

农村自学考试实验区教材

# 高等数学

田立新 主编  
卢殿臣 李医民 编  
李勇智 蔡国梁

北京理工大学出版社

## 内 容 简 介

本书是农村自学考试实验区机电工程专业高等数学教材。

全书共十一章,内容包括:一元与多元函数的微分学和积分学、向量代数与空间解析几何、常微分方程、无穷级数。针对自学考试的特点,注重启发,讲解详细,通俗易懂。在每章之后均配有自学指导、复习题、自我检查题,书末附模拟试卷。本书融教材、自学指导、习题集于一体,便于自学和复习迎考。

本书除可作为农村自学考试实验区机电专业教材使用外,还可供参加机械类其它形式自学考试的学员及普通高校机械类各专业的学生和有关电视大学、职业大学、函授大学师生作为教材和参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学/田立新主编. —北京:北京理工大学出版社, 1999. 10

农村自学考试实验区教材

ISBN 7-81045-634-2

I. 高… II. 田… III. 高等数学-乡村教育-自学考试-教材 IV. 013-43

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第42639号

责任印制:李绍英 责任校对:李 军

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路7号)

邮政编码100081 电话(010)68912824

北京房山先锋印刷厂印刷

\*

787毫米×1092毫米 16开本 22.75印张 553千字

1999年10月第1版 1999年10月第1次印刷

印数 1—3000册 定价 31.50元

×图书印装有误,可随时与我社退换×

## 出版前言

高等教育自学考试制度在我省实施十多年来,已先后开考了文、理、工、农、医、法、经济、教育等类五十多个本、专科专业,全省共计三百余万人报名参加考试,已有 11.4 万人取得毕业证书。这项制度的实施,不仅直接为我省经济建设和社会发展造就和选拔了众多的合格人才,而且对鼓励自学成才、促进社会风气的好转,提高劳动者的科学文化素质具有非常重要的意义。十多年来的实践证明,自学考试既是一种国家考试制度,又是一种基本的教育制度,受到广大自学者和社会各界的欢迎,产生了巨大的社会效益,赢得了良好的社会信誉。

为了贯彻落实党的十五届三中全会精神,深入实施科教兴省战略,探索建立为我国农村经济与社会发展培养人才的新路子,我省经全国高等教育自学考试指导委员会批准,从 1999 年开始开展农村高等教育自学考试实验区的试点工作。这是一项全方位的试点工作,我们将在专业设置、自学教材和考试形式等方面进行重大改革,使高等教育自学考试制度更加适应农村经济发展和人才培养的要求。

自学考试制度是建立在个人自学基础上的教育形式,而个人自学的基本条件是自学教材。一本好的自学教材不仅可以使自学者“无师自通”,还对保证自学考试质量具有重要作用。对农村自学者来说,由于缺少“名师指点”和自学者之间的相互交流,自学相当困难,除了要有一本高质量的自学教材外,还需要有与之配套的自学指导书,以便帮助自学者系统地掌握教材的内容,达到举一反三、触类旁通,提高自学效率的目的。因此,我们在农村自学考试实验区教材建设中,试图探索一种教材编写的新路子,将教材内容与自学指导有机地融合在一起,使自学者更加容易地理解和掌握教材的内容;同时,打破常规教材编写追求系统性、完整性的戒律,针对我省当前农村经济发展的实际状况,把农村经济发展、农民发家致富需要的知识和理论写进教材中去,使之成为农村自学者学习科学文化知识、提高自身素质的教科书,成为指导农业生产和农民致富的科学手册。

农村自学考试实验区的教材建设工作是一项基础建设工作,它是我省农村自学考试实验区试点工作取得成功的必要保证,为此省高等教育自学考试委员会成立了“江苏省农村自学考试实验区专业指导委员会”,具体负责教材建设的规划和编写审定工作。

随着农村自学考试实验区试点工作的进一步展开,我们将有计划、有步骤地组织有关高等院校、成人高校、高等职业学校、中等农业专科学校以及行业主管部门中业务水平较高、教学经验丰富、了解农村情况、熟悉自学考试特点和规律的专家、学者,编写一批既适合自学特点又适应农村经济建设和社会发展需要的自学教材,以满足农村自学者的需要。我们相信,随着农村自学考试实验区教材的陆续出版,必将对我省农村自学考试事业的发展,为农村培养“留得住、用得上”的应用型、复合型人才,加快农村现代化建设起到积极的促进作用。

编写适应农村经济建设和社会发展需要的自学教材,是一项探索性的工作,需要在实践中不断总结和提高,为使这项有意义的工作能取得事半功倍的效果,希望得到社会各方面更多的关心和支持。

由于作者对自学考试特点和农村实际情况了解的深度有限,书中不当之处在所难免,敬请广大读者惠予指正。

江苏省高等教育自学考试委员会办公室

一九九九年四月

# 编写说明

本书为江苏省面向农村自学考试实验区机电工程专业高等数学教材。

在本书的编写过程中，在体系和内容上充分考虑到面向农村自学考试的特点，结合多年来编者积累的教学经验和体会，着重于基本概念、基本理论和基本方法的阐述与讲解。本书除教材内容外，各章均配有自学指导，包括学习方法、基本要求、内容总结、自学中应注意的问题、例题分析等，再配以复习题、自我检查题，以便于自学者自学、自查，力争做到使自学者无师自通。本书通俗易懂，讲解详细。融教材、习题集、自学指导书三者于一体，便于自学。

