高等职业教育教材

# 高 等 数 学

## 下 册

滕桂兰　郭洪芝　郑光华　韩庆奎　编

天 津 大 学 出 版 社

## 内 容 提 要

本书是参照全国大学专科理工类教学大纲并考虑到高等职业大专的特点编写的.

全书分上、下两册,共 12 章,下册内容为:向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,无穷级数,微分方程,行列式与矩阵.

本书每节后配有一定数量的习题,每章后配有练习题及练习题、习题的答案或提示.

本书可作为大学专科、高等职业教育专科及高等函授大学、夜大学、职工大学、高等教育自学考试专科生的教材,也可供工程技术人员自学使用.

# 前　　言

高等职业教育教材《高等数学》(上、下册)是参照全国大学专科理工类高等数学教学大纲,并考虑到高等职业教育专科特点而编写的.

本书可作为大学专科、高等职业教育、高等教育自学考试、函授或夜大专科、成人脱产大专班等理工类的教材.

在编写本书时力求做到条理清楚、通俗易懂,注意把基本内容写清楚、透彻,概念准确,重点突出.

考虑到教学及学生自学的需要,本书各节都配有一定数量的习题,每章都配有较大量的练习题,并附有解答或提示.这些习题可以帮助学生加深对基本内容的理解,加强对学生的基本运算能力的训练,提高学生分析、解决问题的能力,逐步培养学生的自学能力.

书中标有 * 号的章节,可供有关专业选用.

全书分为上、下两册,共 12 章.

本书在编写过程中得到天津大学出版社的大力支持,在此表示诚挚的感谢.王升瑞、陈美英、胡克、戴一明等同志也为本书的出版做了不少工作.

本书难免存在缺点与不足,欢迎读者批评指正.

编　者

2001 年 1 月于天津大学

# 目　　录

## 第 8 章　向量代数与空间解析几何



## 第 9 章　多元函数微积分



## 第 10 章　无穷级数

## 第 11 章　微分方程



## 第 12 章　行列式与矩阵

# 第 8 章　向量代数与空间解析几何

本章将讨论向量、向量的运算及空间的平面与直线方程，最后介绍几种常用的二次曲面与空间曲线.

## 8.1　空间直角坐标系

在空间中过定点 $O$ 作三条互相垂直且有相同长度单位的数轴 $Ox$，$Oy$，$Oz$，分别称为 $x$ 轴（横轴），$y$ 轴（纵轴），$z$ 轴（竖轴），统称为坐标轴. 习惯上，把 $x$ 轴、$y$ 轴放置在水平面上，它们的正方向按右手系规则确定（即用右手握住 $z$ 轴，如果伸开右手，且使四指指向 $x$ 轴的正向，然后以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 $y$ 轴正向，则拇指所指的方向就是 $z$ 轴的正向）（图 8-1），点 $O$ 称为坐标原点. 这样就构成了空间直角坐标系.

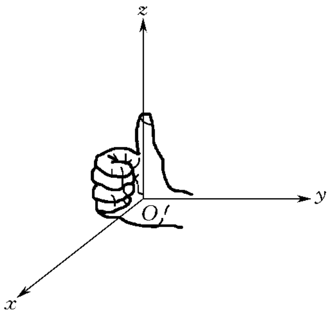

图 8-1

任意两个坐标轴确定一个平面，称为坐标面，它们是 $xOy$，$yOz$，$zOx$ 坐标面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，共有八个卦限，其顺序如图 8-2 所示.

建立了空间直角坐标系后，就可以确定空间一点 $M$ 与有序数组 $(x, y, z)$ 之间的对应关系.

