第一章　空间解析几何初步

用代数方法研究空间几何图形，就是空间解析几何学，它是平面解析几何的拓广．空间解析几何是学习多元函数微积分的必要基础。

本章首先建立空间直角坐标系，引进向量概念，简单介绍一下向量的运算与性质；然后介绍空间曲面与曲线，空间的平面与直线；最后介绍一下常用的二次曲面．

1.1　空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

过空间一个定点 O,作三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,且一般具有相同的长度单位．这三条数轴分别称为 x 轴(横轴),y 轴(纵轴),z 轴(竖轴),统称坐标轴．它们的方向通常按‘右手规则’确定 即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的方向．这样确定的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系，定点 O 称为坐标原点(图 1.1)

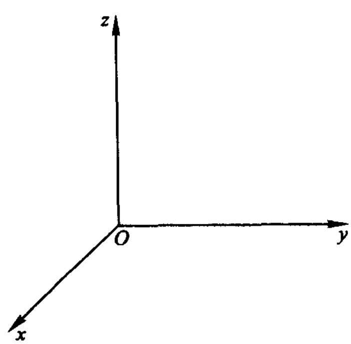

图 1.1

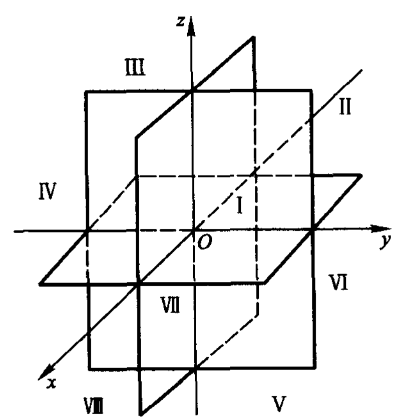

图 1.2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样的平面统称坐标面．例如 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面．这样互相垂直的三个坐标面将空间分成

八个部分,每一个部分称为一个卦限,含有 x 轴、y 轴、z 轴正方向的那部分称为第一卦限.(图 1.2)

建立了空间直角坐标系后，就可以建立起空间某一点与三元有序数组的对应关系.设 M 为空间一点，过 M 点作三个平面分别垂直 x 轴，y 轴，z 轴.三个平面与三个轴的交点依次为 P,Q,R(图 1.3).这三点在 x 轴，y 轴，z 轴上的坐标分别为 x,y,z.于是空间一点 M 就确定了一个有序数组(x,y,z).反过来，设给定了数组(x,y,z),我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴取坐标为 z 的点 R，然后分别过 P,Q,R 作三个依次垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面.那么这三个平面的交点 M 便是由数组（x,y,z)所确定的点。

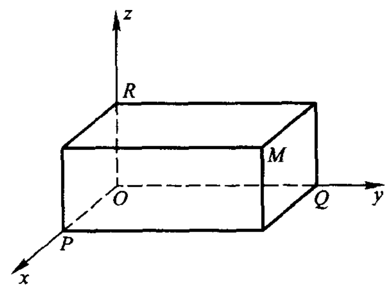

图 1.3

这样，通过空间直角坐标系，空间点 M 与三元数组（x,y,z)之间就建立了一一对应的关系，这有序数组（x,y,z)便称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标,纵坐标,竖坐标.

坐标轴及坐标平面的点，其坐标显然有一定特点.例如:x 轴上的点的坐标为$(x,0,0)$.yOz 坐标平面上的点的坐标为（$0,y,z$)原点 O 的坐标为$(0,0,0)$

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 1.4).

