高等教育成人教材

高 等 数 学

赵春祀　编著

东 北 大 学 出 版 社

沈　阳

赵春昶 2004

图书在版编目（CIP）**数据**

高等数学 / **赵春昶编著** .— **沈阳** ： **东北大学出版社**，2004.12
ISBN 7-81102-097-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 赵… Ⅲ. 高等数学—成人教育：高等教育—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP **数据核字**（2004）**第** 119813 **号**

出 版 者：**东北大学出版社**
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：**中共沈阳市委机关印刷厂**
发 行 者：**东北大学出版社**
幅面尺寸：140mm×203mm
印 张：9.75
字 数：271 **千字**
出版时间：2004 **年** 12 **月第** 1 **版**
印刷时间：2004 **年** 12 **月第** 1 **次印刷**
责任编辑：**刘淑芳** **责任校对**：**张淑萍**
封面设计：**唐敏智** **责任出版**：**秦 力**

定 价：19.80 **元**

序

成人高等教育是我国高等教育的重要组成部分。大力发展成人高等教育，对于全面提高劳动者素质和适应社会需求，特别是对建设学习型社会具有重大的推动作用。建设完善成人高等教育教材体系，有利于针对成人教育特点开展教学工作，有利于结合实际满足需求，完善成人教育体系。

成人高等数学教材，是针对成人学员入学成绩参差不齐、基础不够扎实、学习时间分散、学习形式灵活多样等特点编写的；这本教材是编者总结多年教学经验，结合学生实际需要编写的。本教材有以下几个方面特点。一是，抓住基本情况，针对性强。根据成人学员基础状况，学生成绩普遍低的实际，加强了对数学基础知识的重点讲解。很好地把初等数学和高等数学连接起来。二是，突出适应领域，扩大适应面。根据成人学员的领域要求，对不同学制、不同专业的学生，本书采取了针对性讲解。三是，把握难易程度，增强梯度性。本书在基本定理、定义和例题、习题难易上进行了比较性的选择，先打基础，再提升

难度；先扩展知识面，再扩大实用性。既适用课堂集中讲解和学习，又适应学生自学。四是，注重理论基础培养，同时又理论与实际相结合。数学基础理论是学好其他学科的基本工具，是夯实基础的过程。学习这样基础理论的目的是为了解决实际问题。本书强调了数学理论在实际应用中的作用。五是，思想性和艺术性相结合。在每一节标题后增加一则名言警句，紧扣主题，关注人文精神的滋养。既注重教学思想方法的介绍，数学思维的培训，数学意识的培育，又激发了学生学习兴趣，优化学习过程，追求人文美化，培养数学美感。

沈阳大学副校长、教授 杨化仁

2004 年 11 月

前　　言

多年来，我一直为成人高校的学生主讲高等数学，总感觉到所选用的教材有些不切合成人学生的情况。因此，在教学中，不断修改和完善教学内容，总结出适合成人学生的教学模式，探索出成人教育的教学规律，在此基础上编写出了本教材。

本教材的完成填补了成人高等教育无现成数学教材的空白，有助于克服成人学生怕学习数学的畏难情绪，激发学生学习数学的兴趣，为成人学生完成学业打下了良好基础。

全书共分九章，包括以下几个内容：

1. 注意链接，过渡自然

从初等数学到高等数学的过渡是成人学生遇到的第一道难关。怎样才能帮助学生摒弃高等数学难学的心理，本书第一章是专门针对成人学生基础差的现状而编写的基础知识，重点介绍了实数结构、方程解法、不等式的解法、集合与区间用法；给出了函数的概念、性质和图像；强调初等函数与分段函数之间的区别和联系以及研究问题的思路。

2. 强化数学思想，培养数学思维

本书重点强调两种思想。其一是极限思想，极限是由于求某些实际问题的精确答案而产生的，而它又不是求某点的精确值。其二是定积分思想。为了解决曲边梯形的面积问题，引出了定积分这一重要概念。这一过程充分体现了“化整为零、积零为整”的思想。

