

全国高职、高专教育高等数学系列教材

# 高等数学

(下 册)

主 编 刘书田

副主编 胡显佑 高旅端

编著者 刘书田 侯明华

北京 大学 出版 社

· 北 京 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/刘书田,侯明华编著.-北京:北京大学出版社,2002.1

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05329-0

.高... .刘... 侯... .高等数学-高等学校:技术  
学校-教材 .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 082711 号

书 名: 高等数学(下册)

著作责任者: 刘书田 侯明华 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05329-0/O · 0518

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62752021

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850× 1168 32 开本 8.5 印张 200 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 8 月第 2 次印刷

印 数: 8001- 13000 册

定 价: 12.00 元

## 内 容 简 介

本书是全国高等职业、高等专科学校教育“高等数学”基础课教材。本书依照教育部颁布的高职、高专“高等数学”教学大纲，并结合作者多年来为经济类、管理类和工科类高职、高专学生讲授“高等数学”课所积累的教学经验编写而成。全书分上、下两册，供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用。上册共分五章，内容包括函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用；下册共分四章，内容包括微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数。书中加“\*”号的内容，对非工科类学生不讲授，仅对工科类学生讲授，有的内容任课教师可酌情选用。每章按节配置足够数量的习题，书末附有较详细的提示或解答。

本书作者长期为高职、高专学生讲授“高等数学”课，深知高职、高专学生在学习高等数学内容时的疑难与困惑，因此本书能针对学生的接受能力和理解程度，并结合大纲要求讲述“高等数学”课的基本内容，叙述通俗易懂、例题丰富、图形直观、富有启发性，便于自学，注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养。

本书可作为高等职业、高等专科学校经济类、管理类和工科类学生“高等数学”课的教材，也可作为参加自学考试、文凭考试（仅用本书上册）、职大师生讲授或学习“高等数学”课程的教材或教学参考书。对数学爱好者本书也是较好的自学教材。

# 高职、高专教育高等数学系列 教材出版委员会

主任: 刘 林

副主任: 关淑娟

委员(以姓氏笔画为序):

刘 林	刘书田	刘雪梅	田培源
关淑娟	林洁梅	周惠芳	胡显佑
赵佳因	侯明华	高旅端	

## 全国高职、高专教育高等数学系列教材

高等数学(上册)	刘书田等编著	定价 17.00 元
高等数学(下册)	刘书田等编著	定价 12.00 元
高等数学学习辅导(上册)	刘书田等编著	定价 13.00 元
高等数学学习辅导(下册)	刘书田等编著	定价 11.00 元
线性代数	胡显佑等编著	定价 9.00 元
线性代数学习辅导	胡显佑等编著	定价 9.00 元
概率统计	高旅端等编著	定价 12.00 元
概率统计学习辅导	高旅端等编著	定价 10.00 元

# 前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲,为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材.本套书分为教材三个分册:《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》;配套辅导教材三个分册:《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》,总共6分册.需要向任课老师和读者说明的是,《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用,上册约讲授64~68学时,下册约讲授32~36学时.书中加“\*”号的内容,对非工科类学生可不讲授,仅对工科类学生讲授,这些内容任课教师也可酌情选用.《线性代数》讲授30~32学时,《概率统计》讲授36~40学时.以上建议仅供授课老师参考.

编写本套系列教材的宗旨是:以提高高等职业教育教学质量为指导思想,以培养高素质应用型人才为总目标,力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此,我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求,在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用.本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣教学大纲,慎重选择教材内容.既考虑到高等数学本学科的科学性,又能针对高职班学生的接收能力和理解程度,适当选取教材内容的深度和广度;既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义,以使教学内容形象、直观,便于学生理解和掌握,并

达到“学以致用”的目的。

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同.辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上,独立解题的能力.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编者

2001年5月于北京

# 目 录

第六章	微分方程.....	(1)
§ 6.1	微分方程的基本概念 .....	(1)
	习题 6.1 .....	(6)
§ 6.2	一阶微分方程 .....	(7)
	一、可分离变量的微分方程.....	(8)
	二、齐次微分方程 .....	(10)
	三、一阶线性微分方程.....	(13)
	习题 6.2 .....	(17)
§ 6.3	可降阶的二阶微分方程 .....	(19)
	一、 $y = f(x)$ 型微分方程 .....	(19)
	二、 $y = f(x, y)$ 型微分方程 .....	(20)
	习题 6.3 .....	(21)
§ 6.4	二阶常系数线性微分方程.....	(22)
	一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法 .....	(22)
	二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法 .....	(26)
	习题 6.4 .....	(35)
§ 6.5	微分方程应用举例 .....	(37)
	一、几何应用问题 .....	(37)
	* 二、物理应用问题 .....	(41)
	三、经济应用问题 .....	(46)
	习题 6.5 .....	(50)
第七章	向量代数与空间解析几何 .....	(52)
§ 7.1	空间直角坐标系 .....	(52)
	一、空间直角坐标系 .....	(52)
	二、两点间的距离 .....	(54)
	习题 7.1 .....	(55)

