21 世纪高职高专、成人高校系列教材

# 高　等　数　学

## (再版)

主　编　姜丽娟　池春姬　万淑香
副主编　王崇宝　许丽利
主　审　张曼清

电子科技大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学／姜丽娟，池春姬，万淑香主编. —成都：电子科技大学出版社，2006.7

（21世纪高职高专、成人高校系列教材）

ISBN 7-81114-208-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①姜…②池…③万… Ⅲ. 高等数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第079274号

## 内容简介

本书共11章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数与应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、级数。附录了大学数学实验。

本书特点是：突出重点，深入浅出，对基本概念、重要公式和定理，注意其几何意义解释说明，用实例反映数学在实际中的应用，在理论上坚持必需够用为度的原则，注重与实践相结合。

本书可作为高等专科学校、高等职业学校、成人高等学校理工科专业数学基础教材。

# 高等数学

姜丽娟　池春姬　万淑香　主编

| | |
|---|---|
| 出　　版 | 电子科技大学出版社（成都市建设北路二段四号　邮编610054） |
| 责任编辑 | 张致强 |
| 发　　行 | 新华书店 |
| 印　　刷 | 安徽省蚌埠广达印务有限公司 |
| 开　　本 | 787×1092　1/16　**印张**　18　**字数**　500千字 |
| 版　　次 | 2006年7月第一版 |
| 印　　次 | 2006年7月第一次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 7-81114-208-2／O·8 |
| 印　　数 | 1－5 000册 |
| 定　　价 | 28.00元 |

# 序　　言

为振兴教育事业,实施科教兴国战略,深化教育体制和结构改革,在鸡西大学校领导的关怀和督促下,在各同仁的支持下,我们全体教学一线的数学教师基于教学中积累了大量的丰富教学经验,组织编写了本书。本书是高等职业教育、高等专科教育、成人高等教育工程类专科的基础教材之一。

编写时力求做到:努力体现教学大纲的基本要求,系统阐述大纲规定基础知识,基本理论和基本技能;紧扣高等院校培养目标和规格要求,密切联系数学教学实际,在内容上恰当运用近代数学的观点,思想和方法,培养学生的思维能力和应用能力;内容逻辑环节紧凑,知识系统主次分明,详略适度。教材内容充分体现了高职高专基础教学以"以应用为目的,以必需为度"高职教学基本原则,以"强化概念,注重应用"为依据,既考虑人才培养的应用性,又使学生具有一定可持续发展性。有关定理、结论、方法力求通俗易懂,避免繁琐推证。

本书具有以下特点:

(1)理论描述力求简约,具体讲解明晰易懂。

(2)突出强调数学概念与实际问题须联系。

(3)教学内容注重实际应用,例题、习题选择有利于学生对实际问题提炼数学模型的能力培养。

本书第1、2、3章由姜丽娟编写,第4、5、6、10章由池春姬编写,第7、8章及附录Ⅰ"大学数学实验"由万淑香编写,第9章由许丽利编写,第11章由王崇宝编写。全书由张曼清副教授主审。

由于编者水平所限,不妥之处在所难免,希望读者批评指正。

2005年12月

# 目　　录

# 第一章　函数　极限　连续

函数是近代数学的基本概念之一."高等数学" 就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.极限是贯穿"高等数学" 始终的一个重要概念,它是这门课程的基本推理工具.连续则是函数的一个重要性态,连续函数是高等数学研究的主要对象.本章介绍函数、极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

## 第一节　函　数

### 一、函数的概念

**定义** $D$ , $f$, $D$

$x$, $f$ $y$ , $f$ $D$ .

$D$ $f$ ,$x$ ,$y$ , $x$ $x_0$,

$y$ , $f$ $x_0$ , $f$

$$y|_{x=x_0},\ f(x)|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0)$$

实数集合 $B=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $f$ 的值域.$f(x)$ 与 $f$ 二者并不相同,$f(x)$ 是 $f$ 在 $x$ 的函数值.但是,人们往往是通过函数值研究函数的,因此,通常也称 $f(x)$ 是 $x$ 的函数,或者说 $y$ 是 $x$ 的函数,本书亦采用这种习惯的叙述方式.

