全国高等农林专科统编教材

高　等　数　学

（农林各专业通用）

主　编　杨逢建

副主编　刘浩培

陆宜清

袁夫永

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/ 杨逢建主编 .—北京:高等教育出版社,1999

全国高等农林专科统编教材

ISBN 7 - 04 - 007629 - 2

Ⅰ.高… Ⅱ.杨… Ⅲ.高等数学 - 高等学校:专业学校 - 教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 22648 号

高等数学

杨逢建 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010 - 64054588	传　　真	010 - 64014048
网　　址	http: www .hep .edu .cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×1092 1 16	版　　次	年 月第 版
印　　张	13.25	印　　次	年 月第 次印刷
字　　数	310 000	定　　价	12.00 元

责任编辑　李　陶
封面设计　赵之公
责任绘图　尹　莉
版式设计　史新薇
责任校对　康晓燕
责任印制

前　　言

本书是根据高等农林专科《高等数学课程教学基本要求》、由全国普通高等农林专科课程建设委员会组织编写的 .

在内容的选取方面,我们以面向专业需要和现代科技发展需要为原则,舍弃了部分难度较大而在农林专科各专业应用很少的传统微积分内容,如线、面积分与无穷级数 .充实了体现现代数学发展的部分内容 .对数值计算作了初步介绍,引入了离散化的概念,沟通了高等数学课程与计算机的联系,给出了求定积分近似值与求微分方程数值解的通用程序,便于直接应用 .同时,我们增加了“ 数学模型简介 ”一章,介绍建模的基本方法,培养学生将实际问题转化为数学模型并分析求解的能力,以强化理论与实践的结合 .

在体系的编排方面,我们一方面注意突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点,同时尽可能对体系作合理优化,避免烦琐雷同的推证 .考虑高等农林专科教学的具体要求,叙述与论证力求浅显易懂,适当淡化了一些繁难的理论推导 .例题的选择也力求有代表性,使读者较好地掌握本课程的主要内容 .

在习题的选配方面,各节精选了一批概念性较强、方法有典型性、难度适中的习题作为练习题,以帮助读者理解基本概念、掌握一般方法、提高运算能力 .每章末的复习题中有部分综合题供选用 .

本书可作为高等农林专科、高等职业技术教育、成人教育、以及其他学时较少的工科类、文科类专业的高等数学课程教材 .标有 * 号的内容供不同专业选用 .

本书由仲恺农业技术学院杨逢建主编,由苏州大学刘浩培、郑州牧业高专陆宜清、广西职业技术学院袁夫永任副主编 .参加本书编写的还有:广西职业技术学院王庆全、华南农业大学吕小欢、邯郸农业高专崔士襄、仲恺农业技术学院张文华、张家口农业高专余秀萍、湛江海洋大学张建等同志 .

本书由中国农业大学陈伟侯教授主审 .参加审稿的还有张家口农业高等专科学校杨正辉教授和北京机械工业学院朱宏道教授 .审稿同志认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心的感谢 .

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中难免存在不妥之处,恳请广大读者批评指正 .

编　　者

一九九八年十月

目　　录

1 函　　数

初等数学的研究对象主要是常量,而高等数学的研究对象主要是变量.变量之间的相互依赖关系,常可抽象为本书所说的函数关系.函数是将实际问题数学化的基本工具.早在17世纪,由于天文、航海、力学等科学的发展,已产生了一些具体的函数,如对数函数、三角函数等.随着科技的发展,人们遇到了越来越多的函数.为一般地给出函数的严格定义,数学家们经过了多年的不断探讨,直到19世纪末,才用集合的观点得到严格的函数定义.

本章我们主要介绍函数的一些基本概念和函数的简单特性,并介绍高等数学中常涉及的几种函数及它们的性质.

1.1　集合与区间

1.1.1　集合及其简单计算

Ⅰ. 集合的概念

在数学中我们讲一个集合,是指具有某种特性的事物的总体.例如:

(1) 某班级的全体同学;

(2) 不等式 $2x-1>0$ 的所有解;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 上的所有点

都是集合.集合常用大写字母 A、B、C…等表示.