3. 夯实基础理论，训练计算能力

本书重点解决三大计算问题，即极限计算，导数计算，积分计算。这也是高等数学的中心问题。

4. 注重数学的应用，加强横向联系

本教材在导数应用中编写了边际分析和弹性分析，并把这一知识点渗透到“西方经济学”这门课程中，这样就把高等数学与专业课紧密联系起来，体现高等数学的价值。

书中有些内容加了“※”，专科学生可以略掉，本科学生可根据专业特点和教学要求进行合理安排。

本书在出版过程中，沈阳大学成人教育学院院长罗大伟、教务科科长于孝范等给予了大力支持和帮助，在此一并表示诚挚的谢意。

著书与教学，学术与研究，都有同样的公理：没有最好的，只有不断地反思、总结和吸收才能达到更好。本书肯定有许多不足之处，希望得到更多专家学者的批评指教。

赵春昶

2004 年 11 月

目　　录

第一章　基础知识

第一节　实　数

> 在真实的生命里，每桩事业都是由信心开始，并由信心跨出第一步。
>
> ——史格勒

由于高等数学主要是在实数范围内研究问题，因此本节先复习一下与实数有关的基本知识和理论．

一、实数中的基本概念及运算

1．实数

实数由有理数和无理数组成．有理数是指能表示为两个整数相除形式的数，它包括整数、有限小数、无限循环小数，如：2005，$-\frac{3}{8}$，2.15，-4.181818，…；无理数是指无限不循环小数，即不能表示为两个整数相除形式的数，如：π，e，$-\sqrt{3}$，$\lg 2$ 等．

实数按以下方法分类．

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

2．运算法则

实数有加、减、乘、除、乘方、开方等运算．其中，加法与减法、乘法与除法、乘方与开方互为逆运算．下面列出一些运算法则．

加法、乘法运算法则：

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法交换律　$a\cdot b=b\cdot a$

乘法结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

分配律　$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

括号法则：

$$a+(b-c)=a+b-c$$

$$a-(b-c)=a-b+c$$

$$a+b-c=a+(b-c)$$

$$a-b+c=a-(b-c)$$

比例法则：

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\quad(b\neq 0)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\quad(b\neq 0,\ d\neq 0)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad(b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0)$$

乘方运算法则:

正数的非 0 **次幂是正数**; **负数的非** 0 **偶次幂是正数**, **奇次幂是负数**; 0 **的正数次幂等于** 0, **非** 0 **数的** 0 **次幂等于** 1 .

例如, $2^3=8$, $(-2)^2=4$, $(-3)^3=-27$, $0^{2005}=0$, $a^0=1\ (a\neq 0)$.

同底数幂相乘, **底数不变**, **指数相加** . **即**

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

同底数幂相除, **底数不变**, **指数相减** . **即**

$$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0)$$

幂的乘方, **底数不变**, **指数相乘** . **即**

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

积的乘方等于把积的每一个因式分别乘方, **再把所得的幂相乘** . **即**

$$(ab)^n=a^nb^n$$

开方运算法则:

正数的奇次方根是正数, **负数的奇次方根是负数**; **正数的偶次方根有两个**, **这两个方根互为相反数**, **负数没有偶次方根**; 0 **的** n **次方根是** 0 .

例如: $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[n]{0}=0\quad(n$ **是正整数**) .

若 $x^2=a$, **则** x **叫做** a **的平方根** .

一个正数 $a(a>0)$**的平方根**, **是两个互为相反的数**$\pm\sqrt{a}$, **其中正的平方根**$\sqrt{a}$**叫做** a **的算数平方根** . **式子**$\sqrt{a}(a\geq 0)$**叫做二次根式** .

若 $x^3=a$, **则** x **叫做** a **的立方根** .

二次根式的运算在高等数学教学中起着很重要的作用 . **运算法则如下**:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad(a\geq 0,\ b\geq 0)$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geq 0,\ b\geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0)$$

两个含有根式的代数式相乘，若它们的积不含根式，则这两个根式叫做互为有理化因式．常用的有理化因式：$\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$与$\sqrt{a}-\sqrt{b}$．有理化通常指分母有理化和分子有理化．

例 1　将$\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$分子有理化．

解　$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

例 2　将$\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$分母有理化．

解　$$\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{(1-\sqrt{1+x^2})(1+\sqrt{1+x^2})}=\frac{x^2(1+\sqrt{1+x^2})}{-x^2}=-(1+\sqrt{1+x^2})$$

二、数轴与绝对值

1．数轴

规定原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴．一般情况下，从左到右为正方向．如图 1-1．

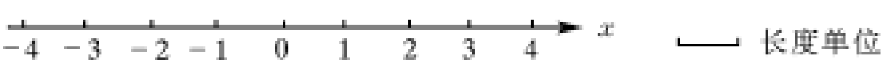

图 1-1

数轴上的 0 点表示原点，原点右边的点表示正数，原点左边的点表示负数，数轴上的点与全体实数是一一对应的，即对任意一个实数 a，在数轴上一定能找到一点与它对应．反之，对数轴上的任意一点，一定存在一个实数 a，它能表示该点在数轴上的位置．为了简便起见，我们常用同一个字母或数字既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的点，比如，数 a 与点 a，数$\sqrt{2}$与点$\sqrt{2}$，……

2．绝对值

一个数 a 的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离，记作 $|a|$. 正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0，即：

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

绝对值有以下性质：

(1) $|a| \geq 0$，$|a| = |-a|$，$|a| = \sqrt{a^2}$；

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$；

(3) 不等式 $|a| \leq k(k \geq 0)$ 与不等式 $-k \leq a \leq k$ 等价；

(4) $|a+b| \leq |a| + |b|$；

(5) $|ab| = |a| \cdot |b|$；

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$，$b \neq 0$.