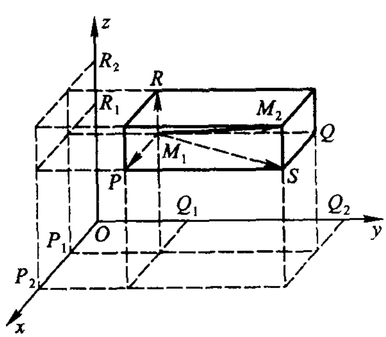

图 1.4

如图所示可知:$|M_1M_2|^2=|M_1S|^2+|SM_2|^2$,而 $|M_1S|^2=|M_1P|^2+$

$|M_1Q|^2$，$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|$，$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|$，$|SM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|$，所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.1.1)$$

(1.1.1)式就是空间两点的距离公式．特别地，点 $M(x, y, z)$到坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为：

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1.1.2)$$

例 1　求证以 $M_1(4,1,9)$，$M_2(10,-1,6)$，$M_3(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形．

证　$|M_1M_2| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$，

$|M_2M_3| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98}$，

$|M_3M_1| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2} = 7$．

所以，$|M_1M_2| = |M_3M_1|$，且 $|M_1M_2|^2 + |M_3M_1|^2 = |M_2M_3|^2$，即得 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形．

习题　1.1

1.求点(a,b,c)关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标

2.在 y 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$等距离的点．

3.求点 $M(4,-3,5)$到各坐标轴及坐标原点的距离．

4.求顶点是 $A(-3,-1,4)$、$B(1,3,2)$、$C(3,1,1)$ 的三角形的周长．

*1.2　向量及其加减法、向量与数的乘法

一、向量概念

在实践中，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如物理学中的力、力矩、位移、速度、加速度等等，这一类量称为向量．

习惯上，常用一条有方向的线段（即有向线段）来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 M_1M_2（图 1.5），有时也用一个黑体字母或书写时用一个上面加箭头的字母表示，例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{F}$ 或a，i，r，F 等等．

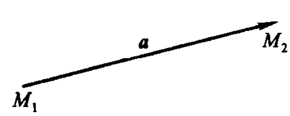

图 1.5

以坐标原点 O 为起点,向空间一点 M 引向量OM ，称这个向量为点 M 对于点 O 的向径.

在实际问题中，有些向量与起点有关，有些向量与起点无关由于一切向量的共性是它们的大小和方向，所以数学上只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，这样的向量称为自由向量（简称向量）.所以，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$.$\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同时,就说它们是相等的,即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,这就意味着,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.在自由向量之间，平行与共线是同义语，初学者应注意

向量的大小又称向量的模.向量 M_1M_2 , $\boldsymbol{a}$ 的模依次记为 $|M_1M_2|$, $|\boldsymbol{a}|$.模等于 1 的向量称为单位向量模等于零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$,零向量的起点与终点重合，方向可看作任意.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行.向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

二、向量的加减法

向量的加法规则如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $AB=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $BC=\boldsymbol{b}$,连接 AC(图 1.6),那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

上述方法称为向量相加的三角形法则.

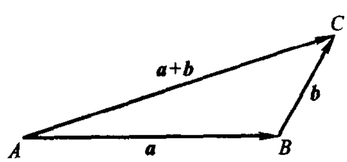

图 1.6

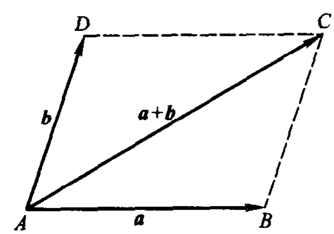

图 1.7

另外与向量加法的三角形法则相等价的有平行四边形法则：当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行时作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$ 连接对角线 AC(图 1.7),则向量 AC就等于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法有下列运算规律：

(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.(图 1.8).

由于向量的加法满足交换律和结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$相加可写成：

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

并按向量加法的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一个向量的终点作为下一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求向量的和.图 1.9 中给出 5个向量相加的例子：

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

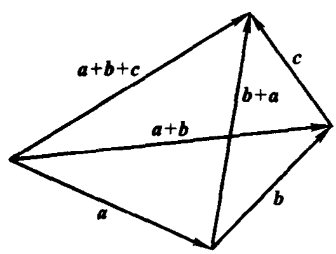

图 1.8

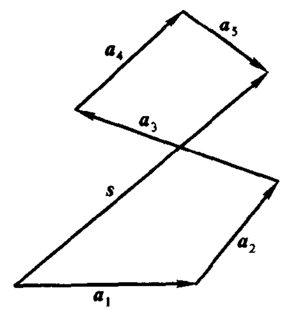

图 1.9

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$,由此,规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的减法：

