

高等学校教材

# 高等数学

(物理类专业用)

(第二版)

第三册

四川大学数学系高等数学教研室 编

高等教育出版社

## 出版前言

本书是四川大学数学系编《高等数学》第三册的第二版,本版对第一版的内容作了适当调整,增加了习题答案。本书主要内容为行列式,矩阵,线性方程组,线性空间,线性变换,欧几里得空间, $n$ 元实二次型;常微分方程;概率论的基本概念,随机变量及分布函数,随机变量的数字特征,极限定理等。

本书第一版由田景黄、周城璧两位同志编写,第二版由叶方怡、田涛、杨秀清三位同志修订,可供综合大学和师范院校物理类专业作为教材。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学 第三册/四川大学数学系高等数学教研室编.  
—2版 北京:高等教育出版社,1990.5(2002重印)  
ISBN 7-04-002843-3

. 高... . 四... . 高等数学 . 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 20480 号

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http:// www .hep .edu . cn</a>
总 机	010 - 82028899		<a href="http://www.hep.com.cn">http:// www .hep .com . cn</a>
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷			
		版 次	1979 年 3 月第 1 版
开 本	850 × 1168 1/32		1990 年 5 月第 2 版
印 张	16.25	印 次	2002 年 8 月第 15 次印刷
字 数	390 000	定 价	15.50 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

## 再版前言

本书自 1978 年陆续出版以来,收到许多读者的来信,对本书内容安排,习题配备等方面提出许多宝贵的意见,在此特向他们表示感谢。

这次修订,我们采纳了读者意见,修正、补充了部分内容(如概率论中补充了二维随机向量及其分布)和个别定理的证明,体系上也作了调整,增加了习题类型和数量。书后附有习题答案。

本书是第一版第三册两个分册的合订本。第一版由田景黄(常微分方程,线性代数两部分),周城璧(概率论部分)两位同志编写,第二版由叶方怡(常微分方程部分),田涛(线性代数部分)和杨秀清(概率论部分)三位同志修订,钟丽华同志在修改中作了不少工作。

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编 者

1989年8月

# 目 录

第一篇 线性代数 .....	1
第 章 行列式 .....	1
第一节 $n$ 阶行列式的定义 .....	1
§ 1.1.1 二、三阶行列式的定义 .....	1
§ 1.1.2 $n$ 阶行列式的定义 .....	4
第二节 行列式的主要性质 .....	9
第三节 行列式按行(列)展开 .....	18
§ 1.3.1 按一行(列)展开行列式 .....	18
§ 1.3.2 拉普拉斯定理 .....	22
习题 .....	28
第二章 矩阵代数 .....	34
第一节 矩阵的概念 .....	34
第二节 矩阵的代数运算 .....	36
§ 2.2.1 矩阵的加法与数乘 .....	36
§ 2.2.2 矩阵的乘法 .....	39
第三节 逆矩阵与矩阵的初等变换 .....	48
§ 2.3.1 逆矩阵 .....	49
§ 2.3.2 矩阵的初等变换 .....	54
第四节 转置矩阵与一些重要方阵 .....	59
§ 2.4.1 转置矩阵 .....	59
§ 2.4.2 几个重要的方阵 .....	61
第五节 分块矩阵 .....	65
习题 .....	72
第三章 线性方程组 .....	79
第一节 向量组与矩阵的秩 .....	79
§ 3.1.1 向量组的秩 .....	79
§ 3.1.2 矩阵的秩 .....	85

第二节 线性方程组的解法 .....	91
§ 3.2.1 非齐次线性方程组的解法 .....	91
§ 3.2.2 齐次线性方程组的解法 .....	96
第三节 线性方程组解的结构 .....	98
§ 3.3.1 齐次线性方程组的基础解系 .....	98
§ 3.3.2 非齐次线性方程组解的结构 .....	102
习题 .....	104
<b>第四章 线性空间</b> .....	<b>110</b>
第一节 线性空间的概念 .....	110
§ 4.1.1 线性空间的定义与例子 .....	110
§ 4.1.2 子空间 .....	114
第二节 $n$ 维线性空间 .....	115
§ 4.2.1 $n$ 维线性空间的定义 .....	115
§ 4.2.2 基底变换与坐标变换 .....	119
习题 .....	124
<b>第五章 线性变换</b> .....	<b>127</b>
第一节 线性变换的定义 .....	127
第二节 $n$ 维线性空间 $V$ 中线性变换的矩阵 .....	130
§ 5.2.1 线性变换在一个基底下的矩阵 .....	130
§ 5.2.2 线性变换在不同基底下的矩阵之间的关系 .....	136
第三节 矩阵的对角化 .....	138
§ 5.3.1 矩阵的特征根与特征向量 .....	138
§ 5.3.2 矩阵的对角化 .....	146
习题 .....	152
<b>第六章 欧几里得空间</b> .....	<b>156</b>
第一节 欧几里得空间 .....	156
§ 6.1.1 向量的标准内积 .....	156
§ 6.1.2 标准正交基底 .....	160
第二节 正交变换 .....	165
习题 .....	167

