐标轴,分别称为 Ox 、 Oy 、 Oz 轴.约定三个坐标轴的正向如图 1.2.1 所示,三轴的正向成右手系(与物理学中所使用的右手坐标系方向一致).取定单位长度置于三个坐标轴上,于是我们建立了空间中的(三维)直角坐标系,把这个已建立了直角坐标系的空称为三维欧几里得空间,简称三维欧氏空间,记为 \mathbf{R}^3 .

\mathbf{R}^3 中任意一点 P 与三个有序实数 α 、 β 、 γ 建立如下的对应关系:

过 P 点作三个平面,分别垂直于 Ox 、 Oy 、 Oz 轴,三平面依次与三坐标轴相交于 G 、 M 、 N .设 G 在 Ox 轴上的坐标为 α , M 在 Oy 轴上的坐标为 β , N 在 Oz 轴上的坐标为 γ ,于是这三个有序实数便由点 P 唯一地确定,记为 $P(\alpha, \beta, \gamma)$,并称 (α, β, γ) 为 P 的直角坐标.反之,任一组三个有序实数 (α, β, γ) 给定后,分别在 Ox 、 Oy 、 Oz 轴上取以 α 、 β 、 γ 为坐标的点 G 、 M 、 N ,过 G 、 M 、 N 分别作与 Ox 、 Oy 、 Oz 轴垂直的平面,相交于唯一的点,记为 $P(\alpha, \beta, \gamma)$.这样,在三维欧氏空间 \mathbf{R}^3 的直角坐标系中,点 P 与数组 (α, β, γ) 建立了一一对应关系,“形”(点 P)与“数”(数组 (α, β, γ))实现了“统一”.

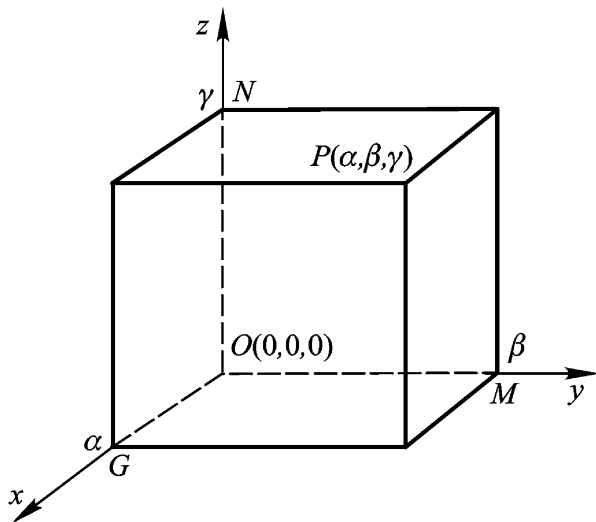


图 1.2.1

现在我们用另一个观点来看 \mathbf{R}^3 中的点 P .把点 P 看作是以原点 O 为起点、以 P 为终点的“有向”线段,记为 \overline{OP} ,其长度为 $|\overline{OP}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,并把有向线段 \overline{OP} 称为一个向量(或矢量),把数组 (α, β, γ) 称为向量 \overline{OP} 的坐标.显然,“形”(向量 \overline{OP})与“数”(数组 (α, β, γ))建立了一一对应关系.

在新的观点下,我们会得到什么新的内涵呢?

1.2.2 向量及其表示

定义 1.2.1(向量) 我们称 \mathbf{R}^3 中既有方向又有大小的一个量(有向线段)为向量. 向量的(正)方向是从它的起点 A 到它的终点 B , 记为 \overline{AB} ; 向量的大小就是它的长度, 也称为向量的模, 记为 $|\overline{AB}|$.

注 1 由向量的定义可知, 一个向量的起点可以是空间中的任何点, 起点不一定在原点. 凡是以原点 O 为起点的向量 \overline{OA} , 就可以用它的终点 A 的坐标 $A(x, y, z)$ 作为该向量的坐标表示

$$\overline{OA} = (x, y, z).$$

在三维欧氏空间 \mathbf{R}^3 中, 所有向量的全体组成一个集合, 称其为“向量空间”, 记为 $X = \{\mathbf{a}: \mathbf{a} \text{ 为 } \mathbf{R}^3 \text{ 中的向量}\}$. 向量空间 X 中的“元素”(简称“元”)就是向量.