组成集合的事物称为集合的<u>元素</u>,常用小写字母 a, b, c…等表示.如果 a 是集合 A 的一个元素,则称"a 属于 A",记为 $a\in A$;若 a 不是 A 的元素,则称"a 不属于 A",记为 $a\notin A$.

例1　用 $\mathbf{N}$ 表示正整数集,则 $1\in\mathbf{N}$, $-1\notin\mathbf{N}$.

常见的数集都有特定的记号,如下表所示:

名　　称	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记号	**N**	**Z**	**Q**	**R**

注　我们常在某数集的右上角加符号来区别相应的正负数集.例如,$\mathbf{Z}^-$ 表示负整数集;$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集等.

含有无穷多个元素的集合称为<u>无限集</u>;只含有有限个元素的集合叫<u>有限集</u>;不含任何元素的集合称为<u>空集</u>.空集用记号 表示.

例2　方程 $x^2-1=0$ 的解集为有限集;方程 $x^2+1=0$ 的实数解集为空集;$\mathbf{N}$ 是无限集.

集合有两种表示方法.一种方法是将集合的元素一一列举在{　}内,称为<u>列举法</u>.例如

$$A=\{a,b,c\},$$

$$B=\{1,3,5,\cdots\},$$
$$C=\{2,4,6,\cdots,100\}$$

都是用的列举法.注意其中每个元素仅写一次.另一种方法是利用元素的特性描述集合,记为

$$A=\{x \mid x\text{ 所具有的性质}\},$$

称为<u>描述法</u>.

例 3 用描述法表示前述集合(2)与(3).

解 $A=\{x \mid 2x-1>0,\ x\in\mathbf{R}\}$,

$B=\{(x,y) \mid y=x^2,\ x,y\in\mathbf{R}\}$.

Ⅱ. 集合的简单运算

考虑集合

$$A=\{3,4\},\quad B=\{1,2,3,4,5\}.$$

可以看出,A 的每一个元素都属于 B.一般地,若集合 A 的所有元素都属于集合 B,则称 A 是 B 的<u>子集</u>,或称 A 包含于 B,记为 $A \quad B$(或称为 B 包含 A,记作 $B \quad A$).

例 4 可以看出:

$$\{3\} \quad \{1,3,5\};\qquad \{x \mid x^2=1\} \quad \mathbf{Z}.$$

我们规定,空集 是任一集合的子集.

如果集合 $A \quad B$,同时 $B \quad A$,则称<u>集合 A 与 B 相等</u>,记作 $A=B$.

例 5 设 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{1,2\}$,则

$$A=B.$$

设 A、B 是两个集合,由这两个集合的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的<u>并集</u>,记为 $A\cup B$ 即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}. \tag{1}$$

例 6 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{b,c,d\}$,则

$$A\cup B=\{a,b,c,d\}.$$

例 7 设 $A=\{x \mid -2\le x\le 2\}$, $B=\{x \mid x>1\}$,则

$$A\cup B=\{x \mid x\ge -2\}.$$

由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的<u>交集</u>,记作 $A\cap B$.即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}. \tag{2}$$

例 8 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$,则

$$A\cap B=\{1,3,5\}.$$

例 9 设 $A=\{x \mid x>-1\}$, $B=\{x \mid x\le 2\}$,则

$$A \cap B = \{ x \mid -1 < x \leq 2 \}.$$

集合的上述几种运算满足以下规则:

(1) $A \quad A$;

(2) 若 $A \quad B$, $B \quad C$,则 $A \quad C$;

(3) 若 $A \quad B$,则 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$;

(4) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(5) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(6) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.1.2 区间与邻域

Ⅰ. 绝对值

对于任意一个实数 a,它的绝对值为

$$|a| = \begin{matrix} a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时}, \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时}. \end{matrix}$$

例 $|-2| = |2| = 2$, $|0| = 0$.

绝对值有明显的几何意义:实数 a 的绝对值 $|a|$ 等于数轴上点 a 到原点的距离 .