设点 $M$ 为空间内任一点，过点 $M$ 做三个平面分别垂直三个坐标轴且与坐标轴相交于点 $P$，$Q$，$R$，设点 $P$，$Q$，$R$ 在 $x$ 轴，$y$ 轴，

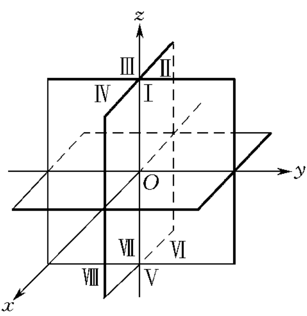


图 8-2

$z$ 轴上的坐标分别为 $x,y,z$，这样空间内任一点 $M$ 和一组有序实数 $x,y,z$ 对应；反之，设 $x,y,z$ 是一组有序实数，则可在 $x$ 轴取定坐标为 $x$ 的点 $P$，在 $y$ 轴取定坐标为 $y$ 的点 $Q$，在 $z$ 轴取定坐标为 $z$ 的点 $R$，过点 $P,Q,R$ 分别做平面与 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴垂直，它们相交于惟一的一点 $M$，这样任一组有序实数 $x,y,z$ 就惟一地确定了空间一点 $M$. 因此取定坐标系以后，就建立起空间的点 $M$ 和一组有序实数 $x,y,z$ 之间的一一对应关系，称 $x,y,z$ 为点 $M$ 的坐标，记作 $M(x,y,z)$，其中 $x$ 为点 $M$ 的横坐标，$y$ 为纵坐标，$z$ 为竖坐标.

设有空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，现在求这两点间的距离 $d$.

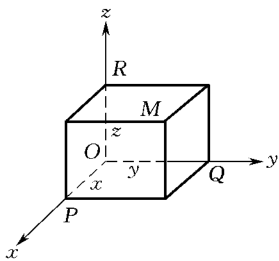


图 8-3

设点 $M_1,M_2$ 在 $xOy$ 坐标面上的垂足分别为点 $P_1,P_2$，过点 $M_1$ 作 $M_1N$ 平行于 $P_1P_2$（图 8-4），由于□ $M_1NM_2$ 是直角三角形，且 $\angle M_1NM_2=\dfrac{\pi}{2}$，故由勾股定理得

$$d=\sqrt{|M_1N|^2+|NM_2|^2}=\sqrt{|P_1P_2|^2+|NM_2|^2},$$

其中，$|P_1P_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，而

$$|NM_2|=|P_2M_2|-|P_2N|=|z_2-z_1|,$$

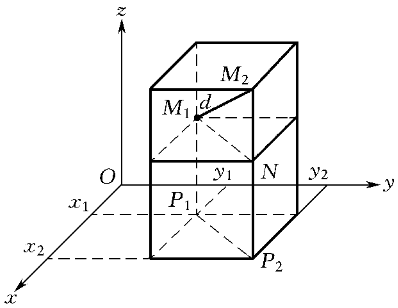


图 8-4

故 $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例如,点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

**例 1** 已知两点 $M_1(-1,0,2)$,$M_2(1,-1,0)$,求这两点间的距离 $d$.

**解** 由两点间的距离公式,得

$$d=\sqrt{(1+1)^2+(-1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+1+4}=3.$$

**例 2** 在 $y$ 轴上求与点 $M_1(-2,0,3)$,$M_2(3,-2,\sqrt{3})$ 等距离的点.

**解** 设所求点为 $M(0,y,0)$,由条件 $|M_1M|=|M_2M|$,有

$$\sqrt{(0+2)^2+(y-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(y+2)^2+(0-\sqrt{3})^2},$$

即 $$\sqrt{4+y^2+9}=\sqrt{9+(y+2)^2+3},$$

两端平方得 $4y=-3$,所以 $y=-\dfrac{3}{4}$.

故所求点为 $\left(0,-\dfrac{3}{4},0\right)$.

**例 3** 证明三点 $A(-1,1,2)$,$B(0,-1,0)$,$C(1,3,1)$ 的连线

所围成的三角形为等腰直角三角形.