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

特别当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

三、向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,这里 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

它的方向由实数 λ 的符号确定 当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同：当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

特别,当 $\lambda=0$ 时 $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;当 $\lambda=\pm 1$ 时有：

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a} \qquad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

显然 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 是平行的(不管 $\lambda>0$ 还是 $\lambda<0$),故有下列定理.

定理 1.2.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ （证明从略）

向量的数乘运算符合下列运算规律：

(1)结合律　$\lambda(\mu \boldsymbol{a})=\mu(\lambda \boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积规定，由于 $|\boldsymbol{a}|>0$ 故 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同，又因

$$||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|$$

即 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相等，因此

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \text{ 或} \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a,$$

这表示一个非零向量除以它的模，其结果是一个与原向量方向相同的单位向量.

例 1　在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边的中点，设 $AB=\boldsymbol{c}$，$AC=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量 DA、DB 和 DC(图 1.10).

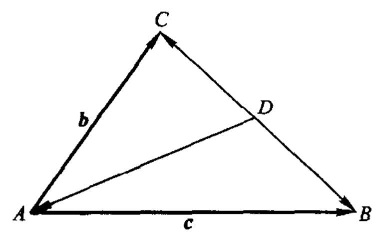

图 1.10

解　因为　$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$，即

$$\boldsymbol{b}+2\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{c},$$

得　$\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$，

又得 $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$

又因为 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$

所以，

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

四、向量的坐标

1　向量在坐标轴上的分向量与向量坐标.

设 M_1 为空间一点，它的坐标为(x_1, y_1, z_1)，则对于向量 OM_1 有分解式：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_1}&=\overrightarrow{OM'_1}+\overrightarrow{M'_1M_1}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'_1}+\overrightarrow{M'_1M_1}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.\end{aligned}$$

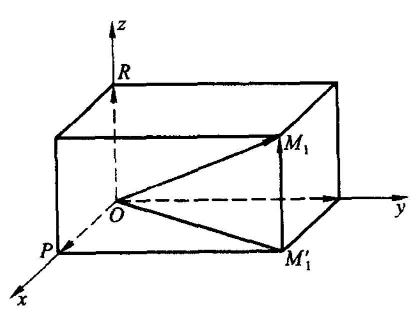

图 1.11

习惯上我们把 x 轴、y 轴和 z 轴上沿正向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,和 $\boldsymbol{k}$,称之为坐标系的单位向量

由 于

$$OP = x_1\boldsymbol{i},$$

$$OQ = y_1\boldsymbol{j}.$$

$$OR = z_1\boldsymbol{k}.$$

从而

$$OM_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}. \tag{1.2.1}$$

(1.2.1)式称为向量 OM_1 的坐标表示式（或称向量 OM_1 的坐标分解式），$x_1\boldsymbol{i}, y_1\boldsymbol{j}, z_1\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 OM_1 在 x 轴上，y 轴上，z 轴上的分向量，而 x_1, y_1, z_1 称为向量 OM_1 的坐标，并可记作

$$OM_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

这与点的坐标表示相同，但是从上下文的叙述中，还是可以区分的

对起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$而终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$的向量 M_1M_2,因为

$$\begin{aligned} M_1M_2 = OM_2 - OM_1 &= x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

所以向量 M_1M_2 的坐标表示式为

$$M_1M_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

特别是基本单位向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0), \quad \boldsymbol{j} = (0,1,0), \quad \boldsymbol{k} = (0,0,1).$$

有了向量坐标后，可简化向量加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下：

设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$

即

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

于是利用向量加法的交换律和结合律，以及向量与数乘的结合律与分配律，有：

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k}.$$

或

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见，对向量进行加、减及数乘，只需对向量的各个坐标进行相应的运算就行了

前面定理 1.2.1 指出,当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,按坐标表示式为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z).$$

这相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda. \qquad (1.2.2)$$

注　当 a_x,a_y,a_z 有一个为零时,例如 $a_x=0,a_y\neq0,a_z\neq0$,这时(1.2.2)式应理解为

$$\begin{cases} b_x=0, \\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}. \end{cases}$$

当 a_x, a_y,a_z 有两个为零时，可类似理解

2. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向表示，也可以用它的坐标表示，为了应用上的方便，下面来找出两种表示的关系 .

