

21 世纪高职高专规划教材

高等数学

李毅夫 主 编
于 萍 副主编

北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书精选了高职高专工科各专业必要的高等数学基本知识。全书共分为 8 章, 内容包括函数与极限, 导数与微分, 不定积分, 定积分, 定积分在几何上的应用, 多元函数微分学, 无穷级数和微分方程。

从高职高专教学突出实践、突出应用的主导思想出发, 本书对高等数学的传统教学内容进行了较大的精简, 并使用了浅显易懂的语言和生动趣味的引例, 以求使读者用较少的学时, 学到符合高职高专培养目标和满足后续课程及以后实践、应用所需要的高等数学知识。为此, 本书适当地降低了理论性内容的深度, 突出了应用性内容的论述与练习。

本书特别适合作为高职高专高等数学教材, 也可作为工科专科、函授或电大有关专业的高等数学教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/ 李毅夫主编. —北京: 北京交通大学出版社, 2004.2

(21 世纪高职高专规划教材)

ISBN 7 - 81082 - 230 - 6

. 高... . 李... . 高等数学 - 高等学校: 技术学校 - 教材 . 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 122455 号

责任编辑: 韩 乐 特邀编辑: 高振宇

出版者: 北京交通大学出版社

电话: 010 - 51686045, 62237564

北京市海淀区高粱桥斜街 44 号

邮编: 100044

印刷者: 北京瑞达方舟印务有限公司

发行者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787 × 1092 1/16 印张: 10.75 字数: 268 千字

版 次: 2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

印 数: 1 ~ 5000 册 定价: 17.00 元

前 言

本书是全国 21 世纪高职高专规划教材之一，是编者依据高职高专培养实践型、应用型人才的目标，在多年的高等数学教学中，经过反复实践，认真总结经验，针对高职高专高等数学教材进行教学改革的一种探讨和尝试。

本教材的主要特点表现在以下两个方面。

1. 重视应用和实践。本书在编写过程中，努力贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的高职高专教学理念，在保证科学性的前提下，注意做到：教材的编写要着眼于提高学生在后续课程和生产科研中运用高等数学解决实际问题的能力。为此，对于在后续课程和生产科研中得到广泛应用的内容，在书中进行反复讲解，大量练习；而对于理论性强但应用性较弱的内容，则努力降低理论上的论证与要求。如教材第 1 章中的函数与极限部分，本书打破理论性较强的传统讲法，不用所谓 $\epsilon - N$ 和 $\delta - \epsilon$ 语言，仍可在确保科学性的情况下，成功地完成了所有教学任务。

2 由浅入深，循序渐进，激发兴趣，便于自学。本书对于高等数学中许多不好理解、不好掌握的内容，注意做到：在这部分内容前，安排浅显易懂或引人入胜的引例。这有利于读者循序渐进地学习和培养学习高等数学的兴趣。例如，幂级数是比较难学的，但通过引例 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ 的幂级数简洁解法，使读者切实感到这部分知识十分有用，进而激发他们学习的兴趣和积极性。

本书第 1 章、第 6 章、第 7 章由李毅夫编写，第 2 章由于萍编写，第 3 章由龚晓岚编写，第 4 章由胡柏新编写，第 5 章由陈影编写，第 8 章由何金敏编写。全书由李毅夫任主编，于萍任副主编，参编人员还有张煜、陈培。徐贵生对本书初稿进行了校阅，提出了许多宝贵意见，在此表示感谢。