书中例题较多，尤其自学指导部分系统阐述解题方法、技巧，自学学员在学习某一章时，仔细研究该章内容及例题，认真做完每节习题及带有综合性的复习题，对其中较难的题，书中给出适当的提示，学员在学习自学指导时，通过对自学中应注意的问题及例题分析的学习，抓住本章的要求、重点、难点，提高学习质量和学习效率。在此基础上，自学学员可以通过2小时的时间做“自我检查题”检验自己经过自学后是否已经掌握了该章的主要内容，做阶段性小结。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数和空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学及其应用、常微分方程、无穷级数。每一章由若干节组成，每节配有习题，每章末附复习题、自学指导、自我检查题、书末附参考答案。附录中的模拟试卷，供学完本教材后自测用。

本书由江苏理工大学田立新教授担任主编。参加本书编写的有江苏理工大学卢殿臣副教授（第一、二章）、田立新教授（第三、四章）、李医民副教授（第五、六、七章）、南京农业大学李勇智讲师（第八、九章）、江苏理工大学蔡国梁副教授（第十、十一章）。在编写过程中，徐民京教授（江苏理工大学）、宣立新教授（南京动力专科学校）、郁金文副教授（金陵职业大学）分别认真审阅了全书手稿，王丽霞副教授（江苏理工大学）审阅了部分手稿，并提出许多修改意见；张正娣同志、赵兴平同志、丁占文同志（江苏理工大学）为全书的习题做了解答。在此谨致以衷心的感谢！

本书也可供参加机械类各专业其它形式自学考试的学员以及普通高校机械类各专业的学生和有关电视大学、职业大学、函授大学师生作为教材或参考书。

限于编者水平，加之时间仓促，书中一定还存在不少缺点和不足之处，恳请使用本书的同行及广大读者批评指正。

编者

1999年6月20日

# 目 录

<b>第一章 函数</b>	( 1 )
第一节 集合	( 1 )
第二节 函数概念	( 3 )
第三节 函数的简单性质	( 8 )
第四节 反函数	( 10 )
第五节 复合函数	( 11 )
第六节 基本初等函数和初等函数	( 12 )
第七节 函数关系的建立	( 17 )
复习题	( 18 )
自学指导	( 19 )
自我检查题	( 24 )
<b>第二章 极限与连续</b>	( 25 )
第一节 数列的极限	( 25 )
第二节 函数的极限	( 28 )
第三节 无穷小量与无穷大量	( 33 )
第四节 极限运算法则	( 34 )
第五节 极限存在准则与两个重要极限	( 36 )
第六节 无穷小量的比较	( 40 )
第七节 函数的连续性	( 41 )
第八节 连续函数的性质与初等函数的连续性	( 45 )
复习题	( 47 )
自学指导	( 48 )
自我检查题	( 55 )
<b>第三章 导数与微分</b>	( 56 )
第一节 导数概念	( 56 )
第二节 部分基本初等函数求导公式	( 61 )
第三节 函数的和、差、积、商的求导法则	( 63 )
第四节 复合函数与反函数的求导公式	( 66 )
第五节 高阶导数	( 71 )
第六节 隐函数求导与参数方程求导	( 73 )
第七节 函数的微分	( 78 )
复习题	( 82 )
自学指导	( 83 )
自我检查题	( 91 )
<b>第四章 导数的应用</b>	( 92 )
第一节 中值定理	( 92 )
第二节 罗必塔法则	( 96 )

第三节	函数单调性的判定和函数的极值	(101)
第四节	最大值和最小值问题	(105)
第五节	函数图形的描绘	(107)
第六节	曲率	(111)
复习题		(114)
自学指导		(115)
自我检查题		(122)
<b>第五章</b>	<b>不定积分</b>	(123)
第一节	不定积分	(123)
第二节	换元积分法	(126)
第三节	分部积分法	(130)
第四节	有理函数的不定积分	(132)
第五节	积分表的使用	(136)
复习题		(137)
自学指导		(137)
自我检查题		(144)
<b>第六章</b>	<b>定积分及其应用</b>	(145)
第一节	定积分的概念	(145)
第二节	定积分的性质	(148)
第三节	微积分基本定理	(150)
第四节	定积分的换元法与分部积分法	(153)
第五节	定积分的应用	(157)
复习题		(166)
自学指导		(167)
自我检查题		(174)
<b>第七章</b>	<b>向量代数和空间解析几何</b>	(176)
第一节	空间直角坐标系	(176)
第二节	向量代数	(178)
第三节	曲面及其方程	(183)
第四节	空间曲线及其方程	(185)
第五节	平面及空间直线	(188)
第六节	二次曲面简介	(192)
复习题		(194)
自学指导		(195)
自我检查题		(200)
<b>第八章</b>	<b>多元函数微分学及其应用</b>	(201)
第一节	多元函数的极限与连续	(201)
第二节	偏导数	(205)
第三节	全微分	(208)
第四节	多元复合函数的求导法则	(211)
第五节	多元函数微分学的几何应用	(214)
第六节	多元函数的极值及其求法	(217)