**解** $|AB|=\sqrt{(0+1)^2+(-1-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=3,$

$$|AC|=\sqrt{(1+1)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{4+4+1}=3,$$

$$|BC|=\sqrt{(1-0)^2+(3+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18},$$

且 $$|AB|^2+|AC|^2=9+9=18, |BC|^2=18,$$

即 $$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2.$$

故连结三点 $A,B,C$ 所围成的三角形为等腰直角三角形.

### 习题 8-1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点在哪个卦限:$A(1,-2,3)$,$B(4,1,-1)$,$C(-1,-2,-3)$,$D(2,-4,-1)$.

2. $xOy$,$yOz$,$zOx$ 坐标面上的点的坐标有什么特点.

3. $x$,$y$,$z$ 轴上的点的坐标有什么特点.

4. 求下列两点之间的距离:

(1) $(0,0,0)$,$(4,2,3)$;

(2) $(-2,4,-3)$,$(0,0,0)$;

(3) $(-1,2,-1)$,$(2,-4,1)$.

5. 在 $z$ 轴上求与两点 $A(3,1,2)$ 和 $B(2,0,0)$ 等距离的点.

6. 证明以点 $A(2,3,4)$,$B(3,4,2)$,$C(4,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等边三角形.

## 8.2 向量代数

### 8.2.1 向量的基本概念

实际问题中所遇到的量分为两种:一种量只有大小,如时间、温度、距离等,称为数量;另一种量不仅有大小还有方向,如位移、力、速度等,称为向量.

向量的几何表示:向量可用有向线段表示(如图 8-5),有向线段的长度表示向量的大小,称为向量的模,其方向表示向量的方

向.如起点为 $A$,终点为 $B$ 的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$,它的模记为$|\overrightarrow{AB}|$,方向由 $A$ 到 $B$.有时也用带箭头的字母或黑体字母表示,如$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$,…,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$,….

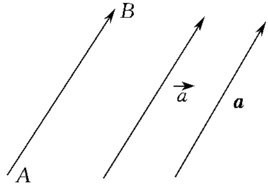

图 8-5

我们这里讨论的向量与起点无关,在保持长度和方向不变的条件下可以自由平移,这种向量称为自由向量.我们把方向相同或相反的两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 称为平行向量,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;把模相等且方向相同的两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,称为相等向量,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;把与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等但方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$ 的逆向量,记为 $-\boldsymbol{a}$;把模等于 1 的向量称为单位向量;把模等于零的向量称为零向量,记为 $\boldsymbol{o}$,零向量的方向任意.

## 8.2.2　向量的加、减法及与数的乘法

### 8.2.2.1　向量的加法

向量$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$的和是以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线即向量$\overrightarrow{OC}$,记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$

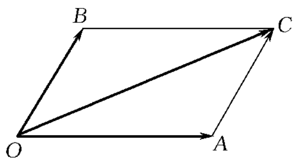

图 8-6

这种用平行四边形对角线求两向量和的方法称为平行四边形法则.

由图 8-6 可知,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$,所以又有$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$,即以第一个向量的终点为起点,做第二个向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$,连接 $OC$,则$\overrightarrow{OC}$就是$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的和,并称这种求和方法为三角形法则(图 8-6).该法则可以推广到多个向量的求和,例如求向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 的和时,可将它们平行移动,使其首尾相接,然后

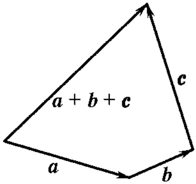


图 8-7

以第一个向量的起点为起点，以最后一个向量的终点为终点做向量即为 $a,b,c$ 三向量的和，如图 8-7.

向量加法满足如下运算规律：

(1) $a+b=b+a$（交换律）；

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$（结合律）；

(3) $a+o=a$；

(4) $a+(-a)=o$.

8.2.2.2　向量的减法

向量的减法可作为加法的逆运算. 如果 $b+c=a$，则 $c=a-b$. 将 $a$ 与 $b$ 平移使它们的起点重合，则由 $b$ 的终点到 $a$ 的终点作一向量就是 $a-b$（图 8-8）.

