经济与管理专业公共课教材

高　等　数　学

线性代数

白锦东　姚增善　刘宝生　陈中慧　编

中国海洋大学出版社

·青岛·

内 容 提 要

本书由微积分(上)、微积分(下)、线性代数和概率统计四部分内容组成。全书概念清晰,结构合理,用现代数学的观念突出了数学在经济、管理和社会等领域中的应用。

本书可作为高校经济与管理类专业的教学用书,也可用作高等职业教育和成人教育相关专业的教材以及考研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/白锦东等编.—青岛:中国海洋大学出版社,2003.9

ISBN 7-81067-515-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.白…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O319.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 082916 号

中国海洋大学出版社出版发行

(青岛市鱼山路 5 号　邮政编码:266003)

出版人:王曙光

日照报业印刷有限公司印刷

新华书店经销

*

开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:34.5　字数:866 千字

2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷

印数:1～2 100　全套 4 册总定价:66.00 元

前　言

本书根据中国海洋大学2000年重点教材立项课题的要求编写而成。全书共分四册:第一册为微积分(上),由姚增善执笔;第二册为微积分(下),由陈中慧和姚增善执笔;第三册为线性代数,由白锦东执笔;第四册为概率统计,由刘宝生执笔。

在编写过程中,我们主要遵循了以下原则:

(1)努力突出高等数学的基本思想和基本方法,以便学生在学习中能较好地了解各部分内容的内在联系,从总体上把握高等数学的思维方法;

(2)在坚持教学大纲基本要求的基础上,按照适当介绍和循序渐进的原则,渗透现代数学思想,突出数学在经济、管理和社会等领域中的应用特色;

(3)尽量多地引入现代经济模型作为例题或习题,重视培养学生运用数学方法解决实际问题的能力,体现教学改革的方向。

线性代数共6章。编者根据经济与管理类专业特点,结合多年的教学实践,在吸取传统教材优点的基础上,对线性代数部分内容体系进行了改革尝试。为便于学生领会和掌握线性代数的基本概念和方法,本书中配备了较多的例题,以阐明分析问题的思路和解题方法。同时,在每章后面附有适量的练习题,其中部分题目有一定的难度,学生可根据情况选做。

在定稿过程中，编写组共同审阅了书稿。另外，学校教务处、经济学院和数学系领导为本书的出版给予了大力支持，特表衷心的感谢。

限于编者的水平以及编写时间的紧迫，书中肯定会有不妥和疏漏之处，敬请读者不吝指正。

编　者

2003 年 9 月

目　　录

第 1 章　行列式

(determinant)

.

、 ,

(Cramer) .

§ 1.1

n , .

一、排列

n 级排列 n $i_1 i_2 \cdots i_n$ n

n ( ).

n $n!$.

n , , 1 n

n .

排列的逆序 $i_1 i_2 \cdots i_n$, $i_k > i_s$ i_k i_s

, i_k i_s .

$i_1 i_2 \cdots i_n$ $i_1 i_2 \cdots i_n$ **逆序数**,

$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

( ) 奇(偶)排列.

例 1 4 5 1 3 2 .

解 ,4 1,3,2 ; 5 1,3,2 ,3 2 .

$$\tau(4\ 5\ 1\ 3\ 2) = 3+3+1 = 7$$

.

$i_1\ i_2 \cdots\ i_n$ i_k i_k t_k i_k **逆序数**,

$$\tau(i_1\ i_2 \cdots\ i_n) = \sum_{k=1}^{n-1} t_k$$

$1\ 2\ \cdots\ n$ **自然排列**, , . $n\ (n-1)\ \cdots\ 2\ 1$

$$\tau(n\ n-1\ \cdots\ 2\ 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

n .

对换 , , . i, j , (i, j).

, 1 $(4,5)$ 5 4 1 3 2.

$$\tau(5\ 4\ 1\ 3\ 2) = 8,$$

5 4 1 3 2 . , $(4,5)$.

定理 1.1 , .

证 .

(1)

$$i_1\ i_2 \cdots\ i_s\ a\ b\ j_1\ j_2 \cdots\ j_t$$

(a, b)

$$i_1\ i_2 \cdots\ i_s\ b\ a\ j_1\ j_2 \cdots\ j_t$$

，$i_1, i_2, \cdots, i_s, j_1, j_2, \cdots, j_t$.

$a>b$ ，a 1，b ；$a<b$ ，a

，b 1. ， .

(2)

$$i_1\ i_2 \cdots i_s\ a\ k_1 \cdots k_r\ b\ j_1\ j_2 \cdots j_t \qquad (*)$$

(a,b)

$$i_1\ i_2 \cdots i_s\ b\ k_1 \cdots k_r\ a\ j_1\ j_2 \cdots j_t \qquad (**)$$

，(*) $2r+1$ $(a,k_1),\cdots,(a,k_r)$，(a,b)，$(k_r,b),\cdots,(k_1,b)$ (**). (1)

(*) (**) .

(1) (2) ， .

例 2 ： $1,2,\cdots,n$ n 、

$(n>1)$.

证 、 p q， p

$(1,2)$， 1.1 ， p ， p

， $q \geqslant p$.

：$p \geqslant q$. $p=q$.

二、二阶和三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{(} \quad a_{ij} \quad ;i,j=1,2\text{)}$$

二阶行列式. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

$a_{ij}(i,j=1,2)$ **元素**， i j

，

行标 列标.