§ 7.2	向量代数	(55)
	一、向量及其表示	(55)
	二、向量的加、减法	(56)
	三、数与向量的乘积	(58)
	四、向量的坐标表示法	(59)
	五、向量的模与方向余弦的坐标表示式	(62)
	六、两向量的数量积	(64)
	七、两向量的向量积	(68)
	习题 7.2	(72)
§ 7.3	空间曲面与曲线	(74)
	一、曲面与方程	(74)
	二、柱面方程	(76)
	三、旋转曲面	(78)
	* 四、空间曲线	(79)
	五、几个常见的二次曲面	(81)
	* 六、曲线在坐标面上的投影	(84)
	习题 7.3	(85)
§ 7.4	平面及其方程	(86)
	一、平面的点法式方程	(86)
	二、平面的一般式方程	(88)
	三、平面外一点到平面的距离	(91)
	四、两平面间的夹角	(92)
	习题 7.4	(93)
§ 7.5	空间直线的方程	(95)
	一、直线的一般式方程	(95)
	二、直线的点向式方程	(95)
	三、直线的参数方程	(97)
	四、两直线的夹角	(98)
	五、直线与平面的夹角	(99)

	习题 7.5 .....	(101)
<b>第八章</b>	<b>多元函数微积分</b> .....	<b>(103)</b>
§ 8.1	多元函数的基本概念 .....	(103)
	一、平面区域 .....	(103)
	二、多元函数概念 .....	(105)
	三、二元函数的极限与连续性 .....	(108)
	习题 8.1 .....	(110)
§ 8.2	偏导数与全微分 .....	(111)
	一、偏导数 .....	(112)
	二、高阶偏导数 .....	(117)
	三、全微分 .....	(119)
	习题 8.2 .....	(122)
§ 8.3	复合函数与隐函数的微分法 .....	(123)
	一、复合函数的微分法 .....	(124)
	二、隐函数的微分法 .....	(130)
	习题 8.3 .....	(132)
§ 8.4	多元函数的极值 .....	(134)
	一、多元函数的极值 .....	(134)
	二、条件极值 .....	(140)
	习题 8.4 .....	(143)
§ 8.5	多元函数微分法在几何上的应用 .....	(145)
	一、空间曲线的切线与法平面 .....	(145)
	二、曲面的切平面与法线 .....	(148)
	习题 8.5 .....	(150)
§ 8.6	二重积分概念及其性质 .....	(151)
	一、两个实例 .....	(152)
	二、二重积分概念 .....	(155)
	三、二重积分的性质 .....	(156)
	习题 8.6 .....	(157)

§ 8.7	二重积分的计算与应用 .....	(158)
	一、在直角坐标系下计算二重积分 .....	(158)
	二、在极坐标系下计算二重积分 .....	(167)
	三、二重积分应用举例 .....	(172)
	习题 8.7 .....	(181)
<b>第九章</b>	<b>无穷级数</b> .....	(185)
§ 9.1	无穷级数概念及其性质 .....	(185)
	一、无穷级数概念 .....	(185)
	二、无穷级数的基本性质 .....	(190)
	习题 9.1 .....	(192)
§ 9.2	正项级数 .....	(194)
	一、收敛的基本定理 .....	(195)
	二、正项级数的收敛判别法 .....	(196)
	习题 9.2 .....	(200)
§ 9.3	任意项级数 .....	(201)
	一、交错级数 .....	(201)
	二、绝对收敛与条件收敛 .....	(203)
	习题 9.3 .....	(205)
§ 9.4	幂级数 .....	(205)
	一、函数项级数概念 .....	(205)
	二、幂级数 .....	(207)
	习题 9.4 .....	(213)
§ 9.5	函数的幂级数展开 .....	(214)
	一、泰勒级数 .....	(214)
	二、泰勒公式 .....	(217)
	三、函数的幂级数展开式 .....	(218)
	习题 9.5 .....	(223)
§ 9.6	傅里叶级数 .....	(224)
	一、三角函数系的正交性 .....	(224)