表示函数的符号是任意选取的,除了常用的 $f$ 外,还可以用其他的英文或希腊字母,如"$g$"、"$F$"、"$\phi$"、"$\Phi$" 等等.如果在同一问题中,讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

由定义可以看出,函数是由定义域与对应规则确定的,因此,对于两个函数来说,当且仅当它们的定义域和对应法则都分别相同时它们才表示同一函数,而与自变量及因变量用什么字母表示无关.例如,$y=f(x)$ 也可以用 $y=f(\theta)$ 表示.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合,称为函数的自然定义域.例如 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是 $(-\infty,+\infty)$,$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域区间是 $(-1,1)$.人们通常用不等式、区间或集合形式表示定义域.其中,满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

(其中 $\delta$ 为大于 0 的常数) 的一切 $x$,称为点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域,记作 $U(x_0,\delta)$,它的几何意义表示:以 $x_0$ 为中心,$\delta$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$[见图 1-1(a)].不等式 $0<|x-a|<\delta$ 称为点 $x_0$ 的 $\delta$ 的空心邻域,记作 $\hat{U}(x_0,\delta)$ 或 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$,如图 1-1(b) 所示.

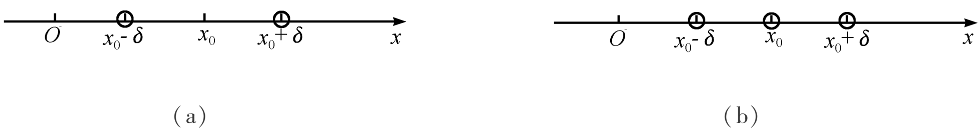



图 1-1

有时会遇到给定$x$值、对应的$y$值有多个的情形,为了叙述方便称之为多值函数.而符合上述定义的函数称为单值函数.对于多值的情形,我们可以限制$y$的值域使之成为单值再进行研究.例如$y = \mathrm{arcsin}x$,则可限制$y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,而使它转化为函数$y = \arcsin x$,从而通过对$y = \arcsin x$的研究,了解$y = \mathrm{arcsin}x$的性态.

**例 1** 已知$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$,求$f(0)$、$f(\frac{1}{2})$、$f(\frac{1}{x})$、$f(x+1)$、$f(t^2)$.

**解**
$$f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \qquad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{x+2}$$

$$f(t^2) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

**例 2** 求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \frac{3}{5x^2+2x}$; (2) $f(x) = \sqrt{x+3} + \ln(x-2)$.

**解** (1) 该函数的定义域是满足式子$5x^2 + 2x \neq 0$的$x$值的集合,解得$x \neq -\frac{2}{5}$且$x \neq 0$,即定义域为$(-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5},0) \cup (0, +\infty)$.

(2) 该函数的定义域是满足不等式组

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

的$x$值的全体,解此不等式组,得此定义域为$x > 2$,即$(2, +\infty)$.

应当指出,在实际问题中,除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围外,还要考虑自变量的实际意义.

具体表示一个函数时,可以用表格法、图形法、解析法(即算式表示法),有时也可用语言描述,这些是大家在中学里已熟悉的内容,这里就不再详细说明了.

## 二、分段函数

有些函数虽然也是以数学式子表示,但是它们在定义域的不同范围具有不同的表达式.这样的函数叫分段函数,分段函数在数学上和工程技术中以及日常生活中都会经常遇到.

**例 3**　旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品，超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每千克交费$a$ 元，超过 50 kg 部分每千克交费 $b$ 元，求运费与携带物品重量的函数关系.