由绝对值的几何意义可知, $|x| < \delta$($\delta > 0$,下同)表示数轴上介于 $-\delta$ 与 δ 之间的所有点的集合 即

$$|x| < \delta \qquad x \in \{ x \mid -\delta < x < \delta \}. \tag{3}$$

同理, $|x - a| < \delta$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的点集,即

$$|x - a| < \delta \qquad x \in \{ x \mid a - \delta < x < a + \delta \}. \tag{4}$$

类似可知

$$|x| > \delta \qquad x \in \{ x \mid x < -\delta \text{ 或 } x > \delta \}, \tag{5}$$

$$|x - a| > \delta \qquad x \in \{ x \mid x < a - \delta \text{ 或 } x > a + \delta \}. \tag{6}$$

不等式(3)~(6)表示的点集如图 1 - 1 所示 .

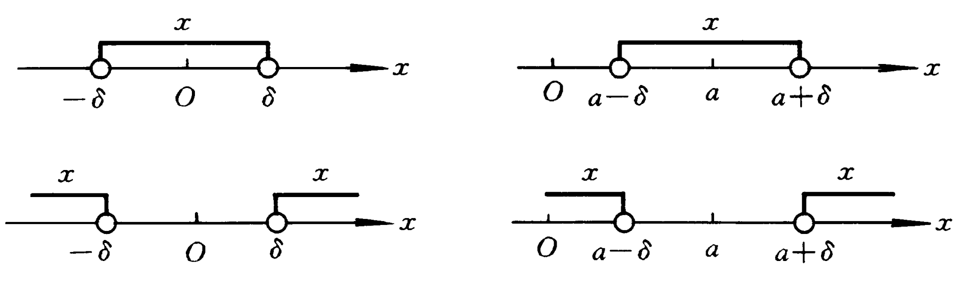

图 1 - 1

Ⅱ. 区间

在高等数学中接触最多的数集是各种区间,分述如下 .

开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

开区间与闭区间如图 1 - 2 所示 .还有半开区间:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\};$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

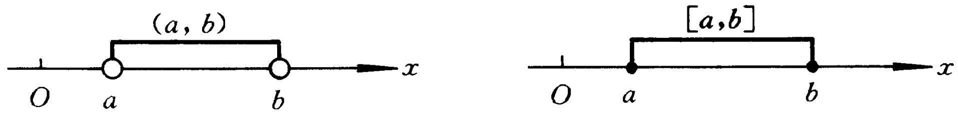

图 1 - 2

以上几类区间称为有限区间,有时用到无穷区间,如

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\};$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

等等 .需要说明的是, $-\infty$、$+\infty$只是一种记号,它们不是数,因而不能参与四则运算 .

图 1 - 3 表示了两种无穷区间,其它无穷区间可类似地画出 .

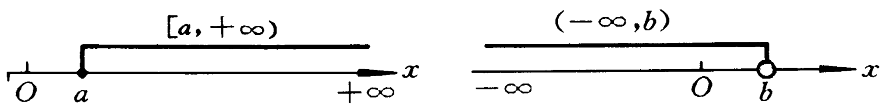

图 1 - 3

Ⅲ. 邻域

由绝对值和区间的定义可知,实数集合

$$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

在数轴上表示以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.我们称之为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$ .x_0 称为该邻域的中心, δ 称为邻域的半径(图 1 - 4(a)) .

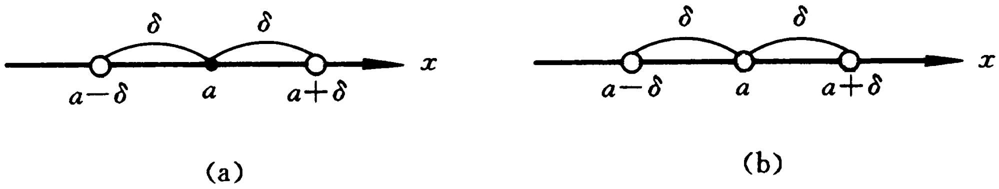

图 1 - 4

在 x_0 的 δ 邻域中去掉点 x_0 ,得点集

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

称为点 x_0 的 δ 去心邻域 即 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,见图 1 - 4(b).

习题 1 - 1

1. 写出集合 $A = \{a, b, c\}$ 的所有子集.
2. 用适当的记号填空:

(1) a ____ $\{a\}$;　　(2) $\{1, 5\}$ ____ $\mathbf{Q}$;

(3) 0 ____ $\mathbf{N}$;　　(4) $\{0, 3\}$ ____ $\{x \mid x^2 = 3x\}$.