首先，我们引进两向量夹角的概念，设有两个非零的量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,任取空间一点 O ,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,规定不超过 π 的正向夹角 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 1.12).记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量，规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值 .设非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$(图 1.13) 与三条坐标轴的夹角顺次是 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$)则称 α,β,γ 为向量$\boldsymbol{a}$ 的方向角

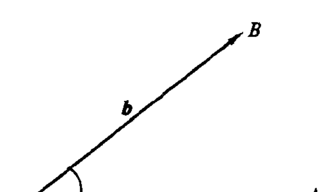

图 1.12

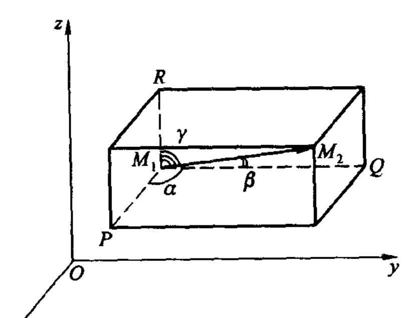

图 1.13

不妨设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(a_x, a_y, a_z)$,由立体几何容易知道

$$\begin{cases} a_x = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ a_y = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ a_z = |\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

公式(1.2.3)中出现的 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 向量的方向通常可用它的方向余弦表示.

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{|\overrightarrow{M_1P}|^2 + |\overrightarrow{M_1Q}|^2 + |\overrightarrow{M_1R}|^2}$$

因 $|\overrightarrow{M_1P}| = a_x$, $|\overrightarrow{M_1Q}| = a_y$, $|\overrightarrow{M_1R}| = a_z$,故

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.2.4}$$

再把公式(1.2.4)代入公式(1.2.3)中,当 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \neq 0$ 时

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

(1.2.4)与(1.2.5)分别是用向量的坐标表示向量模和方向余弦的公式.

例 2 已知 $M_1(0,-2,5)$ 和 $M_2(2,2,0)$,求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及方向和它一致的单位向量.

解 因为 $\overrightarrow{M_1M_2} = (2-0,2+2,0-5) = (2,4,-5)$,所以,$|M_1M_2| = \sqrt{2^2+4^2+(-5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}, \cos\beta = \frac{4}{3\sqrt{5}}, \cos\gamma = \frac{-5}{3\sqrt{5}}$$

设 $\boldsymbol{e}_a$ 为和 M_1M_2 方向一致的单位向量,则

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|} = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{-5}{3\sqrt{5}}\right).$$

习题 1.2

1.设 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{g} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$,试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{f} - 2\boldsymbol{g}$.

2 把△ABC 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1,D_2,D_3,D_4 再把各分点与点 A 连接,试以 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

3.设已知两点 $M_1(3\sqrt{2},2)$和 $M_2(2,0,3)$计算向量 $M_1\vec{M_2}$ 的模，方向余弦和方向角

4.求向量 $a=i+\sqrt{2}j+k$ 与各坐标轴间的夹角

5 分别求出向量 $a=i+j+k, b=2i-3j+5k$ 的模并分别用单位向量 e_a, e_b 表达 a, b

6.求平行于向量 $a=(-3,4,-5)$的单位向量

*1.3 向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2,以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 M_1M_2,由物理学知,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

这里 θ 为$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 1.14)

由此看到,两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 确定了一个数量 :$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,类似这样，可以引入向量的数量积 .

