

高等学校教材

高等数学

(本科少学时类型)

上册

(第二版)

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

内容提要

本书分上、下两册出版.上册6章,内容为函数与极限,一元函数微积分,微分方程;下册4章,内容为向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数.本书按照适当降低理论深度,突出微积分中实用的分析和运算方法,着重基本技能的训练而不过分追求技巧的思想,对第一版做了全面修订:参照专科教学基本要求,对原书内容作了少量增删;结构上作了适当调整;删去了某些要求过高的习题,增加了突出基本训练的题目,使之更适应本书的使用要求.本书可作工科本科少学时专业和专科的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/同济大学应用数学系编.—2版.

北京:高等教育出版社,2000

本科少学时类型

ISBN 7-04-008892-4

.高... .同... .高等数学-高等学校-教材
.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第65420号

高等数学(本科少学时类型)上册(第二版)

同济大学应用数学系 编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷

开 本 850×1168 1/32

版 次 年 月 第 版

印 张 13.375

印 次 年 月 第 次印刷

字 数 330 000

定 价 13.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

责任编辑	文小西
封面设计	李卫青
责任绘图	杜晓丹
版式设计	马静如
责任校对	朱惠芳
责任印制	宋克学

第二版前言

本书自 1987 年出版以来,至今已有 14 年之久.在这期间内,我国的高等教育事业发展很快,有更多的专业需要使用少学时类型的高等数学教材,并在使用过程中对这类教材提出了一些意见和新的要求.在这样的形势下,为了使本书更好地适应教学需要,在高等教育出版社的大力支持下,我们对它作了一次全面的修订.

这次修订的指导思想是:适当降低理论深度,突出微积分中实用的分析和运算方法,着重基本技能的训练而不过分追求技巧.按照这个想法,我们对极限理论、积分法、向量代数和级数理论等都作了修改,使之更适应本书的使用要求.此外,我们参照教育部颁发的专科高等数学教学基本要求,对原书内容作了少量增删,去掉了级数一章的“*”号,并删去了其中傅里叶级数部分,增加了求条件极值的拉格朗日乘子法.在这次修订时,我们遵从多数同行的意见,把中值定理与导数应用一章紧接在导数一章之后,并把定积分与定积分的应用合并为一章.这次还对全书习题作了修订,删去了某些要求过高的习题,同时增加了一些突出基本训练的题目.

参加本次修订工作的有骆承钦、郭镜明、邵婉鸣、朱晓平等同志.天津大学齐植兰教授仔细审阅了初稿并提出了许多中肯的修改意见,对此我们表示衷心的感谢.

编者

2000 年 6 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合与区间	1
二、函数概念	5
三、函数的几种特性	9
四、反函数	11
五、复合函数·初等函数	14
习题 1- 1	17
第二节 数列的极限	19
习题 1- 2	28
第三节 函数的极限	28
一、自变量趋向有限值时函数的极限	29
二、自变量趋向无穷大时函数的极限	34
习题 1- 3	36
第四节 无穷小与无穷大	37
一、无穷小	37
二、无穷大	41
习题 1- 4	43
第五节 极限运算法则	43
习题 1- 5	50
第六节 极限存在准则·两个重要极限	51
一、夹逼准则	51
二、单调有界收敛准则	54
习题 1- 6	60
第七节 无穷小的比较	60

习题 1- 7	63
第八节 函数的连续性	64
一、函数连续性的概念	64
二、函数的间断点	66
三、初等函数的连续性	68
习题 1- 8	71
第九节 闭区间上连续函数的性质	72
一、最大值和最小值定理	72
二、介值定理	74
习题 1- 9	75
第二章 导数与微分	77
第一节 导数概念	77
一、引例	77
二、导数的定义	80
三、求导数举例	82
四、导数的几何意义	85
五、函数的可导性与连续性之间的关系	87
习题 2- 1	88
第二节 函数的和、积、商的求导法则	90
一、函数和的求导法则	90
二、函数积的求导法则	93
三、函数商的求导法则	94
习题 2- 2	98
第三节 反函数和复合函数的求导法则	99
一、反函数的导数	99
二、复合函数的求导法则	102
习题 2- 3	108
第四节 高阶导数	110
习题 2- 4	113
第五节 隐函数的导数以及由参数方程所确定的函数的 导数	114