复习题 .....	(220)
自学指导 .....	(221)
自我检查题 .....	(231)
<b>第九章 多元函数积分学及其应用</b> .....	(232)
第一节 二重积分的概念及性质 .....	(232)
第二节 二重积分的计算法 .....	(235)
第三节 三重积分及其计算法 .....	(242)
第四节 重积分的应用 .....	(246)
复习题 .....	(249)
自学指导 .....	(250)
自我检查题 .....	(257)
<b>第十章 常微分方程</b> .....	(259)
第一节 微分方程的基本概念 .....	(259)
第二节 一阶微分方程 .....	(263)
第三节 二阶线性微分方程解的结构 .....	(269)
第四节 二阶常系数齐次线性方程的解法 .....	(272)
第五节 二阶常系数非齐次线性方程的解法 .....	(274)
复习题 .....	(279)
自学指导 .....	(279)
自我检查题 .....	(286)
<b>第十一章 无穷级数</b> .....	(289)
第一节 数项级数的基本概念和性质 .....	(289)
第二节 正项级数及其审敛法 .....	(293)
第三节 任意项级数的收敛问题 .....	(297)
第四节 幂级数及其性质 .....	(300)
第五节 函数的幂级数展开式 .....	(304)
复习题 .....	(308)
自学指导 .....	(311)
自我检查题 .....	(317)
<b>模拟试卷</b> .....	(319)
<b>参考答案</b> .....	(322)
<b>积分表</b> .....	(340)
<b>参考书目</b> .....	(346)
<b>附录 高等数学自学考试大纲</b> .....	(347)

# 第一章 函 数

函数是高等数学研究的主要对象. 函数概念是高等数学中最重要的基本概念之一. 函数关系就是变量之间的依存关系. 函数的不少内容已在中学里学过, 本章只对函数内容作些复习与提高

## 第一节 集 合

### 1 集合的有关概念及运算

集合概念是数学中一个原始的概念, 也就是说, 它不能用更简单的概念定义, 我们通过例子说明这个概念. 例如, 某班全体同学组成一个集合, 所有三角形组成一个集合, 世界上所有国家组成一个集合, 全体实数组成一个集合等等. 一般地, 可以把集理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体. 集合里的各个对象叫做这个集合的元素. 习惯上, 集合用大写字母  $A, B, C$  等表示, 而元素用小写字母  $a, b, c$  等表示. 如果  $a$  是集合  $A$  的元素, 则记作  $a \in A$ , 读作“ $a$  属于  $A$ ”; 否则记作  $a \notin A$ , 读作“ $a$  不属于  $A$ ”.

所谓给定一个集合, 就是给出这个集合由哪些元素组成. 给出的方法主要有列举法和描述法. 所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内. 例如, 由元素  $a_1, a_2, \dots, a_n$  组成的集合  $A$ , 可记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

所谓描述法, 就是把集合中的元素的公共属性描述出来, 可记作

$$A = \{x | x \text{ 所具有的性质 } p\}.$$

$x$  所具有的性质  $p$ , 实际上就是  $x$  作为元素应满足的充分必要条件; 具有性质  $p$  的元素都是集合  $A$  的元素, 集合  $A$  的元素都具有性质  $p$ . 例如, 满足不等式  $a \leq x \leq b$  的所有实数集合, 可记作

$$A = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

又如, 平面上坐标适合方程  $x^2 + y^2 = 1$  的点  $(x, y)$  的全体所组成的集合  $M$ , 可记作

$$M = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 = 1\}$$

$M$  表示  $xOy$  平面上以原点为中心, 半径等于 1 的圆周上点的全体组成的集合. 显然  $(0, 1) \in M, (-1, 0) \in M$ , 而  $(1, 1) \notin M$ .

**定义 1** 如果集合  $A$  的元素都是集合  $B$  的元素, 即若  $x \in A$ , 则有  $x \in B$  成立, 就称  $A$  为  $B$  的子集, 记作  $A \subset B$  (读作  $A$  含于  $B$ ) 或  $B \supset A$  (读作  $B$  包含  $A$ ).

例如, 全体自然数集合记为  $N$ , 全体整数集合记为  $Z$ , 全体有理数集合记为  $Q$ , 全体实数集合记为  $R$ , 则  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

不含任何元素的集合叫做空集, 记为  $\emptyset$ . 并规定空集为任何集合的子集

**定义 2** 如果  $A \subset B$ , 且  $B \subset A$ , 则称集合  $A$  与集合  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

如  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{x | x^3 - x = 0\}$ ,  $C = \{(x, y) | x \in R, y \in R, x^2 + y^2 = -1\}$ , 则

$$A = B, C = \emptyset.$$

**定义 3** 既属于  $A$  又属于  $B$  的所有元素组成的集合叫做  $A$  与  $B$  的交集, 记作

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

**定义 4** 所有属于  $A$  或属于  $B$  的元素组成的集合叫做  $A$  与  $B$  的并集, 记作

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

**例 1** 设  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ , 则

$$A \cap B = \{1, 3\}, \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}.$$

**例 2** 设  $A = \{x | 1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | 0 \leq x < 2\}$ , 则

$$A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}, \quad A \cup B = \{x | 0 \leq x < 3\}$$

## 2 绝对值

在中学里我们已经学过, 数轴上的点与实数之间可以建立一一对应关系. 有时为了形象起见, 我们也把数轴上与数  $x$  对应的那个点, 叫做点  $x$ .