第七章	$n$ 元实二次型 .....	170
第一节	$n$ 元实二次型及其标准形 .....	170
§ 7.1.1	$n$ 元实二次型的定义 .....	170
§ 7.1.2	$n$ 元实二次型的标准形 .....	173
第二节	正定二次型 .....	181
第三节	用正交变换化二次型为标准形 .....	185
习题	.....	194
第 篇	常微分方程 .....	197
第八章	一阶常微分方程 .....	197
第一节	一阶微分方程 $y = f(x, y)$ 解的存在与唯一性定理 .....	197
第二节	未解出导数的一阶方程 $F(x, y, y') = 0$ .....	208
习题	.....	216
第九章	高阶常微分方程 .....	218
第一节	一般概念 .....	218
第二节	几类特殊的高阶方程 .....	219
第三节	$n$ 阶线性微分方程 .....	224
§ 9.3.1	$n$ 阶线性微分算子 .....	225
§ 9.3.2	线性齐次方程的通解 .....	226
§ 9.3.3	降阶法 .....	235
§ 9.3.4	线性非齐次方程的通解 .....	237
习题	.....	241
第十章	常系数线性微分方程 .....	243
第一节	常系数线性齐次方程 .....	243
第二节	常系数线性非齐次方程 .....	246
第三节	尤拉方程 .....	250
第四节	常系数线性方程的应用举例 .....	252
§ 10.4.1	振动问题 .....	252
§ 10.4.2	双回路电路 .....	261
习题	.....	263
第十一章	微分方程组 .....	265

第一节	标准方程组 .....	265
第二节	首次积分 .....	269
第三节	线性方程组的理论 .....	278
§ 11.3.1	线性齐次方程组 .....	279
§ 11.3.2	线性非齐次方程组 .....	282
第四节	常系数线性方程组 .....	284
	习题 .....	292
<b>第十二章</b>	<b>微分方程的级数解法和数值解法 .....</b>	<b>294</b>
第一节	级数解法 .....	294
§ 12.1.1	一阶方程的级数解法 .....	294
§ 12.1.2	二阶线性方程的级数解法 .....	296
第二节	数值解法 .....	305
	习题 .....	310
<b>第十三章</b>	<b>一阶偏微分方程 .....</b>	<b>311</b>
第一节	偏微分方程的基本概念 .....	311
第二节	一阶线性及拟线性偏微分方程 .....	313
第三节	法夫(Pfaff)方程与一阶相容偏微分方程组 .....	321
第四节	一阶非线性偏微分方程 .....	329
	习题 .....	332
附录	常系数线性非齐次方程的算子解法 .....	333
	习题 .....	344
<b>第 篇</b>	<b>概率论 .....</b>	<b>345</b>
<b>第十四章</b>	<b>基本概念 .....</b>	<b>346</b>
第一节	随机事件及其运算 .....	346
§ 14.1.1	随机试验 .....	346
§ 14.1.2	随机事件 .....	347
§ 14.1.3	样本空间 .....	347
§ 14.1.4	事件的关系与运算 .....	348
第二节	频率的稳定性与概率 .....	352
§ 14.2.1	事件的频率 .....	352
§ 14.2.2	概率定义 .....	353
§ 14.2.3	概率的主要性质 .....	355
第三节	古典概型 .....	357