**解**　设物品重量为 $x$ kg，应交运费为 $y$ 元. 由题意可知这时应考虑三种情况：

第一种情况是重量不超过 20 kg，这时

$$y=0,\qquad x\in[0,20]$$

第二种情况是重量大于 20 kg 但不超过 50 kg，这时

$$y=(x-20)\times a,\qquad x\in(20,50]$$

最后是重量超过 50 kg，这时

$$y=(50-20)\times a+(x-50)\times b,\qquad x>50$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y=\begin{cases}0 & x\in[0,20]\\ a(x-20) & x\in(20,50]\\ a(50-20)+b(x-50) & x>50\end{cases}$$

**例 4**　设函数$f(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$，求$f(2)$、$f(0)$、$f(-2)$及函数的定义域.

**解**　因为$2\in(0,+\infty)$，所以$f(2)=1$、$f(0)=0$，又因为$-2\in(-\infty,0)$，所以$f(-2)=-1$，$f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

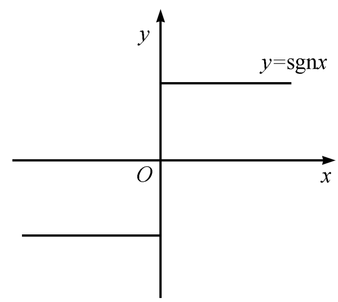



图　1-2

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

例 4 给出的函数称为符号函数，记为 $\mathrm{sgn}x$，其定义域$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，图形如图 1-2 所示.

**例 5**　取整函数对任意的 $x\in R$，用记号$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，从而得到定义在 $R$ 上的函数 $y=[x]$，称此函数为取整函数，$[x]$ 称为 $x$ 的整数部分，例如$\left[\dfrac{5}{7}\right]=0$、$[\sqrt{2}]=1$、$[\pi]=3$、$[-1]=-1$、$[-3.5]=-4$.

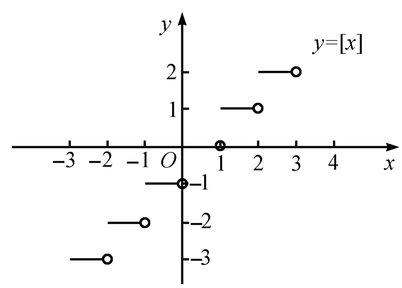



图　1-3

$y=[x]$ 的定义域是 $R$，值域是 $Z$，图 1-3 是它的图形. 取整函数还可以表示成

$y=[x]=n$，当 $n\in[n,n+1)$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

## 三、函数的基本性态

1.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，若对于定义域中的任何 $x$，都有$f(x)=f(-x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$ 为奇函数. 不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 $y$ 轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

2.

设 $x_1$ 和 $x_2$ 为区间 $(a,b)$ 的任意两个数,若当 $x_1 < x_2$ 时,函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称该函数在区间 $(a,b)$ 内单调增加,或称递增;若当 $x_1 < x_2$ 时,有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称该函数在区间 $(a,b)$ 内单调减少,或称递减.

单调增加或单调减少的函数均称为单调函数.

3.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$,若存在一个不为零的数 $T$,使得对于定义域 $D$ 内的一切 $x$ 当 $(x \pm T) \in D$ 时,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$ 为周期函数,$T$ 称为 $f(x)$ 的周期.通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数, $\tan x$ 是以 $\pi$ 为周期的周期函数.

4.

设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义,若存在一个正数 $M$,当 $x \in I$ 时,恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$ 为在 $I$ 上的有界函数;若不存在这样的正数 $M$,则称函数 $f(x)$ 为在 $I$ 上的无界函数.

例如,因为当 $x \in (-\infty,+\infty)$ 时,恒有 $|\sin x| \leqslant 1$,所以函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数.又如 $f(x)=\arctan x$ 在它的定义域内是有界的,而 $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界函数.

有的函数可能在定义域的某一部分有界,而在另一部分无界,例如 $f(x)=\tan x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上是有界的,而在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的,因此我们说一个函数是有界的或者无界的,应同时指出其变量的相应范围.

## 四、反函数和复合函数

1.

设 $y=f(x)$ 为定义在 $D$ 上的函数,其值域为 $A$.若对于数集 $A$ 中的每个 $y$,数集 $D$ 中都有唯一的一个数 $x$ 使 $f(x)=y$,这就是说变量 $x$ 是变量 $y$ 的函数.这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$.其定义域为 $A$,值域为 $D$.函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图形是相同的.

由于人们习惯于用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示因变量,我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示.这时二者的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由函数 $y=f(x)$ 求它的反函数的步骤是:由方程 $y=f(x)$ 解出 $x$,得到 $x=f^{-1}(y)$;将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 $x$ 和 $y$ 分别换成 $y$ 和 $x$,这样就得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

2.