编者深知，本教材的编写实属在教改大潮中的一种探索，意在抛砖引玉。由于能力、水平所限，加之时间仓促，本教材的编写必有不足之处，欢迎提出宝贵意见。

编 者
2004 年 1 月

目 录

第 1 章	函数与极限	1
1. 1	函数	1
1. 1. 1	区间	1
1. 1. 2	邻域	2
1. 1. 3	函数的概念	2
1. 1. 4	函数的几种特性	4
	习题 1. 1	5
1. 2	初等函数	5
1. 2. 1	基本初等函数	5
1. 2. 2	复合函数	8
1. 2. 3	初等函数	8
	习题 1. 2	9
1. 3	数列的极限 函数的极限	9
1. 3. 1	自变量 x 的 7 种趋近形式	9
1. 3. 2	数列的极限	10
1. 3. 3	函数的极限	10
	习题 1. 3	12
1. 4	无穷小与无穷大 无穷小的比较	13
1. 4. 1	无穷小与无穷大	13
1. 4. 2	无穷小的性质	14
1. 4. 3	无穷小的比较	15
	习题 1. 4	16
1. 5	极限运算法则	16
	习题 1. 5	19
1. 6	求极限的其他方法	19
1. 6. 1	两个重要极限	19
1. 6. 2	变量替换	20
1. 6. 3	等价无穷小	21
	习题 1. 6	22
1. 7	函数的连续性与间断点	22
1. 7. 1	自变量的增量与函数的增量	22
1. 7. 2	函数连续的两个定义	23
1. 7. 3	函数的间断点	24
	习题 1. 7	24
1. 8	闭区间上连续函数的性质	25
1. 8. 1	最大值和最小值定理	25
1. 8. 2	介值定理	26
	习题 1. 8	27

第 2 章	导数与微分	28
2.1	导数的概念	28
2.1.1	引例	28
2.1.2	导数定义	29
2.1.3	求导数举例	29
2.1.4	导数的几何意义	31
2.1.5	函数的可导性与连续性的关系	32
习题 2.1	33
2.2	函数的和、差、积、商的求导法则	34
习题 2.2	36
2.3	反函数的导数 复合函数的求导法则	37
2.3.1	反函数的导数	37
2.3.2	复合函数的求导法则	38
2.3.3	基本导数公式	39
习题 2.3	40
2.4	高阶导数	40
习题 2.4	42
2.5	隐函数的导数和由参数方程所确定函数的导数	43
2.5.1	隐函数的导数	43
2.5.2	由参数方程所确定函数的导数	45
习题 2.5	46
2.6	函数的微分	47
2.6.1	微分的定义	47
2.6.2	微分的几何意义	48
2.6.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则	49
习题 2.6	50
2.7	洛必达法则	50
2.7.1	$\frac{0}{0}$ 与一型未定式	51
2.7.2	其他类型未定式	52
习题 2.7	53
第 3 章	不定积分	55
3.1	不定积分的概念与性质	55
3.1.1	原函数与不定积分	55
3.1.2	不定积分的性质	56
3.1.3	基本积分公式	56
3.1.4	直接积分法	57
习题 3.1	59
3.2	换元积分法	60
3.2.1	第一类换元积分法	60
3.2.2	第二类换元积分法	64
习题 3.2	66

3.3	分部积分法	67
	习题 3.3	69
3.4	有理函数的不定积分	70
	习题 3.4	71
第 4 章	定积分	72
4.1	定积分概念	72
	4.1.1 引例	72
	4.1.2 定积分定义	73
	习题 4.1	74
4.2	定积分的性质 中值定理	75
	习题 4.2	77
4.3	微积分基本定理	78
	4.3.1 积分上限的函数及其导数	78
	4.3.2 牛顿 - 莱布尼兹公式	80
	习题 4.3	81
4.4	定积分的换元积分法	82
	习题 4.4	84
4.5	定积分的分部积分法	85
	习题 4.5	87
4.6	广义积分	87
	4.6.1 无穷区间上的广义积分	87
	4.6.2 无穷函数的广义积分	89
	习题 4.6	90
第 5 章	定积分的应用	91
5.1	平面图形的面积	91
	5.1.1 直角坐标情形	91
	5.1.2 极坐标情形	94
	习题 5.1	94
5.2	旋转体的体积	95
	习题 5.2	97
第 6 章	多元函数微分学	98
6.1	多元函数及其偏导数	98
	6.1.1 多元函数的基本概念	98
	6.1.2 偏导数	100
	习题 6.1	101
6.2	高阶偏导数 全微分	102
	6.2.1 高阶偏导数	102
	6.2.2 全微分	103
	习题 6.2	105
6.3	多元复合函数的偏导数 隐函数的导数	105
	6.3.1 多元复合函数的结构图及其偏导数的求解	105

