全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书

高等数学(一)

高等数学(一)专升本考试命题研究组　编

黄金华　主审

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)/高等数学(一)专升本考试命题研究组编. - 北京: 北京大学出版社, 2002.8
(全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书)
ISBN 7-301-05797-0

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-成人教育: 高等教育-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053753 号

书　　名: 全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书·高等数学(一)
著作责任者: 高等数学(一)专升本考试命题研究组　编
责 任 编 辑: 王　艳
标 准 书 号: ISBN 7-301-05797-0/G·0753
出　版　者: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址: http://cbs.pku.edu.cn
电　　话: 出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
电 子 信 箱: zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者: 北京大学印刷厂
发　行　者: 北京大学出版社
经　销　者: 新华书店
787×1092　16 开本　16.5 印张　408 千字
2002 年 8 月第 1 版　2004 年 3 月第 1 次修订
2004 年 3 月第 2 次印刷
定　　价: 23.00 元

出 版 前 言

为了帮助参加全国各类成人高等教育专科段的广大考生顺利通过全国各类成人高等学校专科起点升本科(即专升本)入学考试,我们特组织专家、教授按新大纲编写了复习考试系列配套辅导教材——《全国各类成人高等教育专升本应试专家指导丛书》。本套辅导教材包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《教育理论》和《艺术概论》共8册。

应邀参加系列辅导教材编写工作的专家、教授,来自北京大学、中国人民大学、北京师范大学、首都师范大学等重点大学。他们长期从事专升本考前班辅导,有丰富的教学经验,深知考生的疑难与困惑。作者把他们的教学经验结合考生的考试实际加以细化、归纳和总结,整理成书奉献给广大考生,旨在提高考生的考试合格率;他们中有曾多年参加过教育部考试中心命题工作,熟悉命题要求和命题规律;他们中许多人熟悉制定和修订复习考试大纲的出发点和目的,对考核内容和考核要点有深入的研究和透彻的理解。因此,本套辅导教材的作者对各学科的专升本考试命题研究有权威性。

本套复习考试辅导教材是依据2002年7月教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》编写的。辅导教材根据《复习考试大纲》的要求、命题难易比例和考试题型比例,设计了"应试指导"、"应试辅导"和"应试演练"三部分内容。

应试指导——对最新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细的阐述,起到大纲内容的延伸、细化的作用。同时精选了典型例题,力求突出考试内容的要求、考试题型的了解以及解题技巧的训练。为了让考生了解试卷命题的特点和趋势,本套辅导教材附有各学科2003年专升本考试的试卷和解答,以供考生参考。

应试辅导——设计了考点测试题。测试题难易搭配,涵盖了考试大纲所要求的全部考点(包括考核的基本知识点、重点、难点和综合运用点)。

应试演练——提供两套演练试卷并附有详细解答,旨在帮助考生掌握试卷结构、熟悉考试题型。

北京大学出版社

2004年2月

编 者 的 话

为了帮助考生顺利通过专升本入学考试, 我们编写了这本全国各类成人高等学校专升本《高等数学(一)》入学考试辅导书。本书内容严格按照教育部 2002 年颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲—— 专科起点升本科》进行编写。

全书共分为三部分。第一部分为应试指导, 主要阐述考纲总要求和解题指导; 考试形式及试卷结构等。第二部分为应试辅导, 共分为七章, 各章由考纲要求、考纲概述、考纲详解、练习题及答案等部分组成。第三部分为应试演练, 由模拟试卷及答案和 2003 年专升本高等数学(一)试卷和答案组成。书后附常用初等数学公式及一些常见曲线, 供读者参考。

全书重点突出, 难点突出, 例题丰富, 例题中包含了 1994 年至 2002 年全国专升本考试高等数学(一) 的试题, 这样有利于考生了解试题的广度和深度, 可以帮助考生有目的、有针对性、有实效性地做好应试准备。相信本书能成为考生的良师益友。

本书由黄金华主编, 参加编写的人员有: 王益、刘洪伟、陈贵龙、陈国贤、聂旭云。

由于我们水平所限, 书中不妥之处在所难免, 敬请广大读者批评指正。

北京大学出版社对本书的出版做了大量工作, 作者对此表示诚挚谢意。

编 者

2004 年 2 月

目　　录

第一部分　应 试 指 导

第二部分　应 试 辅 导

第三部分 应试演练

第一部分　应 试 指 导

一、考纲总要求

考生应按本大纲的要求,了解或理解“高等数学”中函数、极限和连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分学,无穷级数,常微分方程的基本概念与基本理论;学会、掌握或熟练掌握上述各部分的基本方法.应注意各部分知识的结构及知识的内在联系;应具有一定的抽象思维能力、逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力;能运用基本概念、基本理论和基本方法正确地推理证明,准确地计算;能综合运用所学知识分析并解决简单的实际问题.