3. 设 $A = \{x \mid |x| < 5\}$, $B = \{x \mid x > 3\}$,求 $A \cup B$, $A \cap B$.
4. 用区间表示下列题中变量的变化范围:

(1) $3 < x \leq 8$;　　(2) $x^2 > 4$;

(3) $|x + 1| \leq 3$;　　(4) $0 < |x - 1| < 2$.

1.2　函数及其性质

1.2.1　函数的概念

Ⅰ. 函数的定义

定义 1　设 x 与 y 是两个变量, D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x \in D$,按照一定的法则,总有变量 y 的一个确定数值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y = f(x)$.数集 D 称为这个函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

与 x 的值相对应的 y 值称为函数值.当 $x = a$ 时的函数值记为 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$.全部函数值的集合称为函数的值域.它是当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

例如,取 $f(x) = 2x - 1$,则 $f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1 = 1$, $f(3) = 5$,而 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$.

由函数的定义可知,定义域和对应法则是函数的两个要素.对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$,当它们的定义域与对应法则均相同时,我们称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个相同的函数.

例 1　下列各组函数是否相同:

(1) $f(x) = x + 1$,　$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;

(2) $f(x) = |x|$,　$g(x) = x^2$.

解　(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x)$ 的定义域为 $x \neq 1$,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,对应法则也相同,即对任意 $x \in \mathbf{R}$,有 $f(x) = g(x)$.因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 为相同的函数.

例 2　求函数 $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ 的定义域.

解　函数式中,分母不能为零,偶次方根的根底数必须大于或等于 0,于是有

$$\begin{cases} x+1\geq 0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \qquad x\geq -1 \text{ 且 } x\neq 1.$$

故函数的定义域可用区间表示为

$$D=[-1,1)\cup(1,+\infty).$$

Ⅱ. 函数的表示法

通常表示函数的方法有解析法、列表法与图象法 .

(1) 解析法 .用一个公式来表示函数的方法叫解析法 .

例如, $y=x^2$, $y=\sin x+\cos x$ 都是用解析法表示的函数 .

(2) 列表法 .将两个变量的对应数值列成一个表, 用以表示这两个变量的函数关系, 叫列表法 .

例如,某商店皮夹克零售量 s 与月份 t 的关系为

月份(t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量(s)	60	65	40	32	10	6	5	10	71	145	130	120

这里, s 与 t 的函数关系是用列表法表示的 .

(3) 图象法 .以横轴表示自变量 x, 纵轴表示因变量 y, 则平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

就是定义在数集 D 上的函数 $y=f(x)$的图象(图 1 - 5) .

例如, $y=kx+b$ 的图象是直线, $y=x^2$ 的图象是抛物线 .

有时函数的解析式不易列出,但我们可以用图象来表示两个变量之间的函数关系,这种方法叫图象法 .

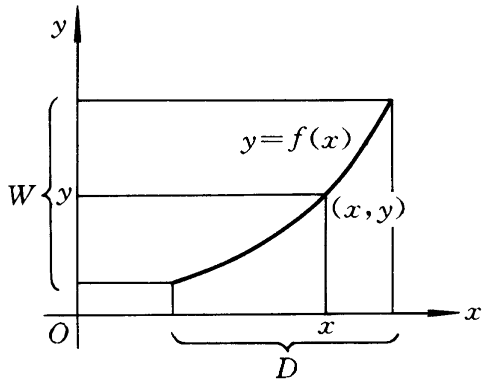

图 1 - 5

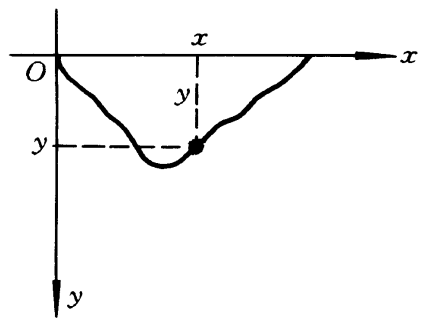

图 1 - 6

例如,某河道的一个断面图如图 1 - 6 所示 .将 x 轴放在水平面上, 坐标原点在岸边, y 轴垂直于水平面朝下,则 x 为测量点到岸边的距离, y 为测量点的深度 . y 与 x 的函数关系由图中的曲线来表示 .