6.3.2	隐函数的导数	107
	习题 6.3	109
第 7 章	无穷级数	110
7.1	常数项级数的概念和性质	110
7.1.1	常数项级数的概念	110
7.1.2	常数项级数的基本性质	111
	习题 7.1	113
7.2	常数项级数的审敛法	114
	习题 7.2	118
7.3	幂级数	118
7.3.1	函数项级数的概念	118
7.3.2	幂级数及其收敛性	119
7.3.3	幂级数的性质	122
	习题 7.3	123
7.4	函数展开成幂级数	123
7.4.1	引例	123
7.4.2	泰勒级数	124
7.4.3	函数展开成 x 的幂级数	124
	习题 7.4	127
7.5	傅里叶级数	127
7.5.1	三角函数及三角函数系的正交性	127
7.5.2	函数展开为傅里叶级数	128
	习题 7.5	131
第 8 章	微分方程	132
8.1	微分方程的基本概念	132
	习题 8.1	134
8.2	可分离变量的微分方程	134
	习题 8.2	135
8.3	一阶线性微分方程	135
	习题 8.3	138
8.4	高阶线性微分方程	138
	习题 8.4	140
8.5	二阶常系数齐次线性微分方程	140
	习题 8.5	142
8.6	二阶常系数非齐次线性微分方程	142
8.6.1	$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型	143
8.6.2	$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x)\cos \mu x + P_n(x)\sin \mu x]$ 型	144
	习题 8.6	145
	部分习题答案	146

第 1 章 函数与极限

高等数学的基础是极限。许多高等数学的内容，例如导数、定积分、广义积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数等，都是特定意义下的极限。但是，极限的基础又是什么呢？极限的基础是无穷小。那么，无穷小的基础是什么？无穷小的基础是形形色色的变量，它包括自变量与因变量（即自变量的函数）。所谓函数关系就是变量之间的依赖关系。极限方法则是研究变量的一种基本方法。本章将介绍函数、极限、函数的连续性等高等数学的一些最基本的内容。

1.1 函数

1.1.1 区间

区间是在高等数学中经常用到的一类数集。由于本书内容只涉及一元函数，故本书中的区间，都是 x 轴上某类点的集合。

以下设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$ 。

数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记作 (a, b) ，在数轴上表示如图 1 - 1 所示。

数集

图 1 - 1

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$ ，在数轴上表示如图 1 - 2 所示。

数集

图 1 - 2

$$\{x \mid a \leq x < b\}$$

称为半开区间，记作 $[a, b)$ ，在数轴上表示如图 1 - 3 所示。

数集

图 1 - 3

$$\{x \mid a < x \leq b\}$$

称为半开区间，记作 $(a, b]$ ，在数轴上表示如图 1 - 4 所示。

以上 4 种区间称为有限区间。

此外，还有所谓无限区间。首先认识一下表示无限的几个符号： $+$ 读做“正无穷大”； $-$ 读做“负无穷大”； ∞ 读做“无穷大”。

图 1 - 4

数集

$$\{x \mid a < x\}$$

称为无限开区间，记作 $(a, +\infty)$ ，在数轴上表示如图 1 - 5 所示。

数集

图 1 - 5

$$\{x | x \leq b\}$$

称为无限半开区间，记作 $(-\infty, b]$ ，在数轴上表示如图 1 - 6 所示。

类似地，还有无限区间 $[a, +\infty)$ ， $(-\infty, b)$ ， $(-\infty, +\infty)$ 。它们所对应的点集和图形，请读者自行画出。

图 1 - 6

注意 $+\infty$ 不是数，而是一种处于无限运动程的点。 $+\infty$ 表示处于沿 x 轴正向无限运动过程的点， $-\infty$ 表示处于沿 x 轴反向无限运动过程的点，而 $\pm\infty$ 表示 \pm 。特殊情况下，即仅在表示自然数 n 趋于正无穷时，符号 n 中的 ∞ 表示 $+$ 。

1. 1. 2 邻域

高等数学中，经常要用到邻域的概念。所谓邻域，就是某一点邻近的点集。具体有以下两种。

点 a 的 δ 邻域为：开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ ，其中 $\delta > 0$ 。

