高等数学

高等教育学历文凭全国统考课程辅导丛书

刘书田
刘志实
编

北京理工大学出版社

高等教育学历文凭全国统考课程辅导丛书

高 等 数 学

刘书田　刘志实　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家学历文凭考试统考《高等数学课程教学大纲》和《高等数学课程考试大纲》，为应试考生准备的辅导教材。

本书选题广泛、全面，既有概念题又有应用题。通过“讲思路举例题”和“举题型讲方法”相结合，使读者能思路畅通，达到融汇贯通、举一反三。通过学习本书，可以掌握解题思路、解题方法，提高解题技巧和应试能力。

本书每节之后都有练习题，有些题目除配有答案外，还给出解法提示或简略解题过程。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘书田，刘志实编．—北京：北京理工大学出版社，1997.6(1997.11 重印)
(高等教育学历文凭全国统考课程辅导丛书)
ISBN 7-81045-254-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．①刘…②刘…　Ⅲ．高等数学-成人教育：高等教育-自学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 02109 号

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区白石桥路 7 号)
邮政编码 100081　电话 68912824
各地新华书店经售
北京房山先锋印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　32 开本　10 印张　220 千字
1997 年 6 月第 1 版　1997 年 11 月第 2 次印刷
印数：5001—10000 册　　定价：12.00 元

编 者 的 话

从 1997 年起高等教育学历文凭考试将在全国统考 8 门课程，它们是哲学、政治经济学、中国革命史、大学语文、会计学基础、高等数学、计算机基础和基础英语。为了满足参加上述全国统考课程的考生复习考试的需要，北京理工大学出版社组织了北京理工大学、北京师范大学、中国人民大学、北京工业大学和国际关系学院有丰富教学经验的教师编写出一套高等教育学历文凭考试全国统考课程辅导丛书。这套丛书是根据国家教委成教司 1996 年制订的最新教学大纲（试行）和高等数学课程考试大纲（试行）编写的。这些课程的教学大纲所包含的内容与原有大纲的内容有相当多的不同，删去了其中陈旧的内容，增加了新内容，因此原来的教材和相应的复习考试用书也已显得陈旧。请考生注意这种变化，以免在复习考试时走弯路。

这套丛书的共同特点是，内容精练，少而精，针对性强，按照考试的题型编写出了模拟练习，便于考生复习和掌握。学历文凭考试的实践证明，考生只有在平时认真学习，考前全面复习，并做大量模拟练习的情况下才能考出好的成绩。这套丛书对于考生全面复习和考前练习都很实用。

这套丛书在编写过程中参考并引用了相应教材的一些内容，在此特向这些教材的作者深表谢意。另外，由于编写时间仓促，如有不妥之处敬请批评指正。

编委会

1997 年 1 月

高等教育学历文凭全国统考课程
辅导丛书编委会

前　言

本书是根据国家学历文凭考试统考《高等数学课程教学大纲》和《高等数学课程考试大纲》编写的，是一本针对性和实用性强的辅导教材。

本书具有以下特点：

(1) 紧密结合教材和配合教学，而又比教材更加广泛、更加深入和更加易于理解。

(2) 归纳概括概念、定理、法则和公式，并着重分析和作深入浅出的说明，以使读者加深理解、增强记忆和正确运用。

(3) 选题广泛、全面，既有概念题，又有应用题。用“讲思路举例题”和“举题型讲方法”相结合的作法，使读者思路畅通，达到融汇贯通、举一反三、触类旁通的境界。

(4) 本书每节之后都给出了练习题，这些题目不仅有答案备查，有些题目还给出解法提示或简略解题过程。练习这些题目很必要，是积累知识、掌握知识和增强解题能力的过程。

(5) 本书每章之后都给出了思考题，这对读者深入理解问题和复习总结将是有益的。

(6) 本书最后附有《高等数学课程考试大纲》。这将使读者明确国家学历文凭考试的考核目标、考试内容、考试方式、试卷结构、考试题型及题目的难易程度。

本书是参加国家学历文凭考试学生学习高等数学课程时

的必备读物。通过学习本《考试辅导》，可以正确理解、灵活运用基本概念、基本定理、计算法则和公式；可以提高思维能力、逻辑推理能力和分析判断能力；可以掌握解题思路、解题方法和解题程序，并纠正在运算方法和运算过程中易犯的错误；可以提高解题技巧和应试能力。

本书可作为参加高教自考学习《高等数学》课程的辅导教材；也可作为高等院校、电大、职大、函大师生讲授和学习《高等数学》课程的参考书。

该书由刘书田主编，并编写了第三、四、五、六章，刘志实编写了该书的第一、二章。参加本书书稿讨论和审阅的有：徐国元、刘国忠、宋念慈三位副教授和林世忠教授。在此特致谢意。由于编者水平所限，书中不足之处，望读者批评指正。