由上面的例子可以看出,要准确而又简洁地描述实际事物中变量之间的函数关系,并不是一

件很容易的事.在许多情形中,我们可以采取分段寻找表达式的办法去寻求函数的表达公式.

例 3　某厂生产的高密度磁盘零售价每盒80元.当购买量超过 50 盒时,按批发价每盒 68 元.当购买量超过 500 盒时,按出厂价每盒只需 55 元.则购买量 x 与货款 W 之间的函数关系可用如下公式来表示:

$$W = f(x) = \begin{cases} 80x, & 0 \leq x \leq 50, \\ 68x, & 50 < x \leq 500, \\ 55x, & x > 500. \end{cases} \quad (\text{单位:元})$$

由例 3 可以看出,有时一个函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应法则要用不同式子表示的函数叫分段函数.

例 4　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

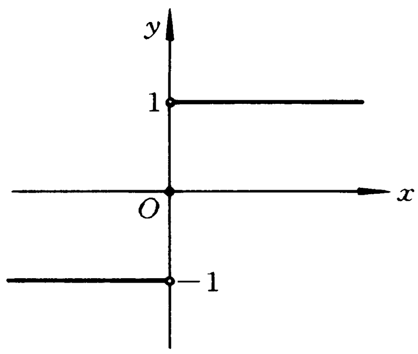

图 1 - 7

它是一个分段函数,其定义域为 **R**,值域为 $W = \{-1, 0, 1\}$,图形如图 1 - 7 所示.

分段函数在计算函数值时一定要注意选取相应的表达式.例如,对例 3 给出的函数,有: $W(30) = 80 \times 30 = 2\ 400$ 元, $W(100) = 68 \times 100 = 6\ 800$ 元.

1.2.2　函数的几种特性

Ⅰ. 函数的有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, D_1 是 D 的一个子集.若存在常数 $M > 0$,使对任意 $x \in D_1$,都有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 D_1 上<u>有界</u>.如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$ 在 D_1 上<u>无界</u>.

例 5　由于对任何实数 x,有 $|\sin x| \leq 1$.因此,函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

在整个定义域上有界的函数,其图象必介于直线 $y = -M$ 与直线 $y = M$ 之间(图 1 - 8).

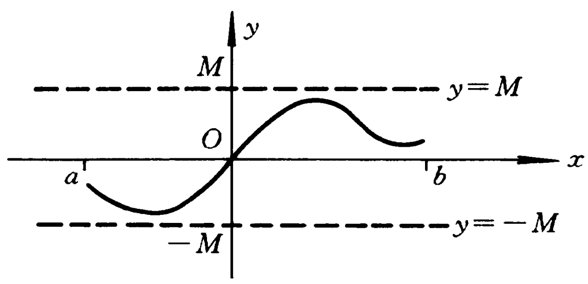

图 1 - 8

注　有的函数在它的定义域上无界,但在某个区间上有界.例如, $y = \dfrac{1}{x}$ 在其定义域上无界,但它在区间 $[1, 2]$、$(4, 6)$ 上都是有界的(见图 1 - 9).因此,以后谈到函数的有界性时,要注意上下文所示的自变量的范围.

Ⅱ. 函数的单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 I 为 D 的一个子集.若对 I 上任意两点 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是<u>单调增加的</u>,或称 $f(x)$ 在 I 上为<u>增</u>

函数;若当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的,或称 $f(x)$在 I 上为减函数.

若函数 $f(x)$在区间 I 上不改变单调性,则称 I 为 $f(x)$的一个单调区间.

增函数的图象特征是沿 x 轴正向呈上升趋势;减函数的图象特征是沿 x 轴正向呈下降趋势.我们借助于 $y = x^3$ 与 $y = \frac{1}{x}$的图形来说明这一点(图 1 - 9).