点 a 的去心的 δ 邻域为： $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ ，其中 $\delta > 0$ 。

对于以上两种邻域的区间表示式，读者可自行画出它们的图形。

1. 1. 3 函数的概念

1. 常量与变量

在研究过程中保持一定数值的量称为常量，而在研究过程中可以取不同的数值的量称为变量。常量与变量是相对的，在这个过程中的常量可能就是另一过程中的变量，常量也可以理解成不变的变量。

2 函数的定义

定义 1 - 1 设 x 和 y 是两个变量， D 是一个给定的数集。如果对于每个 $x \in D$ ，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与变量 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x) \tag{1 - 1}$$

其中，给定的数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域， x 叫自变量， y 叫因变量。因变量 y 取值的范围

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\} \tag{1 - 2}$$

叫做函数的值域。

由于定义 1 - 1 只要求“有确定的数值与变量 x 对应”，并没有要求“有唯一的值与 x 对应”，因此对于自变量 x 取定的一个值， y 可以有一个，也可以有多个值与之对应；在前一种情况下称 y 为单值函数，在后一种情况下称 y 为多值函数。本书只考虑 y 是单值函数的情况。

例 1 - 1 函数

$$y = x^2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 图形如图 1 - 7 所示。

例 1 - 2 函数

$$y = x^3$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = (-\infty, +\infty)$, 图形如图 1 - 8 所示。

图 1 - 7

例 1 - 3 函数

$$y = \frac{1}{x}$$

的定义域 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域 $W = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 图形如图 1 - 9 所示。

例 1 - 4 函数

$$y = 6$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = 6$, 图形如图 1 - 10 所示。

图 1 - 8

虽然例 1 - 4 是一类极为简单的函数; 但是, 许多初学者在实际计算中, 却会感到十分困难。为此, 请读者做如下练习。

设 $f(x) = 6$, 求下列函数值:

$f(1), f(5), f(100), f(-800), f(0.1), f(-1000), f(x-5), f(x^2)$

图 1 - 9

分别等于多少? 又若 $f(x) = 600$, 求下列函数值:

$f(1), f(5), f(100), f(-800), f(0.1), f(-1000), f(x-7), f(x^2 + x + 1)$

各等于多少?

例 1 - 5 函数

$$y = |x|$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 该种函数称为绝对值函数, 图形如图 1 - 11 所示。

图 1 - 10

研究表明, 函数研究必须考虑函数的 3 个要素:

- (1) 定义域;
- (2) 值域;
- (3) 对应关系。

图 1 - 11

例 1 - 6 设 $f(x) = \lg x^4$, $g(x) = 4\lg x$ 。它们是否为同一函数? 为什么?

答 它们不是同一函数, 因为它们的定义域不同: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 。

例 1 - 7 函数

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数, 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 函数的图形如

图 1 - 12所示。

例 1 - 8 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

求 $f(-2)$, $f(3)$, $f(0)$ 。

解 $f(-2) = -2 - 1 = -3$, $f(3) = 3 + 1 = 4$, $f(0) = 0 + 1 = 1$ 。

例 1 - 7 和例 1 - 8 所给的函数在不同的区间具有不同的表达式, 这类函数叫做分段函数。

图 1 - 12

1. 1. 4 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1 - 2 设 D 为某点集, 对于 $x \in D$, 函数 $f(x)$ 有定义。如果存在某一正数 M , 使得对 $x \in D$, 都有

$$|f(x)| \leq M, \tag{1 - 3}$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界。如果找不到这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 内无界。

例如, $f(x) = \sin x$, 由于对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $|f(x)| = |\sin x| \leq 1$, 所以 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。而对于函数 $g(x) = x + 1$, 且 $x \in (-\infty, +\infty)$, 却找不到这样一个正数 M , 使得 $|g(x)| = |x + 1| \leq M$, 所以 $g(x) = x + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界。

在求极限等后续课程中经常要用到函数的有界性, 因此, 必须记住两个常用的在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界的函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 。

2. 函数的奇偶性

定义 1 - 3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任一 $x \in D$, 恒有:

(1) $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

(2) $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数。

注意 函数的奇偶性, 容易使人产生误解, 认为函数只有奇函数和偶函数两类。其实, 还有很多函数, 它们既不是奇函数, 也不是偶函数, 这类函数我们称之为非奇非偶函数。

例 1 - 9 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^2 + 1$; (2) $f(x) = x + \sin x$; (3) $f(x) = x + 1$ 。

解 (1) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数;

(3) $f(-x) = -x + 1$, $f(-x)$ 既不等于 $-f(x)$, 又不等于 $f(x)$; 所以该函数为非奇非偶函数。

函数的奇偶性在图形上体现为: 奇函数的图形是关于原点对称的, 偶函数的图形是关于 y 轴对称的。偶函数图形的例子参见图 1 - 7、图 1 - 10 和图 1 - 11, 奇函数图形的例子参见图 1 - 8、图 1 - 9 和图 1 - 12。

函数的特性一般还有单调性、周期性等, 这些内容在中学教材中已作了较详细的介绍, 故在此从略。

习题 1.1

1. 将下列 x 的范围表示为区间:

- (1) $-1 < x < 2$; (2) $0 < x < 6$; (3) $x < -5$; (4) $x > 10$;
(5) $3 < x < 7$; (6) $|x| < 1$; (7) $|x| > 2$; (8) $|x| < 3$;
(9) $|x| < 6$; (10) $|x| < a, a > 0$.

2. 下列函数是否为同一函数? 为什么?

- (1) $f(x) = \sin x, g(x) = \sin(x^2)$;
(2) $f(x) = \lg x^3, g(x) = 3\lg x$;
(3) $f(x) = \lg x^{30}, g(x) = 30\lg x$;
(4) $f(x) = \frac{x+1}{x+1}, g(x) = 1$.

3. 画出下列函数的图形, 并求下列函数在给定点处的函数值:

- (1) $f(x) = x^2 + 1, x = 0, x = a, x = a + b, x = x_0 + x$;
(2) $f(x) = 9, x = 0, x = a, x = a + b, x = x_0 + x$;
(3) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0 \\ x - 1, & x < 0 \end{cases}, x = -1, x = 0, x = 10$;
(4) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 10$.

4. 下列函数是否为有界函数, 为什么?

- (1) $f(x) = \sin x + 1$;
(2) $f(x) = x^2 + 1$;
(3) $f(x) = \cos(x^2 + 1)$;
(4) $f(x) = |x|$.

5. 判断下列函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = x^2 + 1$;
(2) $f(x) = |x|$;
(3) $f(x) = \cos(x^2 + 1)$;
(4) $f(x) = \sin x + 1$;
(5) $f(x) = x^3 - x^2 + 5$;
(6) $f(x) = x \cos x$.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

1. 幂函数 $y = x^\mu (\mu \in \mathbb{R})$

幂函数的一个特点是: 随着常数 μ 取值的不同, 函数的定义域、值域有所不同。可参考

例 1 - 1、例 1 - 2、例 1 - 3 和例 1 - 4。幂函数的另一个特点是：函数曲线都经过 (1, 1) 这一点。

2 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $(0, +\infty)$ 。

指数函数的一个特点是：函数的单调性随 a 取值不同而不同。当 $0 < a < 1$ 时，函数单调减少；当 $a > 1$ 时，函数单调增加。详见图 1 - 13 和图 1 - 14。

图 1 - 13

图 1 - 14

指数函数的特殊情况是： $y = e^x$ 。其中，底数 $e = 2.71828\dots$ 是无理数。高等数学中提到的指数函数一般就指 $y = e^x$ ，它是科技中常用的函数。 $e = 2.71828\dots$ 的来源将会在后面几节介绍。

3 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

对数函数的定义域、值域与指数函数的定义域、值域正好相反，它的定义域是 $(0, +\infty)$ ，值域是 $(-\infty, +\infty)$ 。详见图 1 - 15 和图 1 - 16。