二、以 $2$ 为周期的函数的傅里叶级数 .....	( 225)
三、奇函数与偶函数的傅里叶级数 .....	( 229)
四、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数 .....	( 233)
习题 9.6 .....	( 235)
<b>习题参考答案与提示</b> .....	( 237)

## 第六章 微分方程

为了深入研究几何、物理、经济等许多实际问题,常常需要寻求问题中有关变量之间的函数关系.而这种函数关系往往不能直接得到,却只能根据这些学科中的某些基本原理,得到所求函数及其变化率之间的关系式,然后,再从这种关系式中解出所求函数.这种关系式就是微分方程.微分方程在自然科学、工程技术和经济学等领域中有着广泛的应用.

本章介绍微分方程的一些基本概念;讲述下列微分方程的解法:一阶微分方程中的常见类型、可降阶的二阶微分方程和二阶常系数线性微分方程.最后讲述微分方程应用例题.

### § 6.1 微分方程的基本概念

我们通过例题来说明微分方程的一些基本概念.

例1 一条曲线通过点(1, 2),且在该曲线上任意一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率都为 $3x^2$ ,求这条曲线的方程.

依题意,根据导数的几何意义,该问题是要求一个函数 $y = f(x)$ ,即曲线方程,使它满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad (6.1)$$

和已知条件:当 $x = 1$ 时, $y = 2$ .

本例中,需要寻求的曲线方程,即函数 $y = f(x)$ 是未知的,称为未知函数.关系式(6.1)是一个含有未知函数导数的方程,称为微分方程.未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程.我们只讨论常微分方程,以下简称为微分方程,也简称为方程.由于微

分方程(6.1)式中只含有未知函数的一阶导数,所以称为一阶微分方程.

未知函数的导数与自变量之间的关系式,即微分方程(6.1)式已列出.下面就要设法从微分方程中求出未知函数  $y = f(x)$ ,这就是“解微分方程”的问题.

将已得到的微分方程(6.1)式两端积分,得

$$y = x^3 + C, \quad (6.2)$$

其中  $C$  是任意常数.(6.2)式是一族函数.

在我们的问题中,还有一个已知条件:当  $x = 1$  时,  $y = 2$ .为了求得满足这个条件的函数,将  $x = 1, y = 2$  代入(6.2)式中,有

$$2 = 1^3 + C, \quad \text{即} \quad C = 1.$$

由此,得到了我们要求的未知函数,即曲线方程为

$$y = x^3 + 1.$$

若将函数  $y = x^3 + C$  代入微分方程(6.1)式,即对  $y = x^3 + C$  求导数,得  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ,代入(6.1)式的左端,显然微分方程(6.1)式就成为恒等式:

$$3x^2 = 3x^2.$$

这种能使微分方程成为恒等式的函数,称为微分方程(6.1)式的解.函数  $y = x^3 + C$  中含有一个任意常数  $C$ ,当  $C$  取不同的值时,将得到不同的函数,而这些函数都满足微分方程(6.1)式.

对于一阶微分方程(6.1)式,若其解中含有一个任意常数,则这个解称为微分方程的通解.函数  $y = x^3 + 1$  是当  $C$  取 1 的解,这个解称为微分方程(6.1)式的特解,即当通解中的任意常数  $C$  取某一特定值时的解,称为微分方程的特解.用来确定通解中的任意常数  $C$  取某一定值的条件,一般称为初始条件.容易想到,初始条件不同时,所确定的特解将不同.本例中的初始条件是:当  $x = 1$  时,  $y = 2$ ,或记作  $y|_{x=1} = 2$ .

例 2 一质量为  $m$  的物体受重力作用而下落,假设初始位置

和初始速度都为 0, 试确定该物体下落的距离  $S$  与时间  $t$  的函数关系.

该物体只受重力作用而下落, 重力加速度是  $g \text{ m/s}^2$ . 按二阶导数的物理意义, 若设下落距离  $S$  与时间  $t$  的函数关系为  $S = S(t)$ , 则有

$$\frac{d^2S}{dt^2} = g, \quad (6.3)$$

对上式两边积分, 得

$$\frac{dS}{dt} = gt + C_1. \quad (6.4)$$

按一阶导数的物理意义:  $\frac{dS}{dt} = v(t)$ , 其中  $v(t) = gt + C_1$  应是物体运动的速度, 其中  $C_1$  是任意常数.