中学物理教程中已经学到, 力是有方向与大小的物理量, 因此, 可用向量空间中的向量表示物理学中的力 \mathbf{F} , 还可以用向量表示许多既有方向又有大小的量.

在新建立的向量空间 X 中, 可以引入“元的运算”: 相等、加法、数乘、内积、外积、等等.

1. 向量的相等

若两个向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的大小相等、方向相同(即正方向一致), 则称这两个向量相等, 记为 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

易见, 若两向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 起点相同, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 的充要条件是它们的终点相互重合. 也不难看出, 起点与终点分别重合的两个向量是相等的, 但两个相等的向量并不要求其起点与终点分别重合.

向量相等的定义允许两个向量不在同一个位置(见图 1.2.2), 只要其方向相同, 大小相等. 又由于一个确定的方向在平行移动时不变, 于是我们约定, 任一向量可以进行平行移动, 并称为自由向量. 今后如果没有特别声明, 我们所指的向量是自由向量.

注 2 数学上定义两个量 α 、 β “相等”, 记为“ $\alpha = \beta$ ”, 须满足相等的三公理:

自反性 $\alpha = \alpha$;

对称性 $\alpha = \beta$ 蕴含 $\beta = \alpha$;

传递性 $\alpha = \beta$ 与 $\beta = \gamma$ 蕴含 $\alpha = \gamma$.

显然, 关于向量相等的定义满足这三条公理.

2. 向量的加法与数乘

加法 假设 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 为两个自由向量, 且 \mathbf{b} 的起点已与 \mathbf{a} 的终点重合(如图 1.2.3), 它们的“和”, 记为 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 定义为一个向量

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (1.2.1)$$

向量 \mathbf{c} 的起点是 \mathbf{a} 的起点, 而终点是 \mathbf{b} 的终点. 或等价地, 两向量的和 \mathbf{c} 是以 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 为边所作平行四边形 $OACB$ 的对角线(图 1.2.3).

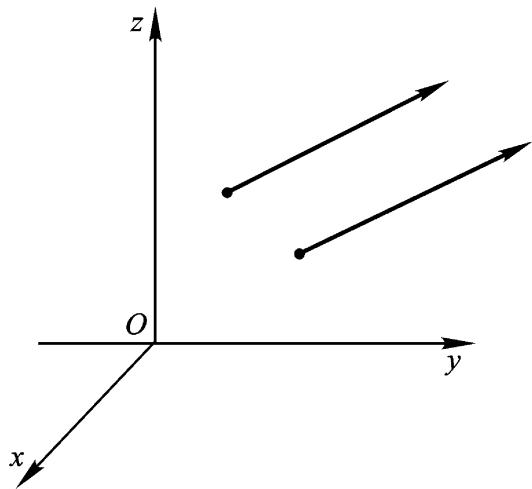


图 1.2.2

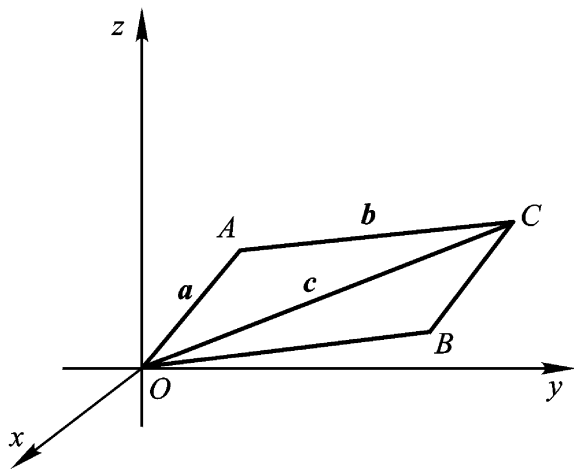


图 1.2.3

数乘 向量 \mathbf{a} 与实数 λ 的“数乘”, 记为 $\lambda \mathbf{a}$, 定义为一个向量 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}$, 此向量以 \mathbf{a} 的起点为起点, 模为

$$|\mathbf{c}| = |\lambda| |\mathbf{a}|, \quad (1.2.2)$$

方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 与 \mathbf{a} 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, 它与 \mathbf{a} 的方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda \mathbf{a}$ 为零向量.

我们约定: 零向量 $\mathbf{0}$ 的模为 0, 其方向不定(有时称为迷向向量).

至此, 在集合 X 中定义了向量的加法与数乘运算. 现在我们用坐标来表示它们.