若函数 $y=F(u)$ 的定义域为 $U_1$,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $U_2$,其中 $U_2 \subseteq U_1$,则 $y$ 通过变量 $u$ 成为 $x$ 的函数,这个函数称为由函数 $y=F(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,记为

$$y = F[\varphi(x)]$$

变量 $u$ 称为中间变量.

**例 6**　试求函数 $y = u^2$ 与 $u = \cos x$ 构成的复合函数.

**解**　将 $u = \cos x$ 代入 $y = u^2$ 中,即为所求的复合函数 $y = \cos^2 x$,其定义域为$(-\infty, +\infty)$.

**例 7**　指出 $y = (3x+5)^{10}$、$y = \sqrt{\log_a(\sin x + 2^x)}$ 是由哪些函数复合而成的.

**解**　$y = (3x+5)^{10}$ 是由 $y = u^{10}$ 和 $u = 3x+5$ 复合而成的.

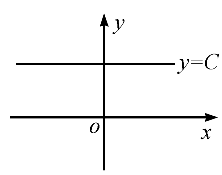
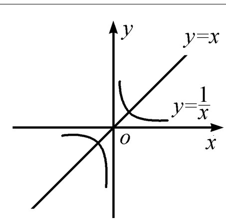
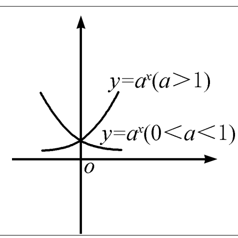
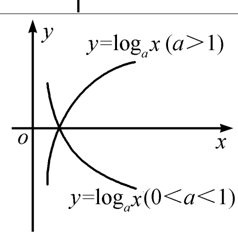
$y = \sqrt{\log_a(\sin x + 2^x)}$ 是由 $y = \sqrt{u}$、$u = \log_a v$、$v = \sin x + 2^x$ 复合而成的.

## 五、初等函数

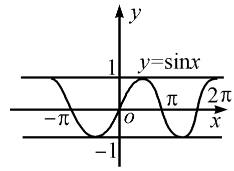
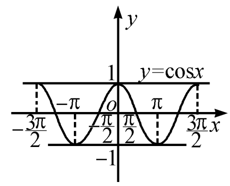
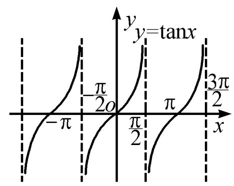
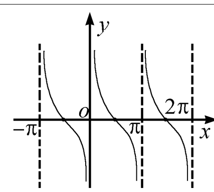
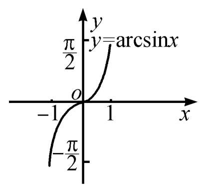
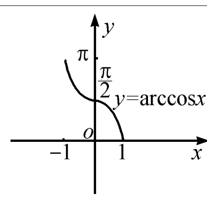
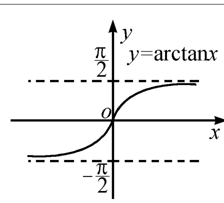
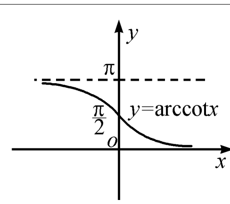
1.

在中学学过的幂函数 $y = x^a$($a$ 为任意实数);指数函数 $y = a^x$($a > 0$,且 $a \neq 1$);对数函数 $y = \log_a x$($a > 0$,且 $a \neq 1$);三角函数 $y = \sin x$,$y = \cos x$,$y = \tan x$,$y = \cot x$,$y = \sec x$,$y = \csc x$ 和反三角函数 $y = \arcsin x$,$y = \arccos x$,$y = \arctan x$,$y = \operatorname{arccot} x$ 五类函数统称为基本初等函数. 常值函数和它们的图形分别如表 1-1 所示.