§ 14. 3. 1	古典概型 .....	357
§ 14. 3. 2	古典概率 .....	358
第四节	条件概率 独立性 .....	362
§ 14. 4. 1	条件概率 .....	362
§ 14. 4. 2	概率的乘法公式 .....	365
§ 14. 4. 3	事件的独立性 .....	366
第五节	全概率公式 贝叶斯(Bayes)公式.....	370
§ 14. 5. 1	全概率公式 .....	370
§ 14. 5. 2	贝叶斯(Bayes)公式 .....	372
第六节	独立试验概型 .....	373
习题	.....	377
第十五章	随机变量及分布函数 .....	382
第一节	随机变量的概念 .....	382
第二节	离散型随机变量的概率分布 .....	384
§ 15. 2. 1	离散型随机变量概率分布的概念 .....	384
§ 15. 2. 2	几个常见的离散型分布 .....	387
第三节	连续型随机变量的概率分布 .....	391
§ 15. 3. 1	连续型随机变量的概率密度 .....	391
§ 15. 3. 2	几个常见的连续型分布 .....	394
第四节	随机变量的分布函数 .....	395
§ 15. 4. 1	分布函数概念 .....	395
§ 15. 4. 2	分布函数的基本性质 .....	398
第五节	正态分布 .....	400
第六节	随机变量函数的分布 .....	403
§ 15. 6. 1	离散型随机变量函数的分布 .....	403
§ 15. 6. 2	连续型随机变量函数的分布 .....	404
习题	.....	408
第十六章	多维随机向量及其分布 .....	413
第一节	多维随机向量的概念 .....	413
第二节	二维随机向量的概率分布 .....	414
§ 16. 2. 1	二维离散型随机向量的概率分布 .....	414
§ 16. 2. 2	二维连续型随机向量的概率密度 .....	415
第三节	二维随机向量的分布函数 .....	418

§ 16.3.1	分布函数概念 .....	418
§ 16.3.2	分布函数的基本性质 .....	419
<b>第四节</b>	<b>边缘分布 .....</b>	<b>421</b>
<b>第五节</b>	<b>条件分布 .....</b>	<b>425</b>
§ 16.5.1	离散型随机变量的条件分布 .....	425
§ 16.5.2	连续型随机变量的条件分布 .....	426
<b>第六节</b>	<b>相互独立的随机变量 .....</b>	<b>429</b>
<b>第七节</b>	<b>二维随机向量函数的分布 .....</b>	<b>432</b>
§ 16.7.1	二维离散型随机向量函数的分布 .....	432
§ 16.7.2	二维连续型随机向量函数的分布 .....	433
<b>习题</b>	.....	439
<b>第十七章</b>	<b>随机变量的数字特征 .....</b>	<b>445</b>
<b>第一节</b>	<b>数学期望 .....</b>	<b>445</b>
§ 17.1.1	数学期望的概念 .....	445
§ 17.1.2	随机变量函数的数学期望 .....	449
§ 17.1.3	数学期望的性质 .....	450
<b>第二节</b>	<b>方差 .....</b>	<b>452</b>
§ 17.2.1	方差的概念 .....	452
§ 17.2.2	方差的性质 .....	456
<b>第三节</b>	<b>二维随机向量的协方差 相关系数 .....</b>	<b>458</b>
§ 17.3.1	二维随机向量的协方差 .....	459
§ 17.3.2	相关系数 .....	459
<b>第四节</b>	<b>矩 协方差矩阵 .....</b>	<b>463</b>
§ 17.4.1	随机变量的原点矩与中心矩 .....	463
§ 17.4.2	二维随机向量的混合矩 协方差矩阵 .....	464
<b>习题</b>	.....	465
<b>第十八章</b>	<b>极限定理 .....</b>	<b>469</b>
<b>第一节</b>	<b>大数定律 .....</b>	<b>469</b>
<b>第二节</b>	<b>中心极限定理 .....</b>	<b>474</b>
<b>习题</b>	.....	479
<b>习题答案</b>	.....	481
<b>附表 1</b>	<b>泊松分布表 .....</b>	<b>507</b>
<b>附表 2</b>	<b>标准正态分布表 .....</b>	<b>509</b>

# 第一篇 线性代数

## 第一章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具.同时它在数学的其他分支及物理、力学等许多科学领域中也有广泛的应用.读者熟悉的二、三阶行列式为我们学习  $n$  阶行列式的知识做了一定的准备,因此我们把学习  $n$  阶行列式的定义、性质及计算方法作为本章的首要内容.

### 第一节 $n$ 阶行列式的定义

#### § 1.1.1 二、三阶行列式的定义

为了把二、三阶行列式推广到  $n$  阶行列式,我们先看看二、三阶行列式的一些共同特点,以便给  $n$  阶行列式的定义提供某些依据.为了叙述的方便,我们将二、三阶行列式写成下面的规范形状,并利用“对角线法则”将其展开.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} . \quad (1)$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$- a_{21} a_{32} a_{13} - a_{12} a_{33} a_{21} . \quad (2)$$

这里我们用  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$  或  $1, 2, 3$ ) 表示位于第  $i$  行, 第  $j$  列处的数, 我们称  $a_{ij}$  为行列式的元, 它的第一个足标  $i$  称为行标, 第二个足标  $j$  称为列标. 从 (2) 易知三阶行列式有下列几个特点:

第一, 三阶行列式是  $3!$  个项的代数和.