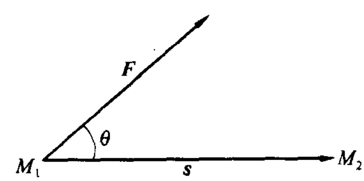

图 1.14

定义 1.3.1 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个向量,θ 为它们的夹角，则称乘积$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积或标量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由数量积的定义，上述作功问题可表示为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$,并可推得：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

这是因为夹角 $\theta=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{a}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2)若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,由于$|\boldsymbol{a}|\neq0, |\boldsymbol{b}|\neq0$,所以 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$(称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互正交或垂直) .反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,那么 $\theta=\frac{\pi}{2}, \cos\theta=0$, 于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

数量积有以下运算规律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)分配律 :$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(3)结合律 :$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.（其中 λ 为数）.

上述证明从略.下面给出向量数量积的坐标表达式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，按数量积的运算规律可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &\quad + a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} \\ &\quad + a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$,

因而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

这就是两个向量的数量积的坐标表达式.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,故当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，有：

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

利用数量积的坐标表示式及向量模的坐标表示式代入上式，就得；

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示.从中看出两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充分必要条件是：

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 1 设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,求 x.

解 因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,得

$$x\times3+5\times1+(-1)\times(-4)=0$$

即 $3x=-9$,所以 $x=-3$.

二、两向量的向量积

向量积是两个向量之间的另一种“乘法”运算,运算的结果还是一个向量,在研究物体转动问题时，所涉及的力矩就是用向量积来规定的.

定义 1.3.2 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量,向量 $\boldsymbol{c}$ 由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式决定：

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角；

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面（即 $\boldsymbol{c}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$,又垂直于 $\boldsymbol{b}$),$\boldsymbol{c}$ 的方向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定(图 1.15)

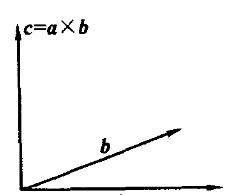

图 1.15

那么,向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即:

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

由向量积的定义可以推得：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

这里是因为夹角 $\theta=0$,从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin\theta=0$.

(2)若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.那么 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

因为 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,那么 $\theta=0$或 $\theta=\pi$,于是 $\sin\theta=0$.从而：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

反之若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0,|\boldsymbol{b}|\neq0$;故必有 $\sin\theta=0$,于是 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

向量积满足以下运算规律：

(1)$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

这是因为按右手规则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向恰好与从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 定出的方向相反.上式表明向量积不满足交换律.

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$;

(3) 结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （λ 为数）.

(2)、(3)证明从略.

下面利用向量积的定义和运算规律来推导向量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,于是：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&\quad+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})\\&\quad+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$,

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$, 所以

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$.

为了帮助记忆,利用三阶行列式记号，上式可以形式上写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{a}=(1,3,-1),\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$,计算$(3\boldsymbol{a})\times(2\boldsymbol{b})$.

解 $$(3\boldsymbol{a})\times(2\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=6\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=6\left(\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&3\\2&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=6(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=12\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}-42\boldsymbol{k}.$$

例 3 求以 $A(1,-1,2)$,$B(3,3,1)$和 $C(3,1,3)$为顶点的$\triangle ABC$ 的面积.

解 根据向量积的定义可知$\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

由于 $AB=(2,4,-1)$,$AC=(2,2,1)$,因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

于是,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{17}$.

习题 1.3

1.设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求(1)$(2\boldsymbol{a})\times(7\boldsymbol{b})$;(2)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$

2.求同时垂直于 $\boldsymbol{a}=\{3,6,8\}$ 和横轴的单位向量.

3.已知$OA=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$OB=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求$\triangle AOB$ 的面积.

4.已知$\triangle ABC$ 顶点分别为 $A(3,4,5)$,$B(2,4,7)$,$C(1,2,3)$,求$\triangle ABC$ 的面积

5.试证:$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=5(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

1.4 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

与在平面解析几何中建立平面曲线与二元方程 $F(x,y)=0$ 的对应关系一样,在空间解析几何中,可以建立空间曲面与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 之间的对应关系.