本大纲对内容的要求由低到高,对概念和理论分为“了解”和“理解”两个层次;对方法和运算分为“会”、“掌握”和“熟练掌握”三个层次.

二、解题指导

(一) 各种题型考查要求

1. 选择题考查要求

选择题由 1 个题干及 4 个供选答案两部分组成,答题时只写答案、不写过程.它是全国成人高等学校招生专升本高等数学科目中的惟一标准化命题题型.较之其他类型相对容易些,主要考查考生对概念的识记程度,对定理的理解程度,对计算的准确程度等.我们将从以下例题说明之.

例 1　(9701)　**函数** $y=\dfrac{1}{x}\ln(2+x)$ **的定义域为**　[　　].

A. $x\neq 0$ 且 $x\neq -2$　　B. $x>0$　　C. $x>-2$　　D. $x>-2$ 且 $x\neq 0$

此题考查考生对初等函数的定义域概念是否清楚,对不等式是否会解.应选 D.

例 2　(0101)　**当** $x\to 0$ **时,下列函数为无穷小的是**　[　　].

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $x^2+\sin x$　　C. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$　　D. $2x-1$

此题考查考生对无穷小量这个概念是否记忆清楚.应选 B.

例 3　(9604)　**设函数** $y=f(x)$ **二阶可导,且** $f'(x)<0$, $f''(x)<0$, **又** $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, $dy=f'(x)dx$, **则当** $\Delta x>0$ **时,有**　[　　].

A. $\Delta y>dy>0$　　B. $\Delta y<dy<0$　　C. $dy>\Delta y>0$　　D. $dy<\Delta y<0$

此题考查考生对微分中值定理及函数导数与函数单调性的关系.应选 B.

例 4　(9709)　**下列级数中为条件收敛的级数是**　[　　].

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

此题考查无穷级数收敛的必要条件、交错级数的莱布尼茨判别法及 p 级数的敛散性. 应选 D.

例 5　(9602)　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+d}$ 等于　[　　].

A. e　　B. e^d　　C. e^{ab}　　D. e^{ab+d}

此题考查考生对极限的计算能力以及一些特殊的极限形式. 应选 C.

例 6　(9705)　设 $\int_0^x f(t)dt=a^{2x}$, 则 $f(x)$ 等于　[　　].

A. $2a^{2x}$　　B. $a^{2x}\ln a$　　C. $2xa^{2x-1}$　　D. $2a^{2x}\ln a$

此题考查求变动上限函数的导数及 a^{2x} 的导数的计算. 应选 D.

例 7　圆 $x^2+y^2=27$ 上横坐标与纵坐标相等的点处的切线斜率为　[　　].

A. -1　　B. -1/2　　C. 1/2　　D. 1

此题是一个综合型的选择题, 它综合了三个知识点: 一是横坐标与纵坐标相等的点的计算, 二是隐函数求导法, 三是导数的几何意义是切线斜率. 应选 A.

2. 填空题考查要求

填空题主要考查基本概念和基本计算两方面的内容, 这类题强调"结论重于过程", 不需要严格的解答程序, 只要将正确答案写在横线上.

填空题不像选择题, 解题时有"可供选择的参照物"; 也不像计算题、综合题要求按部就班, 能客观地评价学生的解答. 填空题要求答案的准确性. 但是, 填空题不会考查复杂的计算, 也不会考查综合的理解, 只是考查对基本概念的把握、基本方法的运用, 它实际上是对选择题、计算题和综合题的补充, 有时一些零散的知识也会出填空题.

下面我们对近年来试题中填空题考查知识点的要求、层次及命题特点作简要分析.

例 1　(9613)　若函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a+2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则 $a=$ ________.

解　根据连续的定义, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则应满足 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, 而

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

且 $f(0)=a+2$, 故 $a+2=0$, $a=-2$.

本题正确答案应填 -2.

注　本题考查了两个基本知识点:

(1) 连续的概念. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 包含三层意思: ① $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义; ② $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限存在; ③ $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时的极限值等于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的函数值.