一、隐函数的导数	114
二、由参数方程所确定的函数的导数	121
习题 2- 5	125
第六节 变化率问题举例及相关变化率	127
一、变化率问题举例	127
二、相关变化率	132
习题 2- 6	134
第七节 函数的微分	135
一、微分的定义	135
二、微分的几何意义	139
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	140
习题 2- 7	144
第八节 微分的应用	145
一、微分在近似计算中的应用	145
二、微分在误差估计中的应用	148
习题 2- 8	150
第三章 中值定理与导数的应用	153
第一节 中值定理	153
一、罗尔定理	153
二、拉格朗日中值定理	156
三、柯西中值定理	160
习题 3- 1	162
第二节 洛必达法则	163
习题 3- 2	168
第三节 泰勒中值定理	168
习题 3- 3	174
第四节 函数的单调性和曲线的凹凸性	175
一、函数单调性的判定法	175
二、曲线的凹凸性与拐点	179
习题 3- 4	184

第五节 函数的极值和最大、最小值	184
一、函数的极值	185
二、函数的最大、最小值	191
习题 3- 5	195
第六节 函数图形的描绘	197
习题 3- 6	203
第七节 曲率	203
一、弧微分	203
二、曲率及其计算公式	205
三、曲率圆与曲率半径	209
习题 3- 7	211
第八节 方程的近似解	212
习题 3- 8	216
第四章 不定积分	217
第一节 不定积分的概念与性质	217
一、原函数与不定积分的概念	217
二、基本积分表	222
三、不定积分的性质	223
习题 4- 1	226
第二节 换元积分法	227
一、第一类换元法	227
二、第二类换元法	236
习题 4- 2	241
第三节 分部积分法	242
习题 4- 3	247
第四节 有理函数的不定积分	248
习题 4- 4	254
第五节 积分表的使用	255
习题 4- 5	257
第五章 定积分及其应用	258

第一节 定积分的概念与性质	258
一、定积分问题举例	258
二、定积分的定义	261
三、定积分的性质	267
习题 5- 1	273
第二节 微积分基本公式	273
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	274
二、积分上限的函数及其导数	275
三、牛顿- 莱布尼茨公式	277
习题 5- 2	281
第三节 定积分的换元法及分部积分法	282
一、定积分的换元法	282
二、定积分的分部积分法	289
习题 5- 3	292
第四节 定积分在几何上的应用	294
一、定积分的元素法	294
二、平面图形的面积	296
三、体积	302
四、平面曲线的弧长	305
习题 5- 4	309
第五节 定积分在物理上的应用	312
一、变力沿直线所作的功	312
二、水压力	315
三、引力	316
习题 5- 5	317
第六节 反常积分	318
一、无无穷限的反常积分	318
二、被积函数具有无穷间断点的反常积分	323
习题 5- 6	327
第六章 微分方程	328
第一节 微分方程的基本概念	328

习题 6- 1	333
第二节 可分离变量的微分方程	334
习题 6- 2	338
第三节 齐次方程	339
习题 6- 3	344
第四节 一阶线性微分方程	344
习题 6- 4	350
第五节 可降阶的高阶微分方程	351
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	351
二、 $y = f(x, y)$ 型的微分方程	353
三、 $y = f(y, y')$ 型的微分方程	356
习题 6- 5	358
第六节 二阶常系数齐次线性微分方程	359
习题 6- 6	369
第七节 二阶常系数非齐次线性微分方程	370
一、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	371
二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x)\cos \mu x + P_n(x)\sin \mu x]$ 型	374
习题 6- 7	377
附录	379
附录 基本初等函数的图形及其主要性质	379
附录 几种常用的曲线	382
附录 积分表	386
习题答案	396

第一章 函数与极限

本高等数学课程的主要内容是微积分及其应用.微积分与中学里学的初等数学是有重大区别的.初等数学研究的对象基本上是不变的量(称为常量),而微积分则是以变量作为研究对象.研究变量时,着重考察变量之间的相依关系(即所谓的函数关系),并讨论当某个变量变化时,与它相关的变量的变化趋势.这种研究方法就是所谓的极限方法.本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念,以及它们的一些性质,这些内容是学习本课程必需掌握好的基础知识.

第一节 函 数

一、集合与区间

1. 集合

集合概念是数学中一个原始的概念,就是说,它不能用更简单的概念定义,我们通过例子说明这个概念.比方说,一个书柜中的书构成的集合,一个教室里的学生构成的集合,全体实数的集合,等等.一般地说,所谓集合(或简称集)是指具有特定性质的一些事物的总体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.本书以大写拉丁字母表示集合.事物 a 是集合 M 的元素,记作 $a \in M$ (读作 a 属于 M);事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$ (读作 a 不属于 M).