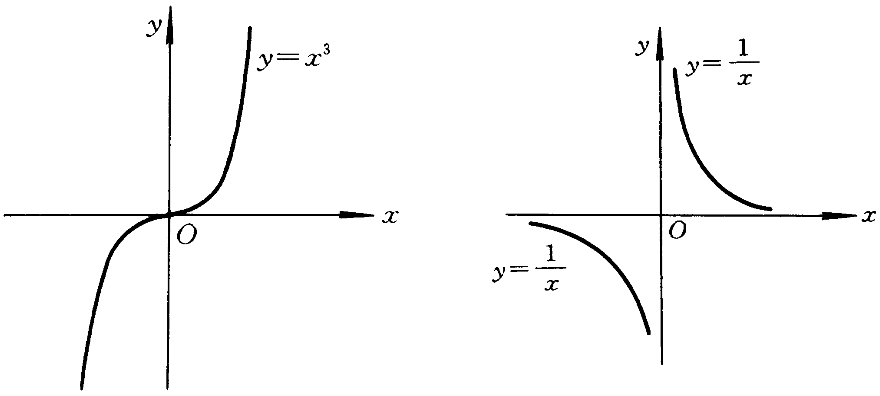

图 1 - 9

例 6 判断函数 $f(x) = x^2$ 的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,由于

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

当 $x_1 < x_2 < 0$ 时,有

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

当 $0 < x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

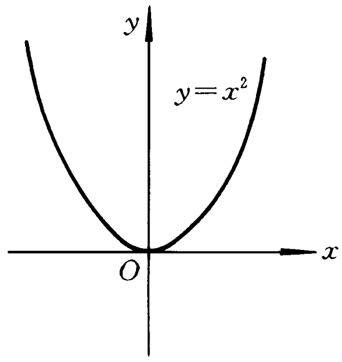

图 1 - 10

因此,函数 $f(x) = x^2$ 在$(-\infty, 0]$上单调减少,而在$[0, +\infty)$上单调增加(图 1 - 10).

可见,$f(x) = x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$上并不是单调函数.

Ⅲ. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域关于原点 O 对称.对任意 $x \in D$,若有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;若有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图象特征是关于 y 轴对称(图 1 - 11);奇函数的图象特征是关于原点对称(图 1 - 12).

例 7 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = 2x^2 + 1$; (2) $y = x^3 - 2\sin x$;

(3) $y = x - 1$.

解 (1) $f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$,故 $y = 2x^2 + 1$ 为偶函数.

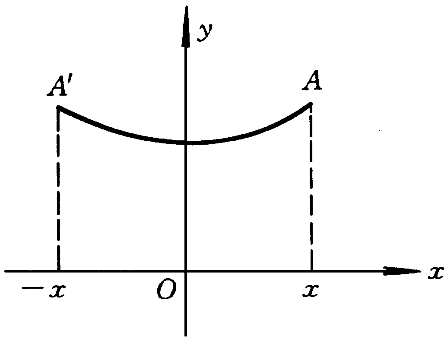

图 1 - 11

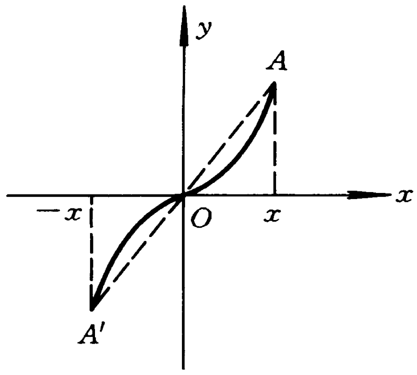

图 1 - 12

(2) $f(-x)=(-x)^3-2\sin(-x)=-x^3+2\sin x=-f(x)$,故 $y=x^3-2\sin x$ 为奇函数 .

(3) $f(-x)=-x-1$,

它既不等于 $f(x)$,也不等于 $-f(x)$,故 $y=x-1$ 是非奇非偶函数 .

Ⅳ. 函数的周期性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在正数 T,使对任意 $x\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称 $f(x)$为周期函数,T 称为 $f(x)$的周期 .

易见,若 T 是函数 $f(x)$的周期,那么 $2T$、$3T$、…等都是 $f(x)$的周期 .我们常说的周期函数的周期,是指函数的最小正周期 .

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数,周期 $T=2\pi$.

例 8 证明:若 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,则对 $a>0$, $f(ax)$是以$\frac{T}{a}$为周期的周期函数 .

证 由于 $f(x)$以 T 为周期,因此

$$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f[ax+T]=f(ax)$$

对任意 x 成立 .从而命题得证 .

例 8 的结论是用来求函数周期的一个极为有用的公式 .