**定义 5** 实数  $a$  的绝对值(记作  $|a|$ ) 规定为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$a$  的绝对值  $|a|$  在数轴上表示点  $a$  到原点的距离. 按绝对值的定义显然可得到下列结论:

- (1)  $-|a| \leq a \leq |a|$ ;
- (2) 如果  $|x| < \epsilon$ , 则  $-\epsilon < x < \epsilon$ , 反之亦然;
- (3) 如果  $|x| > N$ , 则  $x > N$  或  $x < -N$ , 反之亦然;
- (4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;
- (5)  $|a - b| \geq |a| - |b|$ ;
- (6)  $|ab| = |a||b|$ ;  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

## 3 区间

区间是实数集合  $R$  的子集. 若  $a \in R, b \in R, a < b$ , 则介于  $a$  与  $b$  之间的一切实数, 在数轴上就是从点  $a$  到点  $b$  的线段, 称为有限区间;  $a, b$  分别称为区间的左、右端点;  $(b - a)$  称为区间的长度. 有限区间可分为

(1) **闭区间**: 两个端点都包括在内, 记作  $[a, b]$ , 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

(2) **开区间**: 两个端点都不包括在内, 记作  $(a, b)$ , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

(3) **半开区间**: 只包括一个端点在内, 记作  $[a, b)$  或  $(a, b]$ , 即

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

此外, 还有下列无限区间(如图 1-1(c)、(d)):

$$(a, +\infty) = \{x|x > a\}, [a, +\infty) = \{x|x \geq a\}, (-\infty, b) = \{x|x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x|x \leq b\}, (-\infty, +\infty) = \{x|x \in R\}.$$

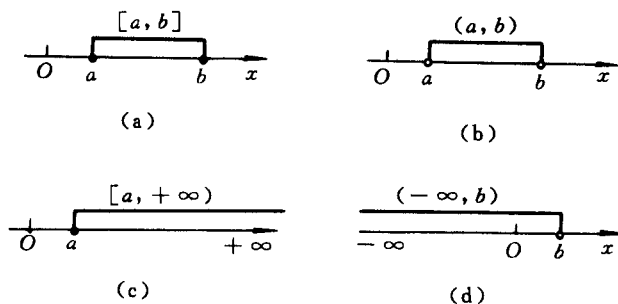


图 1-1

以后我们常用“区间  $I$ ”代表各种类型的区间.

**定义 6** 若  $\delta > 0$ , 则开区间

$$(a - \delta, a + \delta) = \{x|a - \delta < x < a + \delta\} = \{x||x - a| < \delta\}$$

叫做点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记作  $U(a, \delta)$ , 即

$$U(a, \delta) = \{x||x - a| < \delta\}.$$

点  $a$  叫做  $U(a, \delta)$  的中心,  $\delta$  叫做  $U(a, \delta)$  的半径. 从数轴上看,  $|x - a|$  表示点  $x$  与点  $a$  之间的距离. 因此点  $a$  的  $\delta$  邻域  $U(a, \delta)$  表示与点  $a$  距离小于  $\delta$  的一切点  $x$  的全体, 即以点  $a$  为中心, 长度为  $2\delta$  的开区间 (如图 1-2).

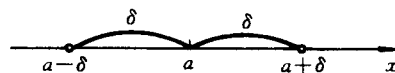


图 1-2

在  $U(a, \delta)$  中去掉中心点  $a$  后, 称为点  $a$  的去心  $\delta$  邻域, 记作  $U(\hat{a}, \delta)$ , 即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x|0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里  $0 < |x - a|$  表示  $x \neq a$ .

### 习题 1-1

- 1 已知  $A = \{2, 3, 4, a\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, b\}$ , 若  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ , 求  $a$  和  $b$
- 2 设  $A = \{x|x \geq 1\}$ ,  $B = \{x||x| < 3\}$ , 求  $A \cap B$  和  $A \cup B$
- 3 用区间表示集合  $A = \{x||x - 2| < \frac{1}{10}\}$  和  $B = \{x||x + 1| < 1\}$
- 4 求邻域半径  $\delta$ , 使  $x \in U(1, \delta)$  时,  $|2x - 2| < \epsilon$ , 又若  $\epsilon$  分别为 0.1, 0.01 时, 上述  $\delta$  各等于多少?

## 第二节 函数概念

在观察某种自然现象或工程技术过程中, 常常要遇到许多量. 如长度、面积、体积、重量、温度、速度、电流强度、电压、电阻等等. 我们遇到的量, 一般可以分为两种: 一种量在过程的进行中不起变化, 也就是保持一定的数值, 叫做常量; 另一种量在过程的进行中有变化, 也就是可

取不同的数值,叫做**变量**. 常量往往用字母  $a, b, c$  等表示, 变量往往用字母  $x, y, z$  等表示. 例如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积是常量, 而气体的温度与压力是变量. 又如, 一个金属圆环在受热过程中, 圆环的直径与周长都是变量, 而它的周长与直径之比是常量, 即圆周率  $\pi$ . 变量之间常常存在某种依存关系, 先看几个例子.