第二, 它的每项都是行列式中三个元的乘积, 这三个元恰好是每行每列各一个.

第三, 每项都带有确定的符号.

我们把 (2) 中每项的三个因子按它们在行列式中行的顺序排列成

$$a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3}, \quad (3)$$

即每项三个元的行标恰好按自然数顺序排列成 123, 而三个元的列标排列成  $j_1 j_2 j_3$ , 构成自然数 1, 2, 3 的一个排列. 例如, 按此方法写出 (2) 式中六个项的列标排列

123; 231; 312 和 321; 213; 132. 这恰好是 1, 2, 3 所能构成的一切排列, 共  $3! = 6$  个. 其中前面三个排列对应的项带正号, 后面三个排列对应的项带负号. 为了说明各项的符号与其列标排列的关系, 我们引入下面的术语.

**定义 1** 对  $n$  个不同自然数 (可以不必是前  $n$  个自然数) 的一个排列, 若某个数字的右边有  $r$  个比它小的数字, 则说该数字在此排列中有  $r$  个反序. 一个排列中所有数字的反序之和称为该排列的反序数. 排列  $j_1 j_2 \dots j_n$  的反序数记为

$$(j_1 j_2 \dots j_n).$$

例如

$$(31254) = 2 + 0 + 0 + 1 + 0 = 3,$$

$$(12345) = 0,$$

$$(315) = 1 + 0 + 0 = 1,$$

$$(n(n-1)\dots 21) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2} .$$

显然,对任何一个排列,最右边一个数的反序都是零.由  $n$  个不同自然数组成的一切排列(共  $n!$  个)中,唯一一个反序数等于零的排列是按自然数由小到大的排列.这个排列称为标准排列.例如 1234; 2347 分别是两个标准排列.

**定义 2** 反序数等于奇数的排列称为奇排列.反序数等于偶数的排列称为偶排列.

标准排列是偶排列.

要确定一个排列的奇偶性,除直接计算该排列的反序数外还可用下列的方法:把一个排列中某两个不同数字的位置互换,其余的数字不动,就得到另一个排列.这一过程称为一次互换.例如,把排列 1324 中的 3, 4 两个数字的位置互换得到排列 1423.这时我们看到经一次互换奇排列 1324 变成了偶排列 1423.同样地,偶排列 1423 经一次互换变成了奇排列 1324.一般地,有下面的结论

**引理** 排列经一次互换改变其奇偶性.

此引理容易理解,证明从略.由数学归纳法和引理不难证明

**定理**  $n(n-2)$  个不同自然数的任一排列必可经若干次互换变成标准排列,并且互换次数的奇偶性与该排列的奇偶性一致.

即奇(偶)排列必须经奇(偶)数次互换才能变成标准排列.反过来,标准排列经奇(偶)数次互换得到的排列必为奇(偶)排列.

例如排列  $32154 \xrightarrow{1,3} 12354 \xrightarrow{5,4} 12345$ , 因此排列 32154 是偶排列(互换的方法与次数不唯一).

还可证明  $n-2$  时,  $n$  个不同自然数的一切排列中奇排列、偶排列各占一半.(见习题)

现在来看(2)中带正号的三项,其列标排列的反序数

$$(123) = 0; (231) = 2; (312) = 2$$

都是偶数.三个带负号的项其列标排列的反序数

$$(321) = 3; (213) = 1; (132) = 1$$

都是奇数.这样我们就完全清楚了展开式(2)的构成规律.现叙述如下:三阶行列式是一切这种项(3!项)的代数和,每项都是行列式中不同行不同列的三个元的乘积.若把每项写成式(3)的形状,则当  $j_1 j_2 j_3$  为偶排列时该项带正号,为奇排列时带负号,记为  $(-1)^{(j_1 j_2 j_3)}$ .显然,二阶行列式(1)也有上述的特点.

有了上面的说明与记号,就可以把二阶行列式、三阶行列式的展开式(1)和(2)改写为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{(j_1 j_2)} a_{j_1 1} a_{j_2 2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{(j_1 j_2 j_3)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} a_{j_3 3}.$$

这里  $\sum_{j_1 j_2}$ , 表示对 1、2 的一切排列取和.  $\sum_{j_1 j_2 j_3}$  表示对 1、2、3 的一切排列取和.

有了以上讨论,读者不难理解  $n$  阶行列式的定义.