表 1-1

<table>
<tr><th>函　数</th><th>定义域与值域</th><th>图　像</th><th>性　质</th></tr>
<tr><td>常值函数<br>$y = C$<br>($C$ 为常数)</td><td>$x \in (-\infty, +\infty)$<br>$y = C$</td><td>
</td><td>偶函数</td></tr>
<tr><td>幂函数<br>$y = x^\mu$</td><td>随 $\mu$ 而不同</td><td>
</td><td>当 $\mu > 0$ 时,函数在第一象限单调递增<br>当 $\mu < 0$ 时,函数在第一象限单调递减</td></tr>
<tr><td>指数函数<br>$y = a^x$<br>($a > 0$,且 $a \neq 1$)</td><td>$x \in (-\infty, +\infty)$<br>$y \in (0, +\infty)$</td><td>
</td><td>过点(1,0)<br>当 $a > 1$ 时,单调递增<br>当 $0 < a < 1$ 时,单调递减</td></tr>
<tr><td>对数函数<br>$y = \log_a x$<br>($a > 0$,且 $a \neq 1$)</td><td>$x \in (0, +\infty)$<br>$y \in (-\infty, +\infty)$</td><td>
</td><td>过点(1,0)<br>当 $a > 1$ 时,单调递增<br>当 $0 < a < 1$ 时,单调递减</td></tr>
</table>

续 表

| 函 数 | | 定义域与值域 | 图 像 | 性 质 |
|---|---|---|---|---|
| 三角函数 | 正弦函数<br>$y=\sin x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 奇函数,周期为 $2\pi$,有界<br>在 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递增<br>在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递减 |
| | 余弦函数<br>$y=\cos x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in[-1,1]$ |  | 偶函数,周期为 $2\pi$,有界<br>在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递减<br>在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递增 |
| | 正切函数<br>$y=\tan x$ | $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$<br>$(k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,周期为 $\pi$<br>在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递增 |
| | 余切函数<br>$y=\cot x$ | $x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$<br>$y\in(-\infty,+\infty)$ |  | 奇函数,周期为 $\pi$<br>在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 单调递减 |
| 反三角函数 | 反正弦函数<br>$y=\arcsin x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ |  | 奇函数,有界<br>单调递增 |
| | 反余弦函数<br>$y=\arccos x$ | $x\in[-1,1]$<br>$y\in[0,\pi]$ |  | 有界<br>单调递减 |
| | 反正切函数<br>$y=\arctan x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ |  | 奇函数,有界<br>单调递增 |
| | 反余切函数<br>$y=\text{arccot}\,x$ | $x\in(-\infty,+\infty)$<br>$y\in(0,\pi)$ |  | 有界<br>单调递减 |

2.

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成,并且可以用一个数学式子表示的函数,叫做初等函数. 例如

$$y=\sqrt{\ln 5x-3^{x}+\sin^{2}x}、\qquad y=\frac{\sqrt[3]{2x}+\tan 3x}{x^{2}\sin x-2^{-x}}$$

等等,都是初等函数,不能用一个式子表示或不能用有限个式子表示的函数都不是初等函数.

最后,我们介绍工程技术上常用到的一类初等函数,即双曲函数及反函数. 它们的定义是:

双曲正弦函数　$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

双曲余弦函数　$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

双曲正切函数　$\operatorname{th}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\left(\text{即}\dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

双曲余切函数　$\operatorname{coth}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}\left(\text{即}\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

双曲函数的图形如图 1-4 所示.

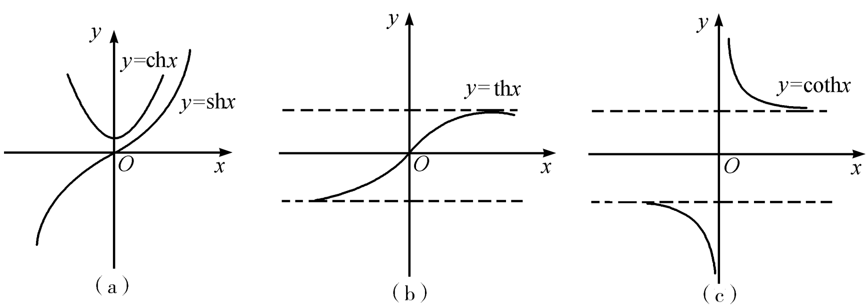



图　1-4

这些函数之间存在着下述关系:

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y \tag{①}$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{②}$$

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x \tag{③}$$

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^{2}x+\operatorname{sh}^{2}x \tag{④}$$

$$\operatorname{ch}^{2}x-\operatorname{sh}^{2}x=1 \tag{⑤}$$

我们来证明第一个公式. 由双曲函数的定义可得

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y&=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y)\end{aligned}$$

其余的公式读者不难自行论证.