## 1 引例

**例 1** 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为  $t$ , 下落的距离为  $s$ . 假定开始下落的时刻为  $t = 0$ , 那么  $s$  与  $t$  之间的依赖关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定, 其中  $g$  为重力加速度, 是一个常数 ( $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ ). 假定物体着地的时刻为  $t = T$ , 那么当时间  $t$  在  $[0, T]$  上任意取定一个数值时, 按公式  $s$  就有确定的数值与之对应. 如:

$$t = 1(\text{s}) \text{ 时, } s \approx \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1^2 = 4.9(\text{m});$$

$$t = 3(\text{s}) \text{ 时, } s \approx \frac{1}{2} \times 9.8 \times 3^2 = 44.1(\text{m}).$$

**例 2** 由实验测得某金属轴在不同温度  $x$  (C) 下的长度  $L$  (m), 数据如表 1-1.

表 1-1

$x/\text{C}$	10	20	30	40	50
$L/\text{m}$	2 000 11	2 000 22	2 000 31	2 000 39	2 000 46

表 1-1 给出了变量  $x$  与  $L$  之间的依存关系, 当  $x$  取集合  $D = \{10, 20, 30, 40, 50\}$  中任一元素时, 从表中可以查出与之对应的  $L$ . 如  $x = 20(\text{C})$  时,  $L = 2\,000.22(\text{m})$ .

**例 3** 气象观察站的气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上, 得到如图 1-3 所示的曲线. 根据这条曲线, 就能得到任何时刻  $x \in [0, 24]$  所对应的气温  $y$ . 如  $x = x_1$  时, 对应的  $y_1$  为图 1-3 中点  $P(x_1, y_1)$  的纵坐标.

上面三个例子的实际意义虽不相同, 但把各个变量的具体意义撇开不管, 则可以看到这些问题的共同点. 含有两个变量, 当其中一个变量在一定范围内取定一数值后, 按照一个确定的规则, 另一个变量有确定的数值与之对应, 两个变量之间的这种对应关系, 在数学上就是函数概念.

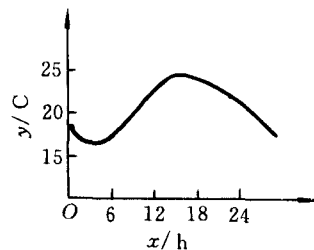


图 1-3

## 2 函数概念

**定义 1** 设有两个变量  $x$  和  $y$ , 如果变量  $x$  在某一非空实数集合  $D$  内任取一个确定的数值, 变量  $y$  按照一定的法则总有确定的值与之对应, 则称  $y$  为  $x$  的函数, 记为

$$y = f(x) \tag{1-1}$$

其中  $x$  叫做**自变量**,  $y$  叫做**因变量或函数**,  $D$  叫做函数的**定义域**, 因变量  $y$  取值所依据的法则叫做函数的**对应法则**, 当  $x$  取遍  $D$  内所有值时, 变量  $y$  所对应的数值范围叫做函数的**值域**. 将  $x = x_0$  时函数  $y$  的对应值叫做  $f(x)$  在  $x_0$  的函数值, 记为  $f(x_0)$  或  $y|_{x=x_0}$ .

如,例1中 $s$ 是 $t$ 的函数, $D = [0, T]$ ,对应法则用公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 表示;例2中 $L$ 是 $x$ 的函数, $D = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ ,对应法则用表1-1表示,例3中 $y$ 是 $x$ 的函数, $D = [0, 24]$ ,对应法则用图1-3表示.可见对应法则可用多种形式表示,在函数记号(1-1)中用 $f(\quad)$ 表示这种对应法则, $f(x)$ 就是指这个法则作用在 $x$ 上,所以 $f(x)$ 好像是一组运算框架.

例如 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ,  $f(\quad) = (\quad)^2 + 2(\quad) - 3$ ,  $f(2) = 2^2 + 2 \times 2 - 3 = 5$ ,  $f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) - 3 = -4$ ,  $f(h+1) = (h+1)^2 + 2(h+1) - 3$ .

一般地,函数的对应法则也可以用 $g(\quad)$ ,  $\varphi(\quad)$ ,  $F(\quad)$ 等表示.

深刻认识函数概念,就要深刻理解函数是由定义域和对应法则所确定.要判断两个函数是否相同,就要看它们的定义域和对应法则是否完全一样,至于函数的两个变量用什么字母表示则无关紧要.

例如, $y = x^2 + 1$ 与 $y = t^2 + 1$ 及 $s = t^2 + 1$ 都可以看作是同一个函数;而 $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 则不是同一个函数,因为它们的定义域不同.

在实际问题中,函数的定义域是由所考虑问题的实际意义来确定,如例1中 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $[0, T]$ .又如圆面积 $A$ 是半径 $r$ 的函数 $A = \pi r^2$ ,其定义域为 $(0, +\infty)$ .

在一般的研究中,给出函数关系而不指明它的定义域时,就认为定义域是能使因变量有确定实数值的自变量的全体.如 $y = x^2 + 1$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ,又如 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$ .

**例4** 求函数 $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \lg(1-x)$ 的定义域

**解** 设 $y = f(x) + g(x)$ ,其中

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \text{ 的定义域 } D_1 = (0, 1],$$

$$g(x) = \lg(1-x) \text{ 的定义域 } D_2 = (-\infty, 1),$$

所以 $y$ 的定义域 $D = D_1 \cap D_2 = (0, 1)$ .