编　者

1997年3月

目　录

第一章　函　　数

一、确定函数的定义域

函数定义　设有两个自变量 x 和 y，若变量 x 在其取值范围 D 内每取一个数值时，按照某个对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数。

x 称为自变量，y 称为因变量；自变量 x 的取值范围 D 称为该函数的定义域。

高等数学课程是在实数范围内研究函数，这里的 D 是一个实数集合，最常见的是区间。

函数的三种表示法：

(1) *公式法*　用数学式子表示自变量与因变量之间对应关系的方法称为公式法。

(2) *表格法*　将一系列自变量的值与对应的函数值列成表，以此表示函数的方法称为表格法。

(3) *图示法*　在平面直角坐标系 xoy 中，以平面上的一条曲线表示函数的方法称为图示法。

在高等数学中主要是讨论用公式法表示的函数，而以函数的图形（曲线）作为辅助工具。

根据函数的定义，确定函数的定义域。

思路　当函数 $y=f(x)$ 用公式法给出，而又没给出自变量 x 的取值范围时，若自变量取某一数值 x_0 时，函数 y 有确定的值与它对应，则称函数在 x_0 有定义。因此要求函数的定

义域，就是求使该解析式有意义的自变量取值范围。

求函数的定义域时，应考虑以下情况：

（1）分式的分母取值不能为零；

（2）偶次根的根底式应该为非负数；

（3）对数符号下的式子（真数部分）只能是正的；

（4）反正弦函数、反余弦函数符号下的式子只能介于-1和1(包括-1和1)之间；

（5）若函数式有两项，其定义域应是两项定义域的公共部分；

（6）对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义。

例1 求下列函数的定义域：

（1） $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ **（2）** $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

解 **（1）**这是分式，分子、分母分别讨论：

对$\sqrt{9-x^2}$，因偶次根的根底式应非负，所以应有$9-x^2\geqslant0$，即

$$-3\leqslant x\leqslant 3 \quad 或写成区间[-3,3]$$

对分母的$\ln(x+2)$，因对数符号下的式子应为正，且分母不能为零，所以有

$$\begin{cases}x+2>0\\ x+2\neq1(因\ \ln1=0)\end{cases} \qquad 即\begin{cases}x>-2\\ x\neq-1\end{cases}$$

写成区间为$(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$。

分子、分母自变量取值范围的公共部分为所求的定义域，即函数的定义域是$(-2,-1)\cup(-1,3]$。

（2）该函数是两项和。对第一项$\dfrac{1}{1-x^2}$，$1-x^2\neq0$，x的取值范围是

$$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

对第二项 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，因反正弦函数符号下的式子必须在区间[$-1,1$]上取值，所以有

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1 \text{ 或 } -7\leqslant 2x-1\leqslant 7$$

即 $\qquad -3\leqslant x\leqslant 4$

写成区间则为[$-3,4$]。

两项 x 取值的公共部分为$[-3,-1]\cup(-1,,1)\cup(1,4]$,这就是所求的定义域。

例 2 确定下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$的定义域是________；

(2) $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$的定义域是________；

(3) $y=\ln\cos x$ 的定义域是________；

(4) $y=\sqrt{\sin x-1}$的定义域是________。

解 (1) 由$|x|-1>0$,即$|x|>1$,可得函数的定义域是$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$。

(2) 由$-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$ 得$\dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant 10$,所以函数的定义域是$[1,100]$。

(3) 由 $\cos x>0$ 可得函数的定义域是无限多个区间：

$$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

(4) 由 $\sin x-1\geqslant 0$ 知，必须取使 $\sin x=1$ 的 x 值，所以函数的定义是点集：

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

说明 由本例知，函数的定义域可以是一个区间，可以

是有限个区间的并，也可以是无限个区间的并，还可以是一个点集。

例 3 当 k 取何值时，函数 $f(x)=\dfrac{x+k}{kx^2+2kx+2}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

解 若函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，则 $kx^2+2kx+2\neq 0$，即 $kx^2+2kx+2$ 无实根，由此

$$\Delta=(2k)^2-4\cdot k\cdot 2<0$$

即
$$4k(k-2)<0,\text{得 } 0<k<2$$

又当 $k=0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{2}$，显然 x 取任意值 $f(x)$ 都有意义。

综上，当 $0\leqslant k<2$ 时，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$。

例 4 设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$，则 $g(x)=$ (　　)。

(A) $\sin x$　　(B) $\cos x$　　(C) $\operatorname{tg} x$　　(D) $\operatorname{ctg} x$

解 这是选择题，首先用筛选法。

按题干所给条件，在 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$ 内必有 $g(x)\geqslant 0$。而 $\operatorname{tg}x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$，$\operatorname{ctg}x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义；又 $\cos x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 内非正，故应剔除 B、C、D。