(2) 无穷小量乘有界函数仍是无穷小量.

例 2　(9712)　设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导, 且 $f'(2)=1$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=\text{________}.$$

解　利用 $f'(2)=1$, 将所给极限形式化为导数定义的标准形式,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-2h}$$

$$= \frac{1}{2}f'(2) + \frac{1}{2}f'(2) = f'(2) = 1.$$

本题正确答案应填 1.

注　本题考查导数的定义.

例 3　(9908)　**设函数** $y = f(x)$ **在点** x_0 **处可导, 且在点** x_0 **处取得极小值, 则曲线** $y = f(x)$ **在点**$(x_0, f(x_0))$**处的切线方程为**________.

解　由于曲线 $y = f(x)$ **在点**$(x_0, f(x_0))$**处的切线方程为** $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, **又由** $f(x)$ **在** x_0 **处可导, 且在** x_0 **处取得极小值, 则有** $f'(x_0) = 0$, **故所求切线方程为** $y = f(x_0)$.

本题正确答案应填 $y = f(x_0)$.

注　本题考查的知识点为: (1) **曲线在一点处的切线方程公式**; (2) **极值的必要条件**.

例 4　(0008)　**设** $y = 2x^2 + ax + 3$ **在** $x = 1$ **取得极小值, 则** $a =$ ________.

解　由 y **的定义域为**$(-\infty, +\infty)$**, 且** $y' = 4x + a$, **令** $y' = 0$, **得** $x = -a/4$ **为** y **的惟一驻点, 而** $y'' = 4$, **因此,** $y''\Big|_{x=-\frac{a}{4}} = 4 > 0$, **从而** $x = -a/4 = 1$ **为** y **的极小值点, 故** $a = -4$.

本题正确答案应填-4.

注　本题为函数极值的反问题.

例 5　(9714)　**函数** $y = \ln(x+1)$**在区间**$[0, 1]$**上满足拉格朗日中值定理的** $\xi =$ ________.

解　函数 $y = \ln(x+1)$ **在**$[0, 1]$**上连续, 在**$(0, 1)$**内可导, 由拉格朗日中值定理有**

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = f'(\xi) = \frac{1}{\xi + 1},$$

从而 $\xi = \frac{1}{\ln 2} - 1$.

本题正确答案应填$\frac{1}{\ln 2} - 1$.

注　本题主要考查拉格朗日中值定理.

例 6　(9516) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx =$ ________.

解　令 $t = \sqrt{x}$, **则** $x = t^2$, $dx = 2tdt$,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^t}{t} \cdot 2tdt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

本题正确答案应填 $2e^{\sqrt{x}} + C$.

注　由于所给积分被积函数中有根式, 应先进行变量替换. 本题考查知识点为用根式代换计算不定积分(**即利用不定积分第二换元法计算**).

例 7　(9717)　**广义积分** $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}}dx =$ ________.

解 $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}}dx = -3x^{-\frac{1}{3}}\Big|_1^{+\infty} = 3.$

本题正确答案应填 3.

注　本题考查无穷区间上的广义积分.

例 8　(0013)　**如果** $f(x)$**有连续导数,** $f(b) = 5$, $f(a) = 3$, **则** $\int_a^b f'(x)dx =$ ________.

解　由不定积分性质 $\int f'(x)dx = f(x) + C$ **及牛顿-莱布尼茨公式, 得**

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = 5 - 3 = 2,$$

本题正确答案应填 3.

注　本题考查的知识点为: (1) $\int f'(x)dx = f(x) + C$; (2) 牛顿-莱布尼茨公式.

例 9　(0112)　幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛半径为________.

解　所给幂级数为不缺项情形, $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$, 因此,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{2} = \rho$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

本题正确答案应填 2.

注　本题考查幂级数的收敛半径求法.

例 10　(9416)　设向量 $a = i + 3j - 2k$, $b = 2i + 6j + lk$, 则当向量 a 与 b 垂直时, $l =$ ________.

解　由于 $a = \{1, 3, -2\}$, $b = \{2, 6, l\}$, 而 $a \perp b$　$a \cdot b = 0$, 则

$$a \cdot b = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + (-2) \cdot l = 20 - 2l = 0,$$

得

$$l = 10.$$

本题正确答案应填 10.

注　本题考查两个向量垂直的充分必要条件.

例 11　(0114)　微分方程 $e^{x-y}\frac{dy}{dx} = 1$ 的通解为________.