**例5** 在直角坐标系中,半径为 $r$ ,圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$ ,这个方程在闭区间 $[-r, r]$ 上确定一个以 $x$ 为自变量、 $y$ 为因变量的函数.当 $x$ 取 $-r$ 或 $r$ 时,对应的函数值等于0,但当 $x$ 取开区间 $(-r, r)$ 内的任一数值 $x_0$ 时,对应的函数值为 $-\sqrt{r^2 - x_0^2}$ 与 $\sqrt{r^2 - x_0^2}$ .

如果对于定义域内 $x$ 的每一个值,变量 $y$ 有几个值与之对应,则该函数叫做多值函数,而把仅有一个确定值与之对应的函数叫做单值函数.今后我们主要讨论单值函数,对于多值函数通常限制其 $y$ 的范围使之成为单值,再进行研究.如在例5中,当限制 $y > 0$ 时就得到 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ;当限制 $y < 0$ 时,则有 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ .

在平面直角坐标系中,取 $x$ 为横坐标, $y$ 为纵坐标,则平面上点

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

的全体,叫做函数 $y = f(x)$ 的**图形**

函数的常用表示方法有三种:解析法(如例1),表格法(如例2),图示法(如例3).表格法的优点是有现成的数据,用起来方便,所以在各种工程技术领域中,都把常用的函数计算成表而编入手册中以备查考.它的缺点是不完全,不直观,不便于作理论研究.图示法的优点是直

观,并可以从图形看出函数的变化情况.但它也有不便于理论研究的缺点.解析法的优点是形式简明,便于作理论研究和数值计算,但它不如图示法来得直观.

在实际问题中,有时会遇到一个函数在定义域的不同范围内要用不同的解析式表示的情形.例如电子技术中的三角波(如图1-4),它的电压 $U$ 与时间 $t$ 的函数关系为

$$U(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}t, & t \in [0, \frac{\tau}{2}], \\ -\frac{2E}{\tau}(t - \tau), & t \in [\frac{\tau}{2}, \tau], \\ 0, & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

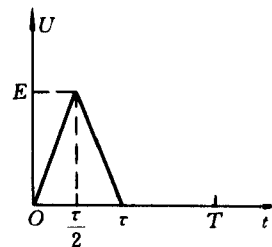


图 1-4

它表示在闭区间 $[0, T]$ 上不同的时间范围内,电压变化的规律, $U$ 是 $[0, T]$ 上 $t$ 的一个函数.这种在定义域内不同的区间上用不同的解析式表示的函数,叫做分段函数.

例 6 函数  $f(x) = \operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

叫做符号函数,其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ ,它的图形如图1-5所示,如 $f(-3) = -1, f(2) = 1, f(0) = 0$ .

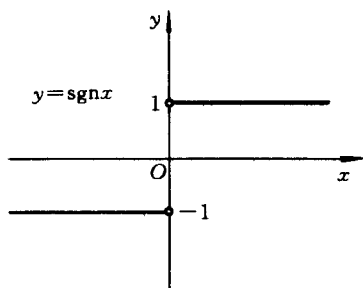


图 1-5

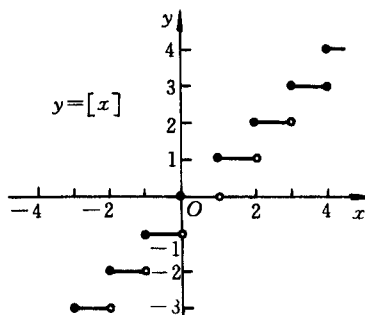


图 1-6

例 7 设 $x$ 为任一实数,不超过 $x$ 的最大整数,记作 $[x]$ .把 $x$ 看作自变量,则函数 $y = [x]$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ ,它的图形如图1-6所示.如 $[\frac{1}{2}] = 0, [\sqrt{3}] = 1$ 等.

例 8 设  $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -1), \\ -x, & x \in [-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1), \\ 3-x, & x \in [1, +\infty). \end{cases}$  求  $f(-2), f(-0.5), f(\frac{2}{3}), f(1),$

$f(\frac{3}{2})$ ,并画出函数的图形.

解 根据 $x$ 在哪一个区间内取值,来确定用相应的式子求其函数值.

$$\begin{aligned}
 -2 &\in (-\infty, -1), f(-2) = 2|_{x=-2} = 2; \\
 -0.5 &\in [-1, 0], f(-0.5) = -x|_{x=-0.5} = 0.5; \\
 \frac{2}{3} &\in (0, 1), f\left(\frac{2}{3}\right) = x|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}; \\
 1 &\in [1, +\infty), f(1) = (3-x)|_{x=1} = 2; \\
 \frac{3}{2} &\in [1, +\infty), f\left(\frac{3}{2}\right) = (3-x)|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

函数  $f(x)$  的图形如图 1-7 所示.