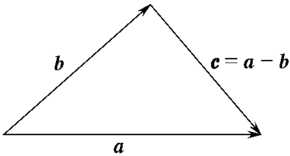


图 8-8

8.2.2.3　数与向量的乘积

数量 $\lambda$ 与向量 $a$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda a$，它的模 $|\lambda a|=|\lambda||a|$，方向是：当 $\lambda>0$ 时与 $a$ 同向；当 $\lambda<0$ 时与 $a$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda a$ 为零向量.

数与向量的乘法满足如下的运算规律（$\lambda,\mu$ 为实数）：

(1) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$（结合律）；

(2) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$（对数量的分配律）；

(3) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$（对向量的分配律）.

把与 $a$ 同向且模为 1 的向量称为 $a$ 的单位向量，记为 $a^o$，显然有 $a^o=\dfrac{a}{|a|}$，或 $a=|a|a^o$.

8.2.2.4　向量在轴上的投影

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 $L$ 正向间的夹角为 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称

$|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$为向量$\overrightarrow{AB}$在 $L$ 轴上的投影(图 8-9),记作 $\mathrm{Prj}_L\,\overrightarrow{AB}$,即

$$\mathrm{Prj}_L\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta.$$

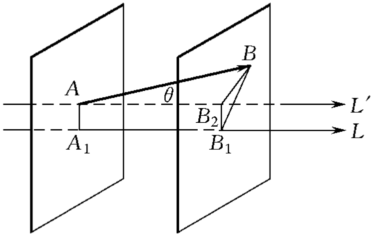


图 8-9

显然向量在轴上的投影是一个数量.当 $\theta$ 为锐角时,投影为正;当 $\theta$ 为钝角时,投影为负;当 $\theta$ 为直角时,投影为 0.

**8.2.2.5 向量的坐标表示法**

在空间直角坐标系的三个坐标轴上分别取与坐标轴同方向的单位向量,记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 或$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,称为基本单位向量.对于空间内任一个向量,将其平移使起点落在原点 $O$,终点为 $M$,则$\overrightarrow{OM}$可用$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示出来.

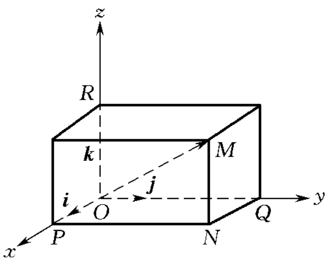


图 8-10

设点 $M$ 的坐标为$(x,y,z)$,过 $M$ 点做三个平面分别垂直于三个坐标轴且与坐标轴交于点 $P,Q,R$(图 8-10),得到$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影分别为 $OP,OQ,OR$,且

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

由向量的加法得到向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示,即

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

即 $$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=\{x,y,z\}.$$

有序实数 $\{x,y,z\}$ 称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标,$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的分向量.

由两点距离公式得向量$\overrightarrow{OM}$的模

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

我们用$\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma$ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 确定$\overrightarrow{OM}$的方向,称 $\alpha,\beta,\gamma$ 为$\overrightarrow{OM}$的方向角(图 8-11),称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为$\overrightarrow{OM}$的方向余弦. 由图 8-11 可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

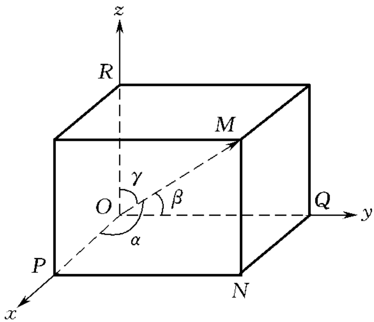


图 8-11

直接计算可得 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

设 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}^o=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i}+\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j}+\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k}$$

$$=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

设　$\overrightarrow{OM}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{ON}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，

则

$$\overrightarrow{OM}\pm\overrightarrow{ON}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$$
$$=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k}.$$
$$\lambda\overrightarrow{OM}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_2\boldsymbol{k}.$$

由上可知，向量的加、减及与数的乘积，只需对向量的各个坐标分别进行加、减及与数进行乘积运算就可以了.