上述公式与三角函数的有关公式类似,只是公式 ①、公式 ④、公式 ⑤ 与三角函数的相应公式

符号不同,注意两者的对照、比较,是易于记忆的.

函数 $y=\mathrm{ch}x$ 是偶函数,因为 $\mathrm{ch}(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\mathrm{ch}x$. 函数 $y=\mathrm{sh}x$、$y=\mathrm{th}x$、$y=\mathrm{coth}x$ 为奇函数,因为

$$\mathrm{sh}(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\mathrm{sh}x$$

$$\mathrm{th}(-x)=\frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)}=\frac{-\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=-\mathrm{th}x$$

$$\mathrm{coth}(-x)=\frac{\mathrm{ch}(-x)}{\mathrm{sh}(-x)}=\frac{\mathrm{ch}x}{-\mathrm{sh}x}=-\mathrm{coth}x$$

双曲函数不像三角函数那样具有周期性.

双曲函数的值域也与三角函数不同:$y=\mathrm{sh}x$ 的值取一切实数;$y=\mathrm{ch}x$ 的值为不小于 1 的一切实数;$y=\mathrm{th}x$ 的值介于 $-1$ 与 1 之间;$y=\mathrm{coth}x$ 的值在 $x>0$ 时大于 1,在 $x<0$ 时小于 $-1$.

双曲函数的反函数叫反双曲函数,分别记为 $\mathrm{arsh}x$、$\mathrm{arch}x$、$\mathrm{arth}x$、$\mathrm{arcoth}x$. 反双曲函数还有以下的表达式:

$$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{⑥}$$

$$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}) \tag{⑦}$$

$$y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{⑧}$$

$$y=\mathrm{arcoth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \tag{⑨}$$

下面我们给出公式 ⑥ 的推导:

在 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 中,令 $e^{x}=u$,于是可得

$$u^2-2yu-1=0$$

解之得

$$u=y\pm\sqrt{y^2+1}$$

因为 $u=e^{x}>0$,所以上式取正号,即

$$u=y+\sqrt{1+y^2}$$

$$e^{x}=y+\sqrt{1+y^2}$$

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$$

故 $y=\mathrm{sh}x$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

## 习题 1-1

1. 判断下列各题中的函数是否为同一函数,并说明理由.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ 与 $y(x)=x-1$.

(2) $f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\ln x$.

(3) $f(x)=\lg x^{10}$ 与 $g(x)=10\lg x$.

(4) $f(x)=(1-\cos^2x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\sin x$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$　　(2) $y=\sqrt{3x-x^2}$

(3) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$

(4) $y=\begin{cases}-x & (-1\leqslant x\leqslant 0)\\ \sqrt{3-x} & (0<x<2)\end{cases}$

3. 确定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

(2) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

(3) $f(x)=\sin x+\cos x$

4. 求下列函数的反函数：

(1) $f(x)=x^2\quad(0\leqslant x<+\infty)$

(2) $f(x)=2^x+1$

(3) $f(x)=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

5. 设 $f(x)=2x^2+2x-4$，求 $f(1)$、$f(x^2)$、$f(a)+f(b)$.

6. 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

7. 指出下列各题中函数的复合过程：

(1) $y=\cos 5x$　　(2) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$　　(3) $y=e^{\sin 3x}$　　(4) $y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$

# 第二节　极限的概念

极限的概念与求一些量的精确值有关，它研究的是在自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势. 下面我们先来看一个例子.

求由曲线 $y=x^2$、$x=1$ 及 $x$ 轴所围成的图形(该图形叫做曲边三角形，见图 1-4) 的面积.