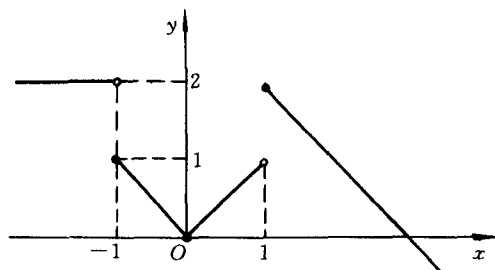


图 1-7

**例 9** 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0, \\ x^3, & x < 0. \end{cases}$  求  $f(x+h)$

**解** 用  $x+h$  代替上式中的  $x$ :

$$f(x+h) = \begin{cases} (x+h)^2 - 1, & x+h \geq 0, \\ (x+h)^3, & x+h < 0. \end{cases}$$

即

$$f(x+h) = \begin{cases} (x+h)^2 - 1, & x \geq -h, \\ (x+h)^3, & x < -h. \end{cases}$$

### 习题 1-2

- 1 设  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , 求  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$  及  $f(x-1)$
- 2 设  $f(x) = a + bc^x$ , 且  $f(0) = 15$ ,  $f(2) = 30$ ,  $f(4) = 90$ , 求  $a, b, c$  的值
- 3 设  $g(x) = x^2 + 4x - 1$ , 求  $g(x + \Delta x) - g(x)$
- 4 设  $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ , 求  $f(x)$
- 5 设  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & x \geq 2 \end{cases}$  求  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$  和  $f(x)$  的定义域, 并作出函数的图形
- 6 求下列函数的定义域

$$(1) y = \frac{1}{x^2-1} + \sqrt{x+2};$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2+x}}$$

- 7 下列各题所给的两个函数是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \frac{x^3+x}{x} \text{ 与 } g(x) = x^2 + 1,$$

$$(2) f(x) = \lg x^2 \text{ 与 } g(x) = 2 \lg x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases} \text{ 与 } g(x) = \frac{1}{2}(3x + \sqrt{x^2}) + 1$$

- 8 设变量  $x$  在  $(-\infty, +\infty)$  中任取一值时, 变量  $y$  始终对应着同一个值  $C$  (常数), 这时,  $y$  是不是  $x$  的函数?

### 第三节 函数的简单性质

在这一节中,我们将介绍函数中可能出现的几个特殊性质.了解这些性质,对我们今后研究函数将有很大的帮助.

#### 1 奇偶性

**定义 1** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对任意  $x \in D$ , 恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

那么称  $f(x)$  为奇函数; 如果对任意  $x \in D$ , 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

那么称  $f(x)$  为偶函数

例如  $f(x) = x^3, f(x) = \sin x$  等都是奇函数.

又如,  $f(x) = x^2, f(x) = \cos x$  等都是偶函数.

奇函数的图形是关于原点对称的. 这是因为  $f(-x) = -f(x)$ , 所以当点  $A(x, f(x))$  在图形上时, 则和  $A$  对称于原点的点  $A'(-x, -f(x))$  也在图形上(如图 1-8).

偶函数的图形是关于  $y$  轴对称的. 这是因为  $f(-x) = f(x)$ , 当点  $A(x, f(x))$  在图形上时, 则和  $A$  对称于  $y$  轴的点  $A''(-x, f(x))$  也在图形上(如图 1-9).

注意, 不是任何函数都具有奇偶性. 如  $f(x) = \sin x + \cos x$  既非奇函数, 也非偶函数.

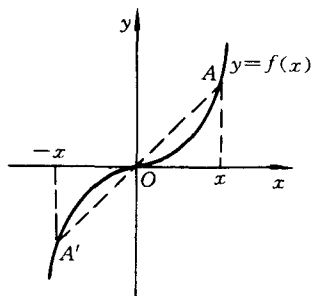


图 1-8

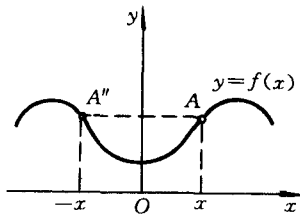


图 1-9

#### 2 单调性

**定义 2** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subset D$ . 如果对区间  $I$  内任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称  $f(x)$  在区间  $I$  上单调增加. 如果对区间  $I$  内任意两点  $x_1$  及  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称  $f(x)$  在区间  $I$  上单调减少.

单调增加和单调减少统称为单调, 相应的区间称为单调区间.

单调增加的函数的图形是沿  $x$  轴的正向而上升的(如图 1-10), 单调减少的函数的图形是沿  $x$  轴的正向而下降的(如图 1-11)

例如, 函数  $y = x^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调增加; 而  $y = x^2$  在  $(-\infty, 0]$  上是单调减少的, 在  $[0, +\infty)$  上是单调增加的, 它在  $(-\infty, +\infty)$  上不是单调的. 由本例可见函数的单调性一般地说是函数在局部范围内的性质. 我们今后要做的工作, 经常是找出函数  $f(x)$  的单调区间

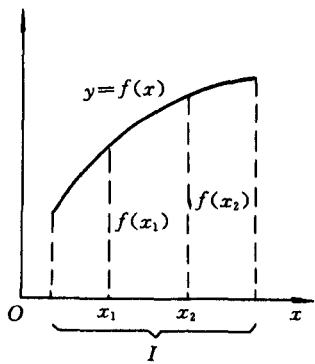


图 1-10

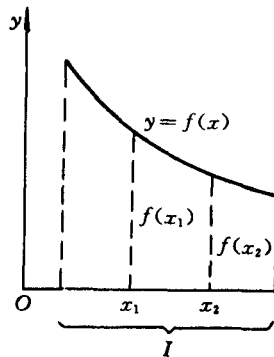


图 1-11

### 3 有界性

**定义 3** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 集合  $X \subset D$ , 如果存在常数  $M$ , 使得对任一  $x \in X$ , 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数  $f(x)$  在集合  $X$  上有界; 如果这样的数  $M$  不存在, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界.