1.2.3 反函数

设某质点作直线运动,路程 s 是时间 t 的函数

$$s=40t.$$

显然,我们可将上式变换为

$$t=\frac{1}{40}s .$$

对于每个给定的 s 值,都有确定的 t 值与之对应 .因此,时间 t 也是路程 s 的函数 .

一般情形下,有下面的定义:

定义 6 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,值域为 W .如果对每一个函数值 $y\in W$,通过关系式 $y=f(x)$,都有一个确定的值 $x\in D$ 与之对应,则这个以 y 为自变量定义在 W 上的新函数,

称为函数 $y = f(x)$的<u>反函数</u>,记为 $x = f^{-1}(y)$.

习惯上以 x 表示自变量,y 表示函数,将反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

由反函数的定义可知,函数 $y = f(x)$的定义域和值域分别是其反函数 $y = f^{-1}(x)$的值域与定义域.

例 9　求函数 $y = \dfrac{x-1}{x+1}$的反函数.

解　去分母并解出变量 x,得

$$x = -\frac{y+1}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}.$$

上式中 x 与 y 的记号互换,即得反函数为

$$y = \frac{1+x}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

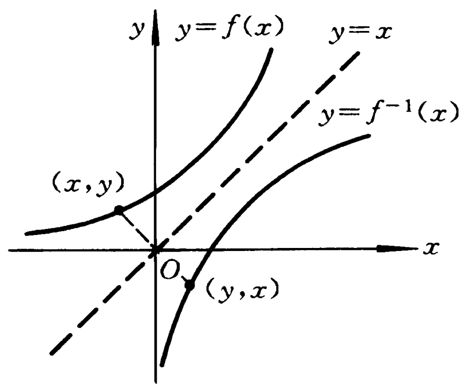

图 1 - 13

由于反函数 $y = f^{-1}(x)$与直接函数 $y = f(x)$相比,变量的记号作了互换.因此,若点(x, y)在曲线 $y = f(x)$上,则点(y, x)必在曲线 $y = f^{-1}(x)$上.反之也对.由此可知,在同一坐标系里,函数 $y = f(x)$与其反函数 $y = f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y = x$ 对称(图 1 - 13).

对于反函数的存在条件,有下述定理:

定理　若函数 $y = f(x)$在其定义域 D 上是单调增加(减少)的,则存在反函数 $x = f^{-1}(y)$.且此反函数也是单调增加(减少)的.

不在整个定义域上单调的函数,不满足上述定理的条件.人们常对这种函数截取一个适当的单调区间来定义它的反函数.例如,正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,且函数值由该函数的最小值 -1 增加到最大值 1.于是可定义正弦函数的反函数 $y = \arcsin x$,其定义域是$[-1,1]$,值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

其它三角函数也可类似地定义反函数.

习题　1 - 2

1. 下列各对函数是否等同:

(1) $f(x) = 2\lg x$, $g(x) = \lg x^2$;

(2) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$, $g(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{x}{1-x^2} + \sqrt{3x-2}$;　　(2) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$;

(3) $y = \lg\sqrt{x+1}$;　　(4) $y = \dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{x-1}}$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x > 0 \\ 1, & x = 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

4．作函数 $y=f(x)=\begin{cases}3x, & |x|>1\\ x^2, & |x|<1\\ 3, & |x|=1\end{cases}$ 的图象，并求 $f(-3)$，$f(0)$，$f(-1)$．

5．证明 $f(x)=3x-2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加．

6．判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x-x^2$；　(2) $f(x)=x\sin x$．

7．下列函数在指定区间是否有界：

(1) $y=x^3$，$(-\infty,+\infty)$，$(-1,1]$；

(2) $y=\dfrac{2}{x-1}$，$(1,2)$，$(2,+\infty)$．

8．求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$；　(2) $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$．

1.3　初等函数

1.3.1　基本初等函数

基本初等函数是指以下几类函数：

(1) 常数函数　$y=C$．

(2) 幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为实常数）．

(3) 指数函数　$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）．

(4) 对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）．

(5) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$．

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等．

这里指数函数与对数函数(同底)互为反函数，每个反三角函数是相应三角函数在一个单调区间上的反函数．

基本初等函数的性质与图形如下表所示（T 表周期）：

名称	表达式	定义域	图形	特性
常数函数	$y=C$	**R**