**解**　将区间 $[0,1]$ 等分为 $n$ 个小区间 $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$，$\left[\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right]$，…，$\left[\dfrac{n-1}{n},1\right]$，称为子区间，依次作 $n$ 个内接小矩形，如图 1-5 所示，它们的面积分别为：

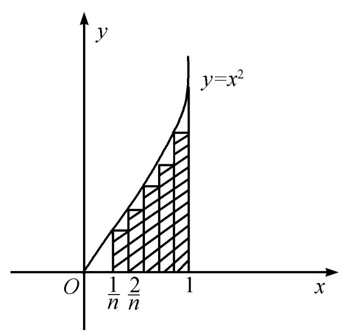


图　1-5

$$\frac{1}{n}\times 0,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{3}{n}\right)^2,\cdots,\ \frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

若将这 $n$ 个小矩形的面积之和 $S_n$ 作为曲边三形面积 $S$ 的近似值，则有：

$$\begin{aligned}S\approx S_n&=\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

由图1-5不难发现，$n$ 愈大，$S_n$ 愈接近 $S$. 显然，当 $n$ 无限地增大时，$S_n$ 就无限地接近或者说趋向于 $S$；另一方面，分析 $S_n$ 的表达式可知，当 $n$ 无限变大时，$S_n$ 无限地趋向于 $\frac{1}{3}$，于是可以断言，该曲边三角形的面积 $S$ 为 $\frac{1}{3}$.

实际上，这里讨论的是当自变量 $n$ 在无限变大时，函数 $S_n$ 的变化趋势. 这种通过研究函数变化趋势解决问题的方法叫极限方法.

一般地，极限概念指的是在自变量的某一变化过程中函数的变化趋势. 下面，我们就函数在自变量不同变化过程中的变化趋势问题分别加以讨论.

## 一、数列极限

**定义1** ( ) $x_n = f(n), n = 1, 2, 3, \cdots$, $n$

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ , $\{x_n\}$.

, $n$ $x_n$ . 例如数列

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，一般项 $x_n = \frac{1}{n}$；

(2) $2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots$，一般项 $x_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

关于数列，我们关心的主要问题是当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 的变化趋势是怎样的？特别地，$x_n$ 是否无限地接近某个定数？

观察以上两个数列的变化趋势，可以看出，当 $n$ 无限变大时，数列(1)无限地接近于0，数列(2)无限地接近于1. 由此可知，以上两个数列，当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 都分别无限接近于一个确定的常数. 一般地，有下面定义：

**定义2** $\{x_n\}$, $n$ , $x_n$ $A$, $n$

, $\{x_n\}$ $A$ ,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad x_n \to A \quad (n \to \infty)$$

$\{x_n\}$ $A$; $\{x_n\}$ , $\{x_n\}$ .

以上两个数列的极限分别记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] = 1$.

**例1** 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n = \frac{1}{n}$； (2) $x_n = 2 - \frac{1}{n^2}$； (3) $x_n = (-1)^n \frac{1}{3^n}$； (4) $x_n = -3$.

**解** 当 $n$ 无限增大时，从数列的变化趋势可知：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = 2$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n \frac{1}{3^n}\right] = 0$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3) = -3$.

由前面例举的例子可以推得下面的结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon^{n}=0\quad(|\varepsilon|<1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}C=C\quad(C$ 为常数).

**注**：并不是所有的数列都有极限. 例如,数列 $x_n=2^n$,当 $n$ 无限增大时,$x_n$ 也无限增大,不能无限地接近于一个确定的常数,所以这个数列没有极限.

## 二、函数极限

我们就自变量的不同变化情况给出函数极限的定义.