，：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4-(-2)\times1=14$$

，

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{2}$$

. （2） 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq0$$

，（2）：

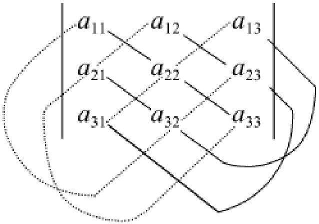
$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

三阶行列式.



$$1\ a_{,,}a_{--}a_{00}\ 2\ a_{,-}a_{-0}a_{0,}\ 2\ a_{,0}a_{-,}a_{0-}$$
$$4\ a_{,0}a_{--}a_{0,}\ 4\ a_{,-}a_{-,}a_{00}\ 4\ a_{,,}a_{-0}a_{0-}$$

（0）

.

例如

$$\begin{vmatrix} 7 & , & - \\ 4, & 4- & 0 \\ 40 & . & 4. \end{vmatrix} 176(4-)6(4.)2,606(40)$$
$$2-6(4,)6.4-6(4-)6(40)$$
$$4,6(4,)6(4.)47606.$$

1 4 00

行列式的值.　　，

4 00.　　、　　对角线法.

$$\begin{cases} a_{,,}x_{,}\ 2\ a_{,-}x_{-}\ 2\ a_{,0}x_{0}\ 1\ b_{,} \\ a_{-,}x_{,}\ 2\ a_{--}x_{-}\ 2\ a_{-0}x_{0}\ 1\ b_{-} \\ a_{0,}x_{,}\ 2\ a_{0-}x_{-}\ 2\ a_{00}x_{0}\ 1\ b_{0} \end{cases} \quad (.)$$

系数行列式

$$D\ 1 \begin{vmatrix} a_{,,} & a_{,-} & a_{,0} \\ a_{-,} & a_{--} & a_{-0} \\ a_{0,} & a_{0-} & a_{00} \end{vmatrix} \neq 7$$

，　　（.）　　：

$$x_{,}\ 1\ \frac{D_{,}}{D},x_{-}\ 1\ \frac{D_{-}}{D},x_{0}\ 1\ \frac{D_{0}}{D},$$

$D_j(j=1,2,3)$ D j (4) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

.

、 n ，

( ) . 、

(1) (3) :

(1) 、

;

(2) ;

(3) :

， ， ，

“＋” ; ， “—” .

$a_{1j_1}a_{2j_2}$， j_1j_2

，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

$\sum\limits_{(j_1j_2)}$ j_1j_2 .

，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ $j_1j_2j_3$.

三、n 阶行列式的定义

定义 1.1 n^2 n n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

n **阶行列式.** ， ：

(1)

；

(2) $n!$ ；

(3) ： n

， ，

， “+” ； ， “—” .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$ $j_1 j_2 \cdots j_n$ n .

注 1 $|a| = a$.

注 2 ( ) ， .

n (5) $|a_{ij}|$.

， D

(2) (4) .

， ， (5) $|\boldsymbol{A}|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

， $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 主对角线， a_{1n}，
$a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 次对角线.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对角形行列式（ $i\neq j$ ，$a_{ij}=0$；$i,j=1,2,\cdots,n$）.

例 3 ：

.

证 n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$j_1=1,j_2=2,\cdots,j_n=n$ ， $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下三角形行列式　上三角形行列式.　、

三角形行列式.　.

n　，　、

.

例 4　n

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

解　D　.　1　a_1

，　，　a_2(　b_1

，　b_1)，　a_3，$\cdots$，　$n-1$

a_{n-1}，　n　a_n，　$a_1a_2\cdots a_n$　.

1　b_1　，　1　b_n，　n　b_{n-1}，

$n-1$　b_{n-2}，$\cdots$，　3　b_2，

.　，　.

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(1\ 2\ \cdots\ n)} a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{\tau(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)} b_1b_2\cdots b_n \\ &= a_1a_2\cdots a_n + (-1)^{(n-1)} b_1b_2\cdots b_n. \end{aligned}$$

定理 1.2　n

$$|a_{ij}| = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$\sum\limits_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$　$i_1\ i_2\ \cdots\ i_n$　n　.

证　，　$i_1\ i_2 \cdots\ i_n$　n　，$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$

$|a_{ij}|$. ,

$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$

$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$.

$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$,

. ,

, 1.1 , , ,

. $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots$ $a_{i_n n}$ $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$

.

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(1\ 2\ \cdots\ n)} = (-1)^{\tau(1\ 2\ \cdots\ n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

1.2 , n , .

, 、 ,

.

注 3 1.2 , n $|a_{ij}|$

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$i_1\ i_2 \cdots i_n$ $j_1\ j_2 \cdots j_n$ n .

§ 1.2

.

行列式的转置

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D ， D^{T}.

D i D^{T} i ， D j D^{T} j $(i,j=1,2,\cdots,n)$. D i j D^{T} j i .

注 1 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1 ， $D^{\mathrm{T}}=D$.

证 a_{ij} a'_{ij} D D^{T} i j . D^{T} ，

$$a'_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$$

1.2

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a'_{1j_1} a'_{2j_2} \cdots a'_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= D \end{aligned}$$

注 2 1 ， ， ( ) ， ( ) .

， .

性质 2 ( ) ， .

证 n $D=|a_{ij}|$ s t ，