由有限个元素组成的集合称为有限集.有限集可用列举出它的全体元素的方法来表示.例如,由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合

A, 可记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合称为无限集. 无限集通常用如下的记号表示: 设集合 M 由具有某种特征的元素 x 所组成, 就记作

$$M = \{x \in X \text{ 所具有的特征}\}.$$

例如, 平面上的坐标适合方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) 所组成的集合 M 可记作

$$M = \{(x, y) \in X^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

本书用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别声明, 以后提到的数都是实数. 我们将全体自然数的集合记作 N , 全体整数的集合记作 Z , 全体有理数的集合记作 Q , 全体实数的集合记作 R . 有时我们在表示数集的字母的右上角添加“+”、“-”等上标, 表示该数集的特定子集. 以实数集 R 为例, R^+ 表示全体正实数之集, R^- 表示全体负实数之集. 仿此可得出其它数集的类似记号的含义.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 即若 $x \in A$, 则必 $x \in B$, 就说 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supseteq A$ (读作 B 包含 A). 例如有

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R.$$

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 就称集合 A 与 B 相等, 记作 $A = B$. 由集合相等的概念可知, 集合中的重复元素实际上可看作为一个元素.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$$

是空集, 因为满足条件 $x^2 + 1 = 0$ 的实数是不存在的. 空集记作 \emptyset ,

在本书中, 自然数集 N 是指由零和全体正整数所组成的数集.

并规定空集为任何集合的子集.

读者在中学里已经学过,实数与数轴上的点之间可以建立一一对应的关系.因此,有时为了突出几何直观,就把数 x 称为点 x ,这时就是指数轴上与数 x 对应的那个点.相应地,数集也可称为(数轴上的)点集.有时还根据点集的几何特征来对数集命名,下面介绍的“区间”就是这样的例子.

2. 区间

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$. 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间,记作 (a, b) ,即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点,这里 $a \in (a, b), b \in (a, b)$. 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记作 $[a, b]$,即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点,这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$. 类似地可说明

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b - a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的(不包括端点或包括一个、两个端点的)线段(图 1-1).

此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+$ (读作正无穷大)及 $-$ (读作负无穷大),则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\},$$

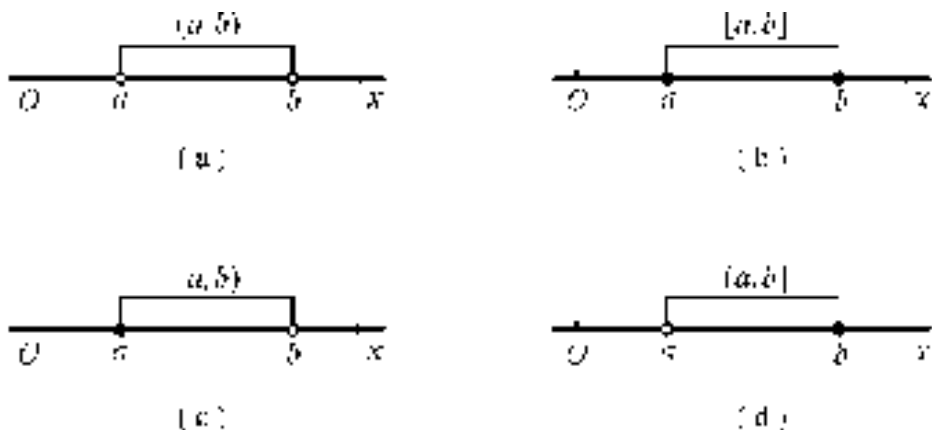


图 1- 1

$$\begin{aligned}
 (-\infty, b] &= \{x \mid x \leq b\}, \\
 (a, +\infty) &= \{x \mid a < x\}, \\
 (-\infty, b) &= \{x \mid x < b\}.
 \end{aligned}$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线,例如(图 1- 2):

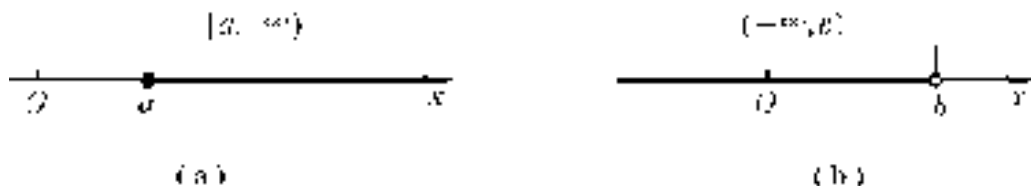


图 1- 2

全体实数的集合 R 也记作 $(-\infty, +\infty)$, 它也是无限的开区间.