例如, 函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界, 因为对任一  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 恒有  $|\sin x| \leq 1$ . 而  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  上无界, 因为不存在这样的常数  $M$ , 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$  对于  $(0, 1)$  上的一切  $x$  都成立. 但是  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $\left(\frac{1}{100}, 1\right)$  上是有界的, 因为可以取  $M = 100$  而使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 100$  对于  $\left(\frac{1}{100}, 1\right)$  内的一切  $x$  都成立.

由此可见函数的有界性也是函数在局部范围内的性质.

### 4 周期性

**定义 4** 设  $l$  是一个不为零的常数, 如果函数  $f(x)$  对于定义域内任一  $x$ , 恒有  $x \pm l$  仍在定义域内, 且  $f(x+l) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  是周期函数,  $l$  是它的一个周期.

如果  $l$  是  $f(x)$  的一个周期, 则有

$$f(x) = f(x+l) = f[(x+l)+l] = f(x+2l),$$

$$f(x) = f[(x-l)+l] = f(x-l) = f[x+(-l)].$$

这说明  $2l$  和  $-l$  都是  $f(x)$  的周期, 而且对任一整数  $k, kl$  都是  $f(x)$  的周期. 通常, 我们说周期函数的周期是指最小正周期  $T$ . 例如  $\sin x$  及  $\cos x$  的周期  $T = 2\pi$ , 而不是指  $4\pi, 6\pi$  等;  $\tan x$  的周期  $T = \pi$ , 而不是指  $2\pi, 3\pi$  等.

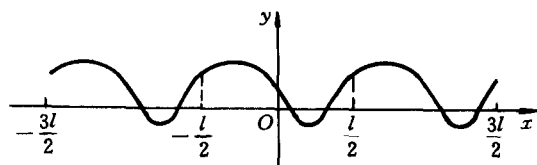


图 1-12

若周期函数  $f(x)$  的周期为  $T$ , 则对任一整数  $k$ , 在每一区间  $[x + kT, x + (k + 1)T]$  上, 函数  $y = f(x)$  的图形都是一样的(如图 1-12). 因而对  $f(x)$  的研究, 只要在长度等于  $T$  的任何一个区间上来考察就代替了在全部实轴上的研究.

### 习题 1-3

1 确定下列函数的单调区间.

(1)  $y = x^2$ ;      (2)  $y = 2^{-x}$

2 下列函数中, 哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些既不是奇函数又不是偶函数?

(1)  $y = x^4 - 3x^2$ ;      (2)  $y = x + \sin x$ ;  
 (3)  $y = |x|\cos x$ ;      (4)  $y = |x + 1|$ ;  
 (5)  $y = x + x^2$ ;      (6)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

3 下列函数中哪些是周期函数? 如果是周期函数, 指出其周期?

(1)  $y = \sin 2x$ ;  
 (2)  $y = 2\cos(\pi x + 1)$ ;  
 (3)  $y = \begin{cases} E, & 2n \leq x \leq 2n + 1, \\ -E, & 2n + 1 < x < 2n + 2 \end{cases}$  ( $n$  为整数,  $E$  为正数)

4 函数  $f(x) = C$  (常数), 是不是周期函数?

## 第四节 反函数

一个函数有两个变量, 即自变量与因变量. 在实际问题中, 哪一个是自变量, 哪一个是因变量, 得由具体问题来确定. 如第二节例 1 中的函数  $s = \frac{1}{2}gt^2$  ( $0 \leq t \leq T$ ) 是由下落时间  $t$  来确定物体与初始位置的距离  $s$ . 现在反过来, 要以已知距离  $s$  来确定下落时间  $t$ , 此时自变量应是  $s$ , 因变量应是  $t$ . 由上式中解出  $t$ :

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \left(0 \leq s \leq \frac{1}{2}gT^2\right).$$

这时称  $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$  是  $s = \frac{1}{2}gt^2$  的一个反函数.

一般地, 若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $W$ . 如果把  $y$  当作自变量,  $x$  当作因变量, 则由关系式  $f(x) = y$  所确定的函数(通常可由  $f(x) = y$  中解出)

$$x = \varphi(y), \quad y \in W \tag{1-2}$$

叫做函数  $y = f(x)$  的**反函数**, 而  $y = f(x)$  叫做**直接函数**. 习惯上, 总是用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示因变量, 此时亦称

$$y = \varphi(x), \quad x \in W \tag{1-3}$$

• 是  $y = f(x)$  的**反函数**.

注意, 式(1-2)与(1-3)是完全相同的两个函数(它们的定义域和对应法则都是相同的, 只是用来代表自变量和因变量的符号不同而已), 因而今后我们所讲到的某一函数的反函数, 通常指(1-3)表示的反函数.

**例 1** 求函数  $y = 2x - 3$  的反函数, 并画出它们的图形.