在空间解析几何中,任何曲面都可看作点的几何轨迹,在这样的意义下,如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0. \tag{1.4.1}$$

有下述关系:

(1)曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1.4.1);

(2)不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程(1.4.1),

那么,方程(1.4.1)称为曲面 S 的方程,而曲面 S 就称为方程(1.4.1)的图形.

下面举几个常见的曲面:

例 1 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x,y,z)$为球面上任意一点，由于球面可以看作是到定点的距离为常数的动点的运动轨迹，故 $|M_0M|=R$,即

$$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.4.2}$$

这就是球面上的点的坐标所满足的方程.反之，不在球面上的点坐标就不能满足这个方程，故方程(1.4.2)即为球心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程，并称此方程为球面标准方程.

例 2 试求到不同两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 距离相等的点 $M(x,y,z)$ 的轨迹的曲面方程.

解 由立体几何知该点的轨迹就是线段 M_1M_2 的垂直平分面，由条件 $|M_1M|=|M_2M|$,

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2.$$

化简合并可得：

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z$$
$$+(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+z_1^2-z_2^2)=0.$$

不妨令 $2(x_2-x_1)=A,2(y_2-y_1)=B,2(z_2-z_1)=C,$

$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+z_1^2-z_2^2=D$,则有 $Ax+By+Cz+D=0.$

这就是所示的平面方程，而不在该平面上的点的坐标不满足该方程.

以上两例都是从已知曲面建立其方程的例子，下面是从已知方程研究其图形的例子.

例 3 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

解 通过配方，原方程可以改写成

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$$

与方程(1.4.2)比较可知，上述方程表示球心在($1,-2,0$)、半径为$\sqrt{5}$的球面方程.

一般地，设三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0, \tag{1.4.3}$$

这个方程的特点是缺 xy,yz,zx 各项，且平方项各系数相同；只要像例 3 那样经过配方可以化成方程(1.4.2)的形式，那么它的图形就是一个球面

以上表明：作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间方程来表示反之,变量 x,y,z 之间的方程通常表示一个曲面，因此，空间解析几何中关于曲面

的研究，有下列两个基本问题：

(1)已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这个曲面方程；

(2)已知坐标 x ,y 和 z 间的一个方程时，研究这个方程所表示的曲面的形状.

二、旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，这条直线称为旋转轴.

设在 yOz 坐标面上已知一曲线 L ,它的方程为

$$f(y,z)=0.$$

这曲线绕 z 轴旋转一周就得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转曲面，它的方程可以求得如下：

设 $M_1(0,y_1,z_1)$为曲线 L 上的任意一点（如图 1.16）,则

$$f(y_1,z_1)=0.$$

当曲线绕 z 轴旋转时,点 M_1 也绕 z 轴旋转到另一点 $M(x_1,y_1,z)$,这时 $z=z_1$ 保持不变，且 M 到 z 轴的距离 d 恒等于 $|y_1|$,即

$$d=|y_1|=\sqrt{x^2+y^2},$$

所以

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},$$

因此

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

这就是所求旋转曲面的方程.

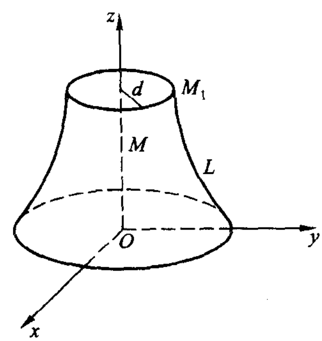

图 1.16

同样,曲线 L 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 4　在 yOz 平面上的直线 $y=2z$ 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为

$$y=\pm2\sqrt{x^2+z^2}\quad\text{或}\quad y^2=4(x^2+z^2),$$

而该直线绕 z 轴为转一周所形成的旋转曲面方程为

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=2z\quad\text{或}\quad x^2+y^2=4z^2,$$

这两种曲面都称为圆锥面

例 5　将 xOz 坐标面上的椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周，则所生成的旋转曲面方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

这两种旋转曲面称为旋转椭球面.