1. $x\to\infty$ ,

**定义 3** $x$ , $f(x)$ $A$, $x\to\infty$ $f(x)$ $A$ .

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to\infty)$$

如果从某一时刻起,$x$ 只能取正值或负值趋于无穷大,那么有下面的定义:

**定义 4** $x>0$ , $f(x)$ $A$, $x\to+\infty$ $f(x)$ $A$ ,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to+\infty)$$

**定义 5** $x<0$ $x$ , $f(x)$ $A$, $x\to-\infty$ $f(x)$ $A$ ,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to-\infty)$$

**例 2** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

**解** 函数的图像如图 1-6 所示. $x\to+\infty$ 时,$\dfrac{1}{x^2}$ 无限变小趋于 0,则函数值趋于 1;当 $x\to-\infty$ 时,函数值同样趋于 1,所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

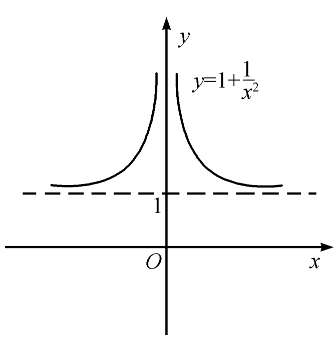



图　1-6

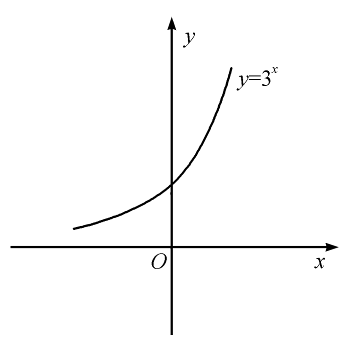



图　1-7

**例 3** 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$.

**解** 如图 1-7 所示. 当 $x\to-\infty$ 时,$3^x\to0$,即 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$;而当 $x\to+\infty$ 时,$3^x\to+\infty$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$. 显然,$\lim\limits_{x\to-\infty}3^x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}3^x$,从而有以下定理:

**定理 1** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

2. $x\to x_0$

**例 4** 考察 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 当 $x\to1$ 时的变化趋势.

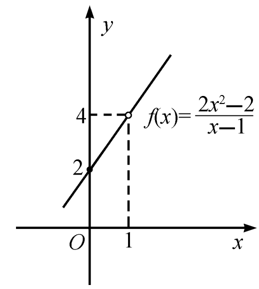


图 1-8

**解** 当 $x\neq-1$ 时,$f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}=2x+2$,由图1-8 可知,当 $x\to1$ 时,$f(x)\to4$.

**定义 6** $f(x)$ $x_0$ $\hat{U}(x_0,\delta)$ ,

$x$ $\hat{U}(x_0,\delta)$ $x_0$ ,

$A$, $A$ $x\to x_0$ $f(x)$ ,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\quad(x\to x_0)$$

从例 4 可知,$f(x)$ 在 $x_0$ 的极限是否存在与其在 $x_0$ 处是否有定义无关.

由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义及函数的图像可知:

$$\lim_{x\to x_0}C=C\qquad(C\text{ 为常数})$$

$$\lim_{x\to x_0}x=x_0$$

3. $x\to x_0$ ,$f(x)$

上面讨论的极限,是 $x$ 从 $x_0$ 的左右两侧同时趋于 $x_0$ 时函数值的变化趋势,但有时我们需要考虑 $x$ 只从 $x_0$ 的左侧趋于 $x_0$(记为 $x\to x_0^-$),或只从 $x_0$ 的右侧趋于 $x_0$(记为 $x\to x_0^+$)时函数值的变化趋势.下面再给出 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$ 时函数极限的定义.

**定义 7** $x\to x_0^+$ ( $x\to x_0^-$ ) , $f(x)$ $A$,

$A$ $x\to x_0^+$ ( $x\to x_0^-$ ) $f(x)$ ( ) ,

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\left(\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\right)\text{ 或}$$

$$f(x_0+0)=A(f(x_0-0)=A)$$

**定理 2** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

**例 5** 设 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\geqslant1)\\ 3x & (x<1)\end{cases}$. 画出该函数的图形,并讨论 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在.

**解** $f(x)$ 的图形如图 1-9 所示.

由图可以看出

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}3x=3$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+2)=3$$

左、右极限存在并且相等,所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$.

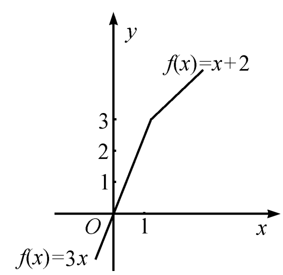


图 1-9

**例 6** 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$. 画出该函数的图形,并判断