图 1 - 15

图 1 - 16

由图 1 - 15 和图 1 - 16 知道，对数函数 $y = \log_a x$ 随 a 取值不同而具有不同的单调性。

需要特别注意当对数函数的底数 $a = e$ 时的特殊情况。这时，对数函数记为 $y = \ln x$ 。高等数学中提到的对数函数一般就指 $y = \ln x$ 。

4 三角函数

表 1 - 1 正弦、余弦、正切、余切三角函数

函 数	定 义 域	值 域
正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$
正切函数 $y = \tan x$	$x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$
余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, +\infty)$

表 1 - 1 中函数的图形见图 1 - 17、图 1 - 18、图 1 - 19 和图 1 - 20。图 1 - 17 ~ 图 1 - 20 中一些特殊的点请读者自行给出。

图 1 - 17

图 1 - 18

图 1 - 19

图 1 - 20

此外，还有正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$ 。这两个函数，在高等数学中也经常要用到。请注意有关的公式：

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x};$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x};$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1;$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1。$$

常用的三角公式还有：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2};$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}。$$

5 反三角函数

表 1 - 2 常用反三角函数的主值

函 数	定 义 域	值 域
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

需指出, 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

1.2.2 复合函数

引例 1-1 设 $y = e^u$, 而 $u = \sin x$, 则将 $u = \sin x$ 代入 $y = e^u$, 可得

$$y = e^{\sin x}。$$

于是, 我们称 $y = e^{\sin x}$ 是由 $y = e^u$ 及 $u = \sin x$ 复合而成的所谓复合函数, 把 u 称为中间变量。

定义 1-4 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 若 $y = f[\varphi(x)]$ 有意义, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量。

例 1-10 $y = \sin u$, $u = 5 + x^2$, 则 $y = \sin(5 + x^2)$ 就是以 $u = 5 + x^2$ 为中间变量的复合函数。

注意 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如, 对于 $y = \arcsin u$ 和 $u = 5 + x^2$, 则 $y = \arcsin(5 + x^2)$ 就不是复合函数, 因为 $y = \arcsin(5 + x^2)$ 没有意义。

复合函数也可以由多个中间变量复合而成。例如, $y = \cos u$, $u = e^v$, $v = x^2$, 就有 $y = \cos e^{x^2}$ 。

例 1-11 求由下列所给函数复合而成的复合函数, 并求指定点处的函数值:

(1) $y = u^3$, $u = \cos x$, 在 $x = \frac{1}{3}$ 处;

(2) $y = u$, $u = 1 + x^3$, 在 $x = 1$ 处。

解 (1) 复合函数 $y = \cos^3 x$, $y|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$ 。

(2) 复合函数 $y = 1 + x^3$, $y|_{x=1} = 2$ 。

例 1-12 写出中间变量并分解下列函数:

(1) $y = (2x + 5)^8$; (2) $y = \frac{\sin(2x + 1)}{2x + 1}$; (3) $y = e^{\cos \frac{1}{x}}$ 。

解 (1) $y = u^8$, $u = 2x + 5$;

(2) $y = \frac{\sin u}{u}$, $u = 2x + 1$;

(3) $y = e^u$, $u = \cos v$, $v = \frac{1}{x}$ 。

1.2.3 初等函数

定义 1-5 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的并且可以用一个式子表示的函数, 叫做初等函数。

例如, $y = (2x + 5)^8$, $y = \frac{2x + 1}{x^2 - x - 6}$, $y = e^{\cos \frac{1}{x}}$ 是初等函数; 而 $y = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx + \dots$ 就不是初等函数。

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

- (1) $y = x^{-2}$; (2) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$; (3) $y = \ln(x - 1)$;
(4) $y = \sin(x^2 + 1)$; (5) $y = \arcsin(x - 1)$; (6) $y = \arccos(x + 5)$;
(7) $y = \arctan x$; (8) $y = \arcsin x + x + 1$ 。

2. 求下列复合函数在指定点处的函数值。

- (1) $y = u^2$, $u = \sin x$; $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$ 。
(2) $y = e^u$, $u = \sin v$, $v = x^2$; $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 。
(3) $y = \ln(1 + u)$, $u = \cos v$, $v = x^2 + \frac{\pi}{4}$; $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 。
(4) $y = \arcsin u$, $u = x + \frac{1}{2}$; $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ 。