要注意的是, 记号 $+\infty$ 、 $-\infty$ 都只是表示无限性的一种记号, 它们都不是某个确定的数, 因此也不能参与数的运算.

以后如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的, 无限的, 开的, 闭的, 半开的)都适用, 为了避免重复论述, 就用“区间 I ”代表各种类型的区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$. 数集

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的邻域,记作 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

点 a 叫做 $U(a, \delta)$ 的中心, 叫做 $U(a, \delta)$ 的半径.

因为 $|x - a| < \delta$ 相当于

$$a - \delta < x - a < a + \delta \quad \text{即} \quad a - \delta < x < a + \delta,$$

所以

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

由此看出, $U(a, \delta)$ 也就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 这个开区间以点 a 为中心, 而长度为 2δ (图 1-3).

在数轴上, $|x - a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离, 因此点 a 的邻域

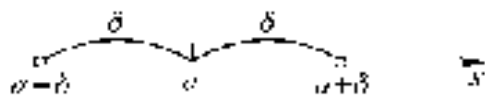


图 1-3

$$U(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

在数轴上表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体, 这正是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 去心的邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

这里 $0 < |x - a| < \delta$ 就表示 $x \neq a$.

二、函数概念

在同一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变, 而是按照一定的规律相互联系着. 其中一个量变化时, 另外的量也跟着变化; 前者的值一确定,

后者的值也就随之而唯一地确定. 比如说, 圆的面积 A 是随着半径 r 的变化而变化的, 其变化规律是 $A = r^2$. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个值时, 由上式就可确定面积 A 的相应数值. 又如, 在任何一个确定的地点, 某天一昼夜间的气温 T 是随着时间 t 的变动而变化的. 对这一天 0 点到 24 点之间的任一时刻 t_0 , 气温 T 都有一个确定的值 T_0 . 与它对应, 尽管这个对应规律很难用一个式子精确表达出来. 现实世界中广泛存在于变量之间的这种类型的相依关系, 正是函数概念的客观背景.

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果按照某个法则 f , 对于每个数 $x \in D$, 变量 y 都有唯一确定的值和它相对应, 则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的函数. 数集 D 称为这个函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

与自变量 x 对应的因变量 y 的值记作 $f(x)$, 称为函数 f 在点 x 处的函数值. 比如当 x 取值 $x_0 \in D$ 时, y 的对应值就是 $f(x_0)$. 当 x 取遍定义域 D 的所有数值时, 对应的全体函数值所组成的集合

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

需要指出, 按照上述定义, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的: 前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便, 习惯上也常用记号 $f(x)$, 或 $y = f(x)$, 来表示函数. 比如下面这句话

“由对应法则‘对任一 $x \in D, y = x^2 + x + 1$ ’所确定的函数 f ”可简单表述为

$$\text{函数 } f(x) = x^2 + x + 1, x \in D,$$

或

$$\text{函数 } y = x^2 + x + 1, x \in D.$$

函数的记号 f 也可改用其它字母, 例如 F 等等, 相应地, 函数可记作 $y = f(x), y = F(x)$, 等等. 有时还直接利用因变量的记

号来表示函数,即把函数记作 $y = y(x)$. 这时字母 y 既表示因变量,又表示函数.

从函数的定义可以看到,函数概念有两个要素:定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如圆面积公式 $A = r^2$ 的定义域 $D = (0, +\infty)$; 某天一昼夜温度 T 随时间 t 变化的规律 $T = T(t)$ 的定义域 $D = [0, 24]$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合(这样约定的定义域有时也称为函数的自然定义域). 例如函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 函数 $y = \frac{1}{1 - x^2}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

具体表示一个函数时,必需明确指明函数的定义域和对应规则(但自然定义域常常不明确表出,可根据算式自行判定). 表示函数的对应规则可用表格法、图形法、解析法(即算式表示法),有时也可用语言描述,这些是大家在中学里已经熟悉的内容,这里就不再详细说明了. 中学代数课中还讨论过许多具体的函数,如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等,这些函数称为基本初等函数,在本课程以后的讨论中将反复出现. 下面再举几个函数的例子.

例 1 常数函数 $y = 2$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{2\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线(图 1-4).

例 2 数 x 的绝对值记为 $|x|$. 如果把 x 看作变量,则有函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0, \\ -x & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$