例 3　去掉下列各式的绝对值符号.

(1) $|3x-1|$；

(2) $|\sin x|$　$(0 \leq x \leq 2\pi)$；

(3) $|2x+5| + |x-3|$　$(-2 \leq x \leq 2)$.

解　(1) 当 $3x-1>0$，即 $x > \dfrac{1}{3}$ 时，$|3x-1| = 3x-1$

当 $3x-1=0$，即 $x = \dfrac{1}{3}$ 时，$|3x-1| = 0$

当 $3x-1<0$，即 $x < \dfrac{1}{3}$ 时，$|3x-1| = -(3x-1) = 1-3x$

所以

$$|3x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x > \dfrac{1}{3} \\ 0, & x = \dfrac{1}{3} \\ 1-3x, & x < \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(2) 因为当 $0 \leq x < \pi$ 时，$\sin x > 0$，$|\sin x| = \sin x$

当 $x=\pi$ 时, $\sin x=0$, $|\sin x|=0$

当 $\pi< x\leq 2\pi$ 时, $\sin x<0$, $|\sin x|=-\sin x$

所以 $$|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x<\pi\\ 0, & x=\pi\\ -\sin x, & \pi<x\leq 2\pi\end{cases}$$

(3) 因为当 $-2\leq x\leq 2$ 时, $2x+5>0$, $x-3<0$

所以 $|2x+5|+|x-3|=2x+5-(x-3)=x+8$

小结: 实数部分是我们学好高等数学的基础 . 大家一定要熟练掌握以下几个方面问题 .

(1) 实数的加、减、乘、除、乘方、开方运算, 特别是根式的有理化运算 .

(2) 了解数轴这个最简单的图形, 以及实数与数轴上的点一一对应 .

(3) 绝对值的概念与性质

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

由绝对值概念引申为分段函数, 扩展知识面 .

(4) 必会的一些公式

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\quad(b\neq 0)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}\quad(b\neq 0,\ d\neq 0)$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad(b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0)$$

$$a^m a^n=a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad(a\neq 0)$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a\geq 0,\ b\geq 0)$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a\geq 0,\ b\geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a\geq 0,\ b>0)$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a\geq 0,\ b>0)$$

$$|a|\geq 0$$

$$|a|\leq k \quad (k\geq 0) \qquad -k\leq a\leq k$$

$$|a|\geq k \quad (k\geq 0) \qquad a\geq k \text{ 或 } a\leq -k$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b\neq 0)$$

第二节　方　程

> **$S = x + y + z$，S 代表成功，x 代表艰苦的劳动，y 代表正确的方法，z 代表少说空话。**
>
> **——爱因斯坦**

一、方程中的基本概念

用等号连接的两个式子叫做等式，含有未知量的等式叫做方程．例如：$2x+3y=-1$，$ax-b=1$，$x^2+2x-3=0$．

含有 n 个未知量的方程叫做 n 元方程．未知量的最高次幂是

m 次的方程叫做 m 次方程.其中“元”就是指未知量的个数.例如:

$3x-1=5$ 一元一次方程

$x^2+2x-3=0$ 一元二次方程

$3x+4y=5$ 二元一次方程

能够使方程成为恒等式的未知量的值叫做方程的解.含有一个未知量的方程的解也叫做方程的根.

求方程的解或确定方程无解的过程叫做解方程.

二、一元一次方程

只含有一个未知量,并且未知量的最高次幂是一次的整式方程叫做一元一次方程.它的一般形式是

$$ax+b=0 \quad (a\neq 0)$$

方程的解为

$$x=-\frac{b}{a}$$

三、一元二次方程

只含有一个未知量,并且未知量的最高次幂是二次的整式方程叫做一元二次方程.它的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

其中 ax^2 叫做二次项,a 叫做二次项的系数,bx 叫做一次项,b 叫做一次项的系数,c 叫做常数项.

1.用因式分解法解一元二次方程

例 1 解方程 $4x^2-8x-5=0$.

解 由十字相乘法知,左边可分解为

$$(2x-5)(2x+1)=0$$

$$2x-5=0,\ x_1=\frac{5}{2};\ 2x+1=0,\ x_2=-\frac{1}{2}$$

所以方程的解为 $x_1=\frac{5}{2}$,$x_2=-\frac{1}{2}$.