解　所给微分方程为可分离变量方程.

变量分离:
$$e^{-y}dy = e^{-x}dx,$$

两端积分:
$$\int e^{-y}dy = \int e^{-x}dx,$$

得到
$$-e^{-y} = -e^{-x} + C_1,$$

即
$$e^{-y} = e^{-x} + C \quad (\text{或 } y = -\ln(e^{-x} + C))$$

为所求通解.

本题正确答案应填 $e^{-y} = e^{-x} + C$ 或 $y = -\ln(e^{-x} + C)$.

注　本题考查可分离变量微分方程的求解方法.

3. 解答题考查要求

解答题历来是考试的重点, 题多分重, 覆盖范围广, 它几乎包含了大纲中所有的重要知识点. 与选择题、填空题不同的是: 解答题需要详细的计算过程, 严密的逻辑推理. 对考生的知识要求较高. 但是综观近些年的考题, 解答题属于中等难度或中等偏上难度的题. 它的考查要求是: 理解重要公式、定理, 掌握一些基本方法, 准确计算出最终答案. 结合近些年真题, 举例说明.

例 1　(9816)　求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x$.

解　本题考查知识点: 重要极限公式 $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-1)} = e^{-1}.$$

例 2 (9919) **设函数** $y = x^{\cos x}$, **求** y'.

解 本题考查知识点: 利用对数求导法求幂指函数的导数. **对** $y = x^{\cos x}$ **两边取对数, 得**

$$\ln y = \cos x \ln x, \quad \frac{1}{y}y' = -\sin x \ln x + \frac{1}{x}\cos x,$$

$$y' = x^{\cos x}\left(\frac{1}{x}\cos x - \sin x \cdot \ln x\right).$$

例 3 (0119) **求** $\int x\sin 3x\,dx$.

解 本题考查知识点: 分部积分法. **令** $u = x, v' = \sin 3x$, **则** $u' = 1, v = -\frac{1}{3}\cos 3x$.

$$\int x\sin 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos x + \int \frac{1}{3}\cos 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

例 4 已知 xe^x **为** $f(x)$ **的一个原函数, 求** $\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

本题考查知识点: (1) **原函数的概念;** (2) **定积分的分部积分法.**

解法一 $\int_0^1 xf'(x)\,dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$, **又** $f(x) = (xe^x)' = e^x(1+x)$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = xe^x\Big|_0^1 = e,$$

故

$$\int_0^1 xf'(x)\,dx = (x^2+x)e^x\Big|_0^1 - e = e.$$

解法二 由 $f(x) = (xe^x)' = e^x(1+x)$, $f'(x) = e^x(2+x)$, **故**

$$\int_0^1 xf'(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+2x)e^x\,dx = \int_0^1 (x^2+2x)\,de^x$$

$$= (x^2+2x)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x(x+1)\,dx$$

$$= 3e - 2e^x(x+1)\Big|_0^1 + \int_0^1 2e^x\,dx = e.$$

例 5 (9922) **设二元函数** $z = \tan(xy^2)$, **求** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

本题考查知识点: 链式法则求复合函数偏导数.

解法一 由链式法则:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cdot \sec^2(xy^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sec^2(xy^2).$$

解法二 设 $u = xy^2$, **则** $z = \tan u$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \sec^2 u \cdot y^2 = y^2\sec^2(xy^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = \sec^2 u \cdot 2xy = 2xy\sec^2(xy^2).$$

例 6 (9924) **计算二重积分** $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, **其中区域** D **是由** $x^2+y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ **所确定的平面区域.**

本题考查知识点: 二重积分的计算.

解法一　用极坐标计算，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，$D$：$0\le r\le 2$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，则

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r\cos\theta\cdot r\,dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos\theta\cdot r^3\Big|_0^2 d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{8}{3}.$$

解法二　用直角坐标计算，先对 y 积分，后对 x 积分.

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}x\,dy=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

解法三　用直角坐标计算，先对 x 积分，后对 y 积分.

$$\iint_D x\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(4-y^2)\,dy=\frac{8}{3}.$$

例 7　(9817)　已知直线 L：$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$，若平面 π 过点 $M(2,1,-5)$ 且与 L 垂直，求平面 π 的方程.

解　本题考查知识点：平面的点法式方程. 由题意可知：平面 π 的法向量 $n=\{3,2,-1\}$.