### § 1.1.2 $n$ 阶行列式的定义

**定义 1** 由  $n^2$  个数(实数或复数)排成一个  $n$  行  $n$  列的表,并在两边各画一条竖线的记号:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

( $a_{ij}$  表示位于第  $i$  行、第  $j$  列处的数,称为  $n$  阶行列式的元.)所表

示的数称为  $n$  阶行列式. 这个数 (即  $n$  阶行列式) 是所有这种项 ( $n!$  项) 的代数和: 每项都是  $n$  阶行列式中  $n$  个元的乘积, 这  $n$  个元恰为每行每列各取一个元; 每项所带的符号这样来确定, 当每项中的  $n$  个元按行的自然数顺序排列成  $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$  时, 相应的列标为偶排列时带正号, 为奇排列时带负号, 即每项应带有符号  $(-1)^{(j_1 j_2 \dots j_n)}$ . 用式子表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad (4)$$

其中  $\sum_{j_1 j_2 \dots j_n}$  表示对  $1, 2, \dots, n$  的一切排列取和.

我们称(4)式为  $n$  阶行列式的展开式.

由定义 1 推知,  $n$  阶行列式是  $n!$  个项的代数和, 当  $n \geq 2$  时其中一半项带正号, 另一半项带负号. 二阶行列式、三阶行列式用定义 1 与用对角线法则计算的结果是一致的. 一阶行列式由一个数 (元) 构成, 它的值就等于这个数本身. 今后我们用符号  $\det(a_{ij})$  表示以  $a_{ij}$  为元的  $n$  阶行列式, 在不混淆时也常用  $|A|, |B|$  等记号表示  $n$  阶行列式.

$n$  较大 ( $n > 3$ ) 时, 由于  $n!$  是一个很大的数 (例如  $4! = 24, 5! = 120, \dots$ ), 此时用定义求行列式的值, 在一般情况下是十分困难的. 下面举两个特殊形状的行列式, 并用定义 1 计算它们的值.

**例 1** 求  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值 .

这个行列式的特点是在元  $a_{11}$  到  $a_{nn}$  所成的对角线 (称为行列式的主对角线) 以下的元全为 0, 即当  $i > j$  时,  $a_{ij} = 0$  .

解 由于这个行列式中有众多的元为 0, 为了减少计算过程, 只需找出它的一切非零的项及其所带符号即可. 按行列式的定义, 非零项的  $n$  个元在第一列中只能取  $a_{11}$  (否则该项为 0), 第二列中只能取  $a_{22}$ , 第三列只能取  $a_{33}$ , …, 第  $n$  列必取  $a_{nn}$  为因子. 于是, 此行列式除乘积  $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$  外, 其余一切项均为零. 又因为它的列标排列的反序数  $(123\dots n) = 0$ , 故它带正号. 所以行列式的值为  $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ , 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} .$$

这个行列式称为右上三角形行列式, 或简称为上三角形行列式. 以上说明: 上三角形行列式的值等于其主对角线上各元之积.

**例 2** 求右下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值. 这个行列式的特点是, 当  $i + j > n$  时,  $a_{ij} = 0$  .

解 同例 1 的讨论类似, 除第一行取  $a_{1n}$ , 第二行取  $a_{2n-1}$ , 第三行取  $a_{3n-2}$ , …, 第  $n$  行取  $a_{n1}$  为因子的项

$$a_{1n} a_{2n-1} a_{3n-2} \dots a_{n1}$$

外, 其余一切项均为零, 又它带的符号为

$$(-1)^{[n(n-1)(n-2)\dots 1]} = (-1)^{(n-1) + (n-2) + \dots + 1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

因此有

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{2n-1} \dots a_{n1} .$$

当  $n=4$  时, 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4 \cdot 3}{2}} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} \\ = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} .$$

这说明了计算二阶行列式、三阶行列式的对角线法则, 对四阶以上的行列式不适用.

在举下面的例子之前, 我们提醒读者注意, 行列式的元的行标与列标不一定用前  $n$  个自然数表示.

例如

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

$|B|$  的元由  $|A| = \det(a_{ij})$  中取出位于第二、三、五行与第一、二、四列相交处的元构成.  $|B|$  中每个元的足标分别表示它们在  $|A|$  中的位置.

由行列式的定义有

$$|B| = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{(j_1 j_2 j_3)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} a_{j_3 4} .$$

这里  $j_1 j_2 j_3$  表示 1、2、4 的排列.  $\sum_{j_1 j_2 j_3}$  表示对 1、2、4 的一切排列