例 6 设 yOz 坐标面上有一抛物线 $y^2=2pz(p>0)$,将此曲线绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面方程为

$$x^2+y^2=2pz.$$

这种曲面称为旋转抛物面.

例 7 将 xOy 坐标面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

这两种曲面称为旋转双曲面.

三、柱面

先分析一个具体的例子.

例 8 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面？

解 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点 O,半径为 R 的圆.在空间直角坐标系中，这个方程不含竖坐标 z，即不论空间点的竖坐标 z 怎样,只要它的横坐标 x 和纵坐标 y 能满足方程，那么这些点就在这曲面上，这就是说，凡是通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$,且平行于 z 轴的直线 l 都在这曲面上.因此，这曲面可以看作是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而形成的，这曲面称为圆柱面（图 1.17),xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 称为它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 称为它为母线.

一般地，一直线沿已知曲线平行移动所形成的曲面称为柱面，移动的直线称为母线，已知曲线称为准线.

上面例 8 可以看到,不含 z 的方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴的圆柱面，它的准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

类似地,方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴,它的准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$,这柱面称为抛物柱面(图 1.18)

又如,方程 $x-y=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是 xOy 面上的直线 $x-y=0$(图 1.19)

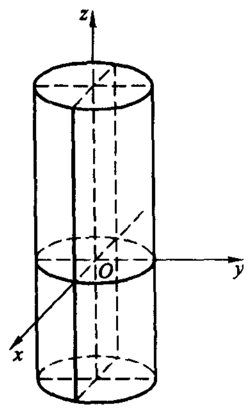

图 1.17

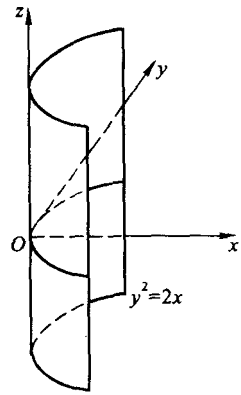

图1.18

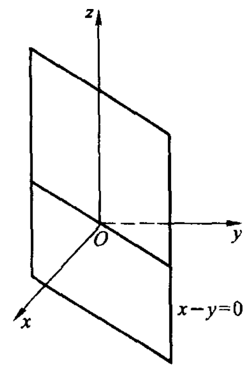

图 1.19

同样地，只含 x,z 而缺 y 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 y,z 而缺 x 的方程 $H(y,z)=0$在空间直角坐标系中，分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

四、空间平面及其方程

在空间直角坐标系中最简单的曲面是空间平面，我们将以向量为工具，讨论空间平面方程最基本的形式，即是空间平面的点法式方程，并由此得到空间平面的一般方程.

*1.平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，则这向量称为该平面的法线向量.容易知道，平面内的任一向量均与该平面的法线向量垂直.

由立体几何知，过空间一点可以作且只可以作一个平面垂直于一条已知直线，所以，若已知平面 π 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的法线向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$时，平面 π 的位置也就确定了下来.下面来建立平面 π 的方程.

设点 $M(x,y,z)$为平面 π 内任意一点(如图 1.20)，那么向量 M_0M必与平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零：

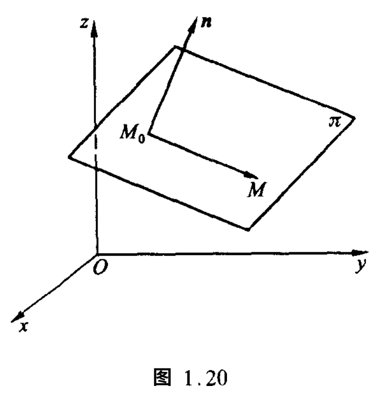

图 1.20

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

而 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1.4.4}$$

这就是平面 π 上任意一点 M 的坐标所满足的方程.