由点法式可知，过点 $M(2,1,-5)$ 且与 L 垂直的平面 π 的方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z+5)=0,$$

即

$$3x+2y-z-13=0.$$

例 8　(9427)　把函数 $f(x)=\frac{1}{6-x}$ 展开为 $x-2$ 的幂级数，并写出幂级数的收敛区间.

解　本题考查知识点：将函数展开为幂级数. 这一考点为考生的薄弱环节，考生应引起高度重视.

利用间接法将 $f(x)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数：

$$f(x)=\frac{1}{6-x}=\frac{1}{4-(x-2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-2}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}(x-2)^n.$$

由 $\left|\frac{x-2}{4}\right|<1$，解得收敛区间为 $(-2,6)$.

例 9　(9923)　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$ 的收敛性(即何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散)，其中常数 $a\ge 0$.

解　本题考查知识点：绝对收敛，条件收敛. 本题得分率特别低，许多考生无从下手，不知如何讨论.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$ 为交错级数，$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$，$|u_n|=\frac{1}{n^a}$.

当 $a>1$ 时, 由 p 级数可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$ 绝对收敛.

当 $0<a\leq 1$ 时, 由 p 级数可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 若记 $u_n=\frac{1}{n^a}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 且由莱布尼兹准则可知当 $0<a\leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^a}$ 条件收敛.

当 $a=0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, 发散.

例 10 (0025) 设 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{t^2}dt+\int_x^1 e^{-t^2}dt$, 求 $F'(x)$.

解 本题考查知识点: 可变上(下)限积分的求导, 考生得分率不高.

利用可变上(下)限积分求导公式有:

$$F'(x)=e^{(x^2)^2}\cdot(x^2)'-e^{-x^2}=2xe^{x^4}-e^{-x^2}.$$

考生普遍错误为 $\left[\int_0^{x^2}e^{t^2}dt\right]'=e^{(x^2)^2}=e^{x^4}$.

例 11 (9528) 求微分方程 $y''+3y'=3x$ 的通解.

本题考查知识点为: 二阶常系数非齐次微分方程的通解的求法.

解法一 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda=0,$$

特征根为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-3$, 则对应齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-3x}.$$

设原方程的特解为 $y=x(ax+b)$, 则

$$y'=2ax+b,\quad y''=2a.$$

把 y, y', y'' 代入原方程得

$$2a+6ax+3b=3x.$$

故 $\begin{cases}2a+3b=0,\\6a=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1/2,\\b=-1/3.\end{cases}$

于是特解为 $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}$.

故方程的通解为

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+C_1+C_2e^{-3x}\quad(\text{其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

解法二 化为一阶线性方程. 令 $y'=u$, $y''=u'$, 则所给方程化为

$$u'+3u=3x.$$

此方程为一阶线性方程, $p(x)=3$, $q(x)=3x$, 故通解为

$$u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_0\right]=e^{-3x}\left[\int 3xe^{3x}dx+C_0\right]$$

$$=e^{-3x}\left[\int xde^{3x}+C_0\right]=e^{-3x}\left[xe^{3x}-\int e^{3x}dx+C_0\right]$$

$$=x-\frac{1}{3}+C_0e^{-3x}.$$

由 $y' = u$ 知

$$y = \int u(x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + C_1 e^{-3x} + C_2$$

即为原方程的通解.

(二) 各种题型解题技巧

1. 选择题解题技巧

例 1 (9901) 设 $f(x) = \frac{1-\cos^3 x}{x^2}$. 当 $x \neq 0$ 时, $F(x) = f(x)$. 若 $F(x)$ 在点 $x = 0$ 连续, 则 $F(0)$ 等于 [ ].

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

解 此题考查函数连续的概念. 由于 $F(x)$ 在点 $x = 0$ 连续, 所以

$$F(0) = \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$$

故应选 C.

例 2 (9607) 设 $f(x)$ 为连续函数, 则积分 $\int_{\frac{1}{n}}^{n} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) f\left(t + \frac{1}{t}\right) dt$ 等于 [ ].

A. 0 B. 1 C. n D. $\frac{1}{n}$

解 此题考查函数的性质: 若 $f(x)$ 连续, 则 $\int_a^a f(x)dx = 0$.

令 $t + \frac{1}{t} = u$, 则

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) f\left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \int_{n+\frac{1}{n}}^{n+\frac{1}{n}} f(u)du = 0.$$

故应选 A.