**例 1**　设两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

**解**　$\overrightarrow{OA}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，

则由图 8-12，得

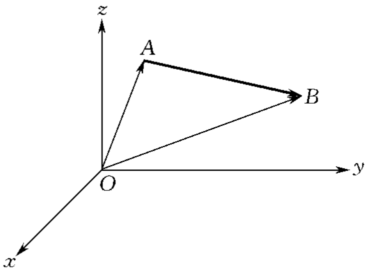


图 8-12

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

或　$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

向量的坐标也称为向量在坐标轴上的投影.

**例 2**　设给定两点 $A(-1,0,2\sqrt{2})$，$B(0,-1,\sqrt{2})$，求$\overrightarrow{AB}$的方向余弦、方向角和$(\overrightarrow{AB})^o$.

**解**　$\overrightarrow{AB}=\{0+1,-1-0,\sqrt{2}-2\sqrt{2}\}=\{1,-1,-\sqrt{2}\}$，

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=2.$$

所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}, \cos\beta=-\frac{1}{2}, \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$为$\overrightarrow{AB}$的方向余弦.

方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{2}{3}\pi, \cos\gamma=\frac{3}{4}\pi$.

$$(\overrightarrow{AB})^o=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

**例 3** 已知向量 $a$ 的方向余弦 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}, \cos\gamma=\frac{1}{2}$，且 $a$ 与 $y$ 轴夹角为钝角，求 $\cos\beta$.

**解** 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得 $\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，

所以 $\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\beta$ 为钝角，故 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

### 8.2.2.6 两向量的数量积

**1. 定义**

两个非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的数量积等于这两个向量的模和它们间夹角余弦的乘积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

这里$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角，且 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$.

零向量与任何向量的数量积定义为 0.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{o}$ 时，由于$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量$\boldsymbol{a}$ 方向上的投影，从而有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}.$$

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{o}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

由此又可以推出

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^o\cdot\boldsymbol{b}, \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^o\cdot\boldsymbol{a}.$$

**2. 数量积满足下列运算规律**

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换率）；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$（分配率）；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$（结合率）.

显然有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$，且可得到以下结论.

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直（记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$）的充分必要条件为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

证　如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0.$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，而 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，只有 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，而 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$，于是有 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由此可得到 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}})=1\times 1\times\cos 0=1$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

**3. 数量积的坐标表示式**

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+x_1y_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+x_1z_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+y_1x_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+y_1z_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+z_1x_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+z_1y_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+z_1z_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

由此可得上述两非零向量垂直的充分必要条件又可表示为

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，可得两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角余弦

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

**例 4** 已知三点 $A(1,0,1)$，$B(2,1,1)$，$C(0,0,0)$，求$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.

**解** $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times0+0\times(-1)=-1$.

故

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}.$$

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{2}{3}\pi.$$

**例 5** 设 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,-1\}$，问 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否互相垂直？

**解** 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+(-1)\times(-1)+3\times(-1)=2+1-3=0$，知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直.

### 8.2.2.7 两向量的向量积(叉积)

**1. 定义**

两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{c}$ 的模：$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\quad(0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi)$.

$\boldsymbol{c}$ 的方向：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}$ 垂直 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成右手系(即若右手食指指向 $\boldsymbol{a}$，中指指向 $\boldsymbol{b}$，则拇指指向 $\boldsymbol{c}$，图 8-13).

**2. 向量积满足下列运算规律：**

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 模相等，方向相反)；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$(结合率)；

(3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$(分配率).

由向量积的定义得，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相平行的充要条