对(6.4)式两边再积分, 得

$$S = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (6.5)$$

其中  $C_2$  也是任意常数. 显然(6.5)式给出了下落距离  $S$  与所经历的时间  $t$  的函数关系.

依题意, 初始位置和初始速度都为 0, 即

$$v(0) = \left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (6.6)$$

$$S(0) = S|_{t=0} = 0. \quad (6.7)$$

将(6.6)式代入(6.4)式, 可得  $C_1 = 0$ ; 再将(6.7)式代入(6.5)式, 可得  $C_2 = 0$ . 于是, 所求的  $S$  与  $t$  的函数关系, 即物体下落的运动方程为

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

在本例中, 需要求出的下落距离  $S$  与所经历的时间  $t$  的函数关系  $S = S(t)$  是未知函数; (6.3)式中含有未知函数的二阶导数, 称为二阶微分方程; 函数(6.5)式, 即函数

$$S = S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

满足微分方程(6.3)式,它是该微分方程的解;对于(6.3)式这样的二阶微分方程,满足它的函数(6.5)式中含有两个任意常数,这是通解;而函数  $S = \frac{1}{2}gt^2$ , 是当  $C_1$  和  $C_2$  都取 0 时的解,这是特解;而(6.6)式和(6.7)式是确定通解(6.5)中任意常数  $C_1$  和  $C_2$  的条件,这是初始条件.

分析了以上两个例题,一般有如下定义.

定义 6.1 联系自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程,称为微分方程.

这里须指出,微分方程中可以不显含自变量和未知函数,但必须显含未知函数的导数或微分.正因为如此,简言之,含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

定义 6.2 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶阶数,称为微分方程的阶.

例如

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x \text{ 是一阶微分方程;}$$

$$y'' + 8y' = 8x \text{ 是二阶微分方程;}$$

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2} \text{ 是三阶微分方程.}$$

$n$  阶微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

其中  $x$  是自变量,  $y$  是未知函数,最高阶导数是  $n$  阶  $y^{(n)}$ .

二阶和二阶以上的微分方程称为高阶微分方程.

定义 6.3 若将一个函数及其导数代入微分方程中,使方程成为恒等式,则此函数称为微分方程的解.

含有任意常数的个数等于微分方程的阶数的解,称为微分方程的通解;给通解中的任意常数以特定值的解,称为微分方程的

特解.

微分方程的初始条件 用以确定通解中任意常数的条件称为初始条件.

一阶微分方程的初始条件是, 当自变量取某个特定值时, 给出未知函数的值:

当  $x = x_0$  时,  $y = y_0$  或

$$y|_{x=x_0} = y_0;$$

二阶微分方程的初始条件是, 当自变量取某个特定值时, 给出未知函数及一阶导数的值:

当  $x = x_0$  时,  $y = y_0, y' = y_1$  或

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_1.$$

例如, 容易验证:

函数  $y = Ce^x, y = e^x$  都是一阶微分方程  $y' - y = 0$  的解. 显然, 前者是通解, 而后者是满足初始条件  $y|_{x=0} = 1$  的特解.

例 3 验证函数  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$  ( $C_1, C_2$  是任意常数) 是二阶微分方程

$$y'' + y = \sin x$$

的通解; 并求满足初始条件

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = \frac{5}{2}$$

的特解.

解  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x,$

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}x \sin x,$$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2}x \cos x,$$

将  $y, y'$  代入原方程, 有

$$y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + \sin x + \frac{1}{2}x \cos x$$

$$+ C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x = \sin x,$$

即函数  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$  是微分方程  $y' + y = \sin x$  的解; 由于该函数中含有任意常数的个数是 2, 恰等于微分方程的阶数, 所以所给函数是通解.

按题设, 将  $x = 0$  时,  $y = 1, y' = \frac{5}{2}$  的条件代入  $y$  和  $y'$  的表达式中, 得

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 = 1, \\ -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

或 
$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

即  $C_1 = 1, C_2 = 3$ . 于是所求特解为

$$y = \cos x + 3 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

求微分方程满足某初始条件的解的问题, 称为微分方程的初值问题. 例如, 函数  $y = e^x$  就是满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

的解.

### 习 题 6.1

1. 指出下列各微分方程的阶数:

(1)  $x^3(y')^3 - 2y + y = 0;$

(2)  $y' - 2yy' + y = x;$

(3)  $(2x - y) dx + (x + y) dy = 0;$