例 3 (9709) 下列级数中为条件收敛的级数是 [ ].

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

解 此题考查的是级数条件收敛的判别法则.

由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty \neq 0$, 故 A, B 排除, 而对于选项 C, 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛, 从而排除 C, 只剩下选项 D. 故应选 D. 下面验证一下选项 D. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

为 $p = \frac{1}{2}$ 的 p 级数, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 而由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛, 故

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$的确条件收敛.

例 4 (9905) 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 在$[a,b]$内可导, 则 [ ].

A. 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$

B. 当 $\xi\in(a,b)$时, 必有 $f'(\xi)=0$

C. 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

D. 当 $\xi\in(a,b)$时, 必有 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

解 此题考查考生对几个中值定理的满足条件. 而选项 C 就是拉格朗日中值定理, 应选 C.

例 5 (9803) 设有单位向量 a^0, 它同时与 $b=3i+j+4k$ 及 $c=i+k$ 垂直, 则 a^0 为 [ ].

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j-\frac{1}{\sqrt{3}}k$　　B. $i+j-k$

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}i-\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k$　　D. $i-j+k$

解 由于 a^0 与 $c=i+k$ 垂直, 故 a^0 在 i 与 k 的坐标系数值相同, 符号相反. 故排除 C, D. 又由于 a^0 为单位向量, 而 A, B 中只有 A 是单位向量, 从而无须判断 a^0 是否与 $3i+j+4k$ 垂直就可直接选 A.

例 6 (9704) 曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$ [ ].

A. 仅有水平渐近线　　B. 既有水平渐近线, 又有垂直渐近线

C. 仅有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线, 又无垂直渐近线

解 此题只需分别验证曲线有水平渐近线而无垂直渐近线存在的判别法则. 由于 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$, 以及当 $a\neq0$ 时, $\lim\limits_{x\to a}x\sin\frac{1}{x}=a\sin\frac{1}{a}\neq\infty$, 故无垂直渐近线, 而

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

于是曲线有水平渐近线 $y=1$. 于是应选 A.

例 7 (9505) 设 $f(x)$是连续函数, 则 $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(a+b-x)dx$ 等于 [ ].

A. 0　　B. 1　　C. $a+b$　　D. $\int_a^b f(x)dx$

解 显然对于一般的 $f(x)$, 不能保证 $\int_a^b f(a+b-x)dx$ 恒为 0, 故 D 可排除. 而当 $a=b$ 时,

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(a+b-x)dx=0,$$

则排除 B, C, 从而应选 A.

例 8 设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$, 则 $x=1$ 为 $f(x)$在$[-2,2]$上的 [ ].

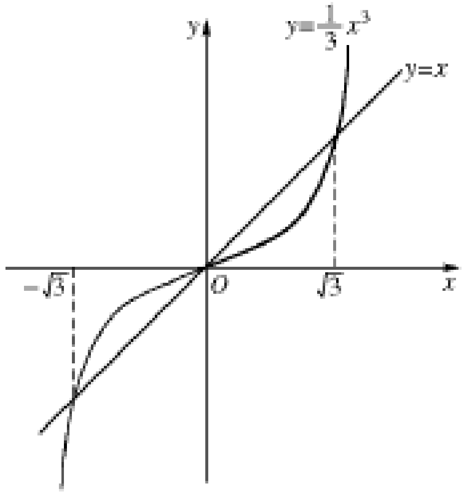
A. 极小值点, 但不是最小值点　　B. 极小值点, 也是最小值点

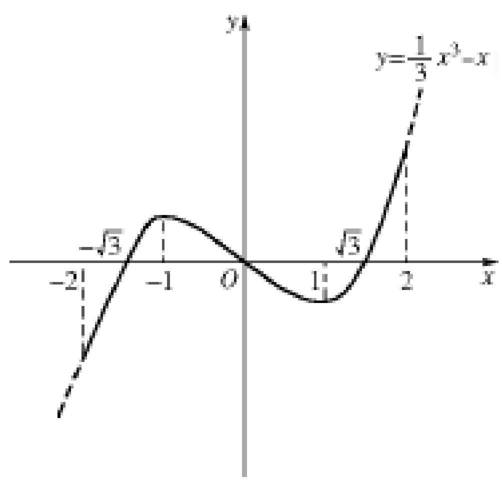
C. 极大值点,但不是最大值点　　　　　　D. 极大值点,也是最大值点

解　由左下图可以作出 $f(x)$ 的草图如右下图,在 $[0,2]$ 之间只有惟一的驻点,检验 $f'(1) = (x^2-1)|_1 = 0$,故 1 为极小值点,看它是否为最小值点,于是只需比较一下 $f(1)$ 与 $f(-2)$ 的大小. 因为

$$f(1) = -\frac{2}{3},\quad f(-2) = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3},$$

1 为最小值点,从而选 B.