事实上，在 $[-4,-\pi]$ 或 $[0,\pi]$ 内，确有 $\sin x\geqslant 0$，故选 A。

练　习　题

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-|x-3|}$　　(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-1}}$

(3) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(x^2-1)-1}$

2. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}x}$的定义域是________；

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$的定义域是________；

(3) $y=\dfrac{\lg(x-2)}{\lg(3-x)}$的定义域是________；

(4) $y=\sqrt{\ln\cos x}$的定义域是________。

3. (1) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2^x-4}}{x-5}$的定义域是（　　）。

(A) $x\geqslant 2$，$x\neq 5$　　(B) $x>2$，$x\neq 5$

(C) $x\geqslant 4$，$x\neq 5$　　(D) $x>4$，$x\neq 5$

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{|x|-x}$的定义域是（　　）。

(A) $(-\infty,+\infty)$　　(B) $(-\infty,1]$

(C) $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$　(D) $(-\infty,0)$

(3) 设函数 $f(x)=\log_a\dfrac{x}{x-2}+\arcsin g(x)$的定义域是 $[-3,0)\cup(2,3]$，则 $g(x)=$（　　）。

(A) x^3　　(B) 3^x　　(C) $\dfrac{x}{3}$　　(D) $3x$

4. 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$的定义域。

二、判定两个函数相同

思路　由函数的定义可知，一个函数被给定要有三个因素：定义域 D，对应规则 f 和值域 Z；其中前二者为要素。因此，函数通常记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

正因为如此，一对函数，当它们的定义域和对应规则都相同时，它们就表示同一个函数。

例 1　下列各对函数相同的有（　　）。

(A) $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $g(x)=x$

(D) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

解　(A)　定义域不同。$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$。

(B)　$f(x)$的分母、分子可约去x，得到$f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，这与$g(x)$相同。

(C)　定义域不同。$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$。

(D) 两个函数的对应法则不同。当$x\geqslant 0$时，有$x=\sqrt{x^2}$；而当$x<0$时，有$-x=\sqrt{x^2}$。

选 (B)。

例 2　判定下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(2) $f(x)=\ln(x^2-3x+2), g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$

(3) $f(x)=\sqrt{(1-x)(2+x)}, g(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{2+x}$

(4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}, g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

解　(1) $f(x)$与$g(x)$的定义域相同，都是$(-\infty,+\infty)$；但对应规则不同。因为

$$\cos x = \pm \sqrt{1-\sin^2 x}$$

故不相同。

(2) 按对数性质，有

$$\ln(x^2-3x+2) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$$

上式仅在区间$(2,+\infty)$内成立，$(2,+\infty)$这是函数$g(x)$的定义域。而函数$f(x)$的定义域则是$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$。故不相同。

(3) 按根式乘积的性质，有

$$\sqrt{(1-x)(2+x)} = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2+x}$$

又二者的定义域都是$[-2,1]$。故相同。

(4) 对应规则和定义域都相同。定义域都是$(-1,1)$；根据对数性质，有

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

故相同。

练 习 题

5. 下列 4 个函数中，(　　) 是相同的。

(A) $\ln x^2$　　(B) $2\ln x$　　(C) $2\ln x|x|$　　(D) $\ln^2 x$

6. 下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

(3) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(4) $y=\ln(6-x-x^2)$ 与 $y=\ln(3+x)+\ln(2-x)$

(5) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 与 $y=\ln(x+1)-\ln(x-1)$

(6) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

三、求函数值

思路 对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取定义域中某一定值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 相对应的值称为当 $x=x_0$ 时的函数值，记作

$$f(x_0) \text{ 或 } y_{|x=x_0}$$

当函数用一个解析表达式表示时，将表达式 $f(x)$ 中的 x 代换以 x_0，就得到该函数在 $x=x_0$ 时的函数值 $f(x_0)$。

例 1 求函数 $f(x)=\frac{1-3x}{1+x^2}$ 在 $x=-2,x=0,x=2$ 处的函数值。

解 将 -2 代换解析表示式 $\frac{1-3x}{1+x^2}$ 中的 x，进行运算，得到函数值

$$f(-2)=\frac{1-3(-2)}{1+(-2)^2}=\frac{7}{5}$$

同样，将 0 代换 $\frac{1-3x}{1+x^2}$ 中的 x，得到函数值

$$f(0)=\frac{1-3\cdot 0}{1+0^2}=1$$

将 2 代换 $\frac{1-3x}{1+x^2}$ 中的 x，得

$$f(2)=\frac{1-3\cdot 2}{1+2^2}=-1$$

例 2 设函数 $y=x^3-4x^2+11x+7$，求在 $x=\frac{1}{2},x=1$ 处的函数值。

解 $y_{|x=\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\left(\frac{1}{2}\right)^2+11\cdot\frac{1}{2}+7=11\frac{5}{8}$

$y_{|x=1}=1^3-4\cdot 1^2+11\cdot 1+7=15$