向量的坐标表示

首先用向量 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ 、 $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ 、 $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ 表示三个坐标轴上的三个单位向量. 于是, 终点为 $A(a_1, a_2, a_3)$ 的向量 $\overline{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ 可表示为

$$\overline{OA} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3, \quad (1.2.3)$$

其长度为 $|\overline{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

向量加法的坐标表示

设两向量为 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 、 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则由向量的加法定义可得加法的坐标表示

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3). \quad (1.2.4)$$

向量空间 X 中的向量加法的运算规则

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (\text{交换律})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad (\text{结合律})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad (\text{存在零元})$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}. \quad (\text{存在逆元})$$

以 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 为起点、 $P = (x, y, z)$ 为终点的向量 $\overline{P_0 P}$ 的表示式为

$$\begin{aligned} \overline{P_0 P} &= \overline{OP} - \overline{OP_0} \\ &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) - (x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3) \\ &= (x - x_0)\mathbf{e}_1 + (y - y_0)\mathbf{e}_2 + (z - z_0)\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

其长度为 $|\overline{P_0 P}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

向量数乘的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, α 为实数, 则由向量 \mathbf{a} 与数 α 的乘法定义可得数乘的坐标表示

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3), \quad (1.2.6)$$

其长度为 $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| |\mathbf{a}|$.

图 1.2.4 所绘的图是向量数乘的几何表示.

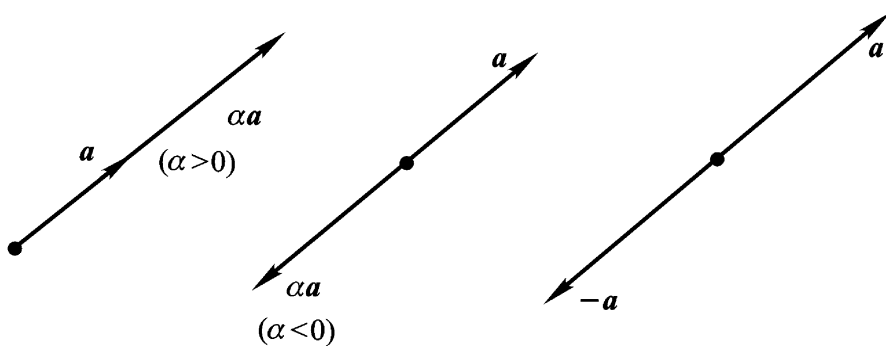


图 1.2.4

向量空间 \mathbf{X} 中的向量数乘的运算规则

$$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a}), \quad (\text{结合律})$$

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \quad (\text{分配律})$$

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}. \quad (\text{分配律})$$

1.2.3 向量的内积、外积

向量之间还有两种有用的重要运算: 向量的内积与向量的外积.

1. 向量的内积及其坐标表示

内积 两个向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的内积, 定义为一个数, 记为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (1.2.7)$$

其中 θ 是两向量之间的夹角. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 称向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 正交(垂直), 记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

如果 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 都不是零向量, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 正交的充分必要条件是: 其内积为 0, 亦

即, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 当且仅当 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

我们规定, 零向量与任何向量正交.

向量空间 X 中的向量内积的运算规则

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{交换律})$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad \lambda \text{ 为常数}, \quad (\text{结合律})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (\text{分配律})$$

定理 1.2.1 (向量内积的坐标表示) 向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 与 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 的内积的坐标表示是

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.2.8)$$

证 由定义, 写出单位向量 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ 、 $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ 、 $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ 的内积

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1;$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0,$$

并定义一个称为克罗内克 (Kronecker . L.) 的符号

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

于是, $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3)$, 并且有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned}$$

定理得证.

特别地, 向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 的模 $|\mathbf{a}|$ 的坐标表示为

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.2.9)$$

当 \mathbf{a}, \mathbf{b} 都不是 0 向量时, 其夹角的余弦值表示为

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1.2.10)$$

定义 1.2.2 (方向余弦) 记向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{e}_1 的夹角为 α , 与 \mathbf{e}_2 的夹角为 β , 与 \mathbf{e}_3 的夹角为 γ , 称 α, β, γ 为向量 \mathbf{a} 的方向角, 方向角的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.

由

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3,$$

两边与 \mathbf{e}_k 作内积, 并利用 \mathbf{e}_k 的内积公式, 得到 $a_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2, 3)$, 故

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3.$$