2. 填空题解题技巧

技巧从方法中来. 从对历年考题的观察中看,填空题覆盖了高等数学的方方面面,这就要求我们理解基本概念,熟练运用基本的解题思路与思考方法.

填空题共 10 题,每题 4 分. 填空题要想做对,则解题思路、计算过程、得出结论每一步都要准确无误,因此,填空题对我们计算的准确性要求是很高的. 考查要点在本书各章节有详述,在此,我们简单提几点做填空题应注意的问题.

(1) 紧扣要点,目的明确. 每个填空题考查的知识点是相当明确的,我们要善于分析,明确考查知识点,再根据相关定义、定理解题,这是一般的正确的思路.

例 1　(9913)　二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为________.

分析　对于二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + py' + qy = 0$,其特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$,若 r_1, r_2 为其两个特征根,则有

① 当 $r_1 \neq r_2$ 为两个不相等的实特征根时,方程通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$;

② 当 $r_1 = r_2$ 为两个相等的实特征根时,方程通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{r_1x}$;

③ 当 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 为一对共轭复根时,方程通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$,以上 C_1, C_2 均为任意常数.

显然,本题要考查的就是求二阶常系数线性齐次微分方程的通解,我们的解题思路就有了:先求特征根,再写通解.

解　$y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$,特征根 $r_1 = 1, r_2 = -2, r_1 \neq r_2$,故通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$(C_1, C_2 为任意常数).

例 2　函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 的极大值为________.

分析　本题属于求函数的极值问题. 我们知道了求函数 $f(x)$ 的极值点与极值点的一般思

路:

① 求出导数 $f'(x)$;

② 求 $f(x)$ 的全部驻点,即 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点;

③ 观察 $f'(x)$ 在每个驻点及导数不存在点的左右邻近的符号,根据第一种充分条件判定驻点或导数不存在的点是否为极值点,如果是,是极大值点还是极小值点;

④ 求出各极值点的函数值,便得到 $f(x)$ 全部极大值和极小值.

或者,我们用下列方法:

① 求出一、二阶导数 $f'(x)$, $f''(x)$;

② 求 $f(x)$ 的全部驻点(如果有 $f'(x)$ 不存在的点,仍用上法);

③ 观察每个驻点处 $f''(x)$ 的符号,根据第二种充分条件判定该驻点是极大值点还是极小值点,如果在驻点处 $f''(x)=0$,仍用上法;

④ 求出极值点处的函数值,即得函数的全部极大值和极小值.

解　按第二种思路求解.

① $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $f''(x)=\dfrac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}$;

② 令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=-1$, $x=1$;

③ $f''(-1)=\dfrac{1}{2}>0$, $f(x)$ 在 $x=-1$ 取得极小值, $f''(1)=-\dfrac{1}{2}<0$,故 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极大值;

④ 求出 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 按部就班,随机应变.

例 3　(0015)　设区域 D 由 $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$ 确定,则 $\iint\limits_D x(y-x)\,dx\,dy=$ ________.

将二重积分化为二次积分计算.

解法一　化为先对 y 积分,再对 x 积分.

$$\iint\limits_D x(y-x)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}x(y-x)\,dy=\int_{-1}^{1}x\left[\frac{y^2}{2}-xy\right]\Bigg|_{-1}^{1}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}2x^2\,dx=-\frac{4}{3}.$$

解法二　化为先对 x 积分,再对 y 积分.

$$\iint\limits_D x(y-x)\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{1}x(y-x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_{-1}^{1}dy$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}\,dy=-\frac{4}{3}.$$

解法三　我们观察发现,积分区域 D 关于 y 轴对称,又 xy 为 x 的奇函数, x^2 为 x 的偶函数,由二重积分的对称性质得

$$\iint\limits_D x(y-x)\,dx\,dy=\iint\limits_D xy\,dx\,dy-\iint\limits_D x^2\,dx\,dy=-\iint\limits_D x^2\,dx\,dy$$

$$=-\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}x^2\,dy=-\frac{4}{3}.$$