3. 分解下列复合函数:

- (1) $y = e^{x+1}$; (2) $y = \ln(x^2 + 1)$; (3) $y = \frac{\cos(x+1)}{\ln(x+1)}$;
(4) $y = \ln \sin(e^{-x})$; (5) $y = x^2 + x + 1$; (6) $y = \sin(\cos e^x)$;
(7) $y = \arcsin(x + 5)$; (8) $y = \arctan(x^2 + 1)$ 。

4. 写出两个非初等函数。

1.3 数列的极限 函数的极限

1.3.1 自变量 x 的 7 种趋近形式

由于不重合的两点间的距离总是取正值的; 因此, 点 x 与点 x_0 之间的距离 d 应该是

$$d = |x - x_0|。$$

为简洁, 本书总是用 δ 表示任意小的正数, 不再重复说明。

因为孤立的一个数若没有与之相比较的数, 谈不上它的大小; 所以, “任意小的正数”与“任意给定的正数”实际上是同一个意思。这一点, 请读者务必明确。

另外, 关于任意小的正数 δ , 有一条十分重要的性质, 我们把它用定理的形式给出。

定理 1-1 设 x 为变量, $k \in \mathbb{R}^+$, 则 $|x| < k$ 与 $|x| < \delta$ 等价。

证 由于 δ 是任意小的正数, 由它的任意性可知, 对 $k \in \mathbb{R}^+$, k 仍是任意小的正数, 所以 $|x| < k$ 与 $|x| < \delta$ 等价。

有了距离的概念及 δ , 就可以明确数学中的“趋于”或“趋近于”的概念了。

定义 1-6 在变量 x 的变化过程中, 自某一时刻后, 如果点 x 与定点 x_0 间的距离小于 δ , 即若 $|x - x_0| < \delta$, 则称 x 趋于点 x_0 。

根据定义 1 - 6, x 趋于点 x_0 应该有下列 3 种情况:

- (1) x 从 x_0 左侧趋于点 x_0 ;
- (2) x 从 x_0 右侧趋于点 x_0 ;
- (3) x 从 x_0 左右两侧趋于点 x_0 。

上述 3 种情况分别记为: $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0$ 。(请读者自行在数轴上画出这 3 种趋近情形的示意图形。)

上面考虑的是 x_0 为数轴上有限的点的情况。而如果 x_0 不是数轴上有限的点, 即 x_0 是无穷大($+$, $-$ 或 ∞), 此时的 x 趋于点 x_0 (即 x 趋于 $+$, $-$ 或 ∞) 又如何定义?

定义 1 - 7 在变量 x 的变化过程中, 自某一时刻后, 如果点 x 与原点间的距离大于任意大的正数 M , 即 $|x| > M$, 则称 x 趋于无穷大。

显然, x 趋于无穷大有下述 3 种情况:

- (1) x 趋于 $-\infty$;
- (2) x 趋于 $+\infty$;
- (3) x 趋于 ∞ 。

上述 3 种情况, 相应地依次记为: $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow \infty$ 。(请读者自行在数轴上画出这 3 种趋近情形的示意图形。)

最后, 还有 x 趋近的一种特殊形式: x 以取自然数值 n 的形式, 跳跃性地趋于 $+\infty$ 。这种情况我们把它记为 $n \rightarrow \infty$ 。

1.3.2 数列的极限

所谓数列, 就是按照一定顺序排列的一列数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 简记为 $\{x_n\}$ 。

定义 1 - 8 设有数列 $\{x_n\}$, 在 $n \rightarrow \infty$ 的过程中, 若随着 n 的不断增大, 存在

$$|x_n - A| < \epsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$; 其中 $A \in \mathbb{R}$ 。

例 1 - 13 设有数列 $\{x_n\}$, $x_n = \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

证 事实上, 容易知道在 $n \rightarrow \infty$ 的过程中, 随着 n 的不断增大, 有

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 。

类似, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0。$$

1.3.3 函数的极限

定义 1 - 9 设有函数 $y = f(x)$, 在自变量 x 的某种趋近过程中, 若随着 x 的不断趋近,