高 等 数 学(下)

杨盛祥　主 编

陈　琳　颜文勇　副主编
杨　元　主审

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括: 多元函数微分学, 重积分及线面积分, 无穷级数, 习题, 习题答案, 参考书目等。

本书适宜于高职高专类学校工科各专业学生学习使用, 也可供有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学. 下/杨盛祥主编. —重庆: 重庆大学出版社, 2004.1

ISBN 7-5624-3032-2

Ⅰ. 高... Ⅱ. 杨... Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003) 第 126387 号

高 等 数 学(下)

杨盛祥 主编

陈 琳 颜文勇 副主编

杨 元 主审

责任编辑: 谭 敏 版式设计: 谭 敏

责任校对: 廖应碧 责任印制: 秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人: 张鸽盛

社址: 重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区) 内

邮编: 400030

电话: (023) 65102378 65105781

传真: (023) 65103686 65105565

网址: http: //www. cqup. com. cn

邮箱: fxk@cqup. com. cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆联谊印务有限公司印刷

*

开本: 787× 1092 1/16 印张: 7.5 字数: 187 千

2004 年 1 月第 1 版 2005 年 7 月第 2 次印刷

印数: 4 001—8 000

ISBN 7-5624-3032-2 /O · 220 定价: 11.00 元

前言

本教材是以1996年国家教委组织制定的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》为依据,由具有丰富的高职高专教学经验的教师编写而成．由于高职高专类学校所设专业较多,为了适合不同专业、不同层次的教学,编写教师根据多年的教学经验,对教学内容进行了较为恰当的处理．该教材具有以下特点:

1. 极限理论以描述性定义为主线,对数学要求不高而教学时数又少的专业,讲解极限时可完全采用描述性定义．教材中函数的极限部分,仅对 $x \to x_0$ 的情形既给出了描述性定义又给出了精确定义(即 ε-δ定义)．这样处理后,使抽象的 ε-δ语言有了具体意义,教学实践证明,这种方式与单纯只讲精确定义的方式相比,前者令学生更容易接受,对大部分专业,教学时可采用这种模式．这样处理的另一个好处是,尽管只对 $x \to x_0$ 这一种情形介绍了精确定义,但对极限理论中的重要结论,如极限与无穷小的关系定理、无穷小的性质以及极限的运算法则等都可以证明了．

2. 由于高职高专类学校的学生数学基础参差不齐,为了适应不同层次的教学,教材中对习题的编排采用了由浅入深、循序渐进、逐步深入的原则．例如,对导数部分的习题,首先设计了一些题型用以熟悉函数的导数以及函数在给定的导数的四种记号,熟悉已推出的导数公式．然后编写一些用来熟悉导数的四则运算法则,但同时又能巩固导数公式的习题．最后选取复合函数的导数的习题时,又考虑到巩固所有的导数公式及四则运算法则．许多学生想问"学习导数有什么用",导数的应用这一章非常明确地回答了这一问题,同时,该章的内容、习题的选取仍然没有忘记巩固导数的公式及运算法则．通过这种螺旋式的循环,使学生对重点内容达到熟练掌握的程度．

3. 本教材中编入了导数及定积分在经济管理以及其他领域中的应用,这样既拓宽了教材的使用范围,又增强了数学课与专业课之间的联系．

4. 大部分高职高专类学校都存在教学内容多而教学时数少的矛盾,为了解决这一矛盾,编写教材时既考虑到要符合教学要求,又照顾了在实际教学时的可操作性,对后续课程没有影响或影响不大的内容做了适当的删减. 比较典型的是空间解析几何中建立平面方程、直线方程,研究平面与平面、直线与直线以及直线与平面的夹角的内容,这些知识的学习对逻辑推理能力、空间想象能力的提高是非常有用的,但是删除这些内容不会影响多元函数微积分内容的学习. 通过削枝强干、删繁就简,希望在较少的时间内尽可能完成教学要求的主要内容.

参加编写的教师有杨盛祥(编写第 1 章、第 8 章及第 10 章)、陈琳(编写第 2 章及第 11 章)、成和平(编写第 3 章)、洪洁(编写第 4 章及第 9 章)、颜文勇(编写第 5 章及第 6 章)、陈晓敏(编写第 7 章).

西南交通大学杨元教授仔细审阅了全书,在此表示衷心感谢.

由于我们的水平有限,时间仓促,错误在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2003 年 12 月

数学发展简介

高等数学通常仅是相对初等数学而言的, 其内容并无确切所指, 作为高等学校教学科目的高等数学, 通常包含微积分、微分方程、解析几何及级数的初步知识．高等数学主要产生于 17 世纪, 18 世纪发展成熟．高等数学建立过程中第一个决定性的步骤是解析几何的创立, 这一时期的杰出人物是笛卡尔和费尔马．法国数学家笛卡尔把变量引入数学, 建立了数和形之间的关系, 这样, 运用所有的代数方法解决几何问题成为可能．笛卡尔的同胞费尔马具体地研究了直线、圆和其他圆锥曲线的方程, 发现了坐标轴可以平移、旋转, 并以此来简化方程．17 世纪后半期, 英国数学家、物理学家牛顿从物理观点出发来研究数学, 从而创立了微积分学. 德国数学家莱布尼兹则是从几何问题(如曲线的切线, 面积等) 入手, 提出了微积分的基本概念．微积分在 18 世纪得到了巨大的发展, 沿着牛顿、莱布尼兹开创的道路, 经过许多数学家(如拉格朗日、柯西、达朗贝尔、拉普拉斯、斯托克斯、维尔斯特拉斯等) 的共同努力, 使微积分的理论逐渐完善、严密, 应用更加广泛．

中国是一个有着悠久历史和灿烂文化的文明古国, 中国古代的四大发明曾经极大地推动了世界文明的进步．同样, 作为中国文化的重要组成部分, 中国古代数学, 由于其自身的历史渊源和独特的发展过程, 形成了与西方迥然不同的风格, 成为世界数学发展的历史长河中的一支不容忽视的源头．根据古籍记载、考古发现及其他文字资料推测, 至少在公元前 3000 年左右, 在中华古老的土地上就有了十进位记数法, 开始使用分数及几何工具规和矩．庄子关于极限的论述“ 一尺之棰, 日取其半, 万世不竭 ”更是世界数学史早期最光辉的数学思想之一, 与西方 17 世纪才提出的无穷小的概念相比, 早 2 000 多年．三国时期的刘徽对《九章算术》做了最好的注释, 他为了计算圆周率提出了“ 割圆术 ”, 在中国数学史上, 首次将极限概念用于近似计算, 刘徽是中国早期对数学理论进行了深入研究的最杰出的数学家之一．南北朝时期的祖冲之最杰出的成就是关于圆周率的计算, 他把这一重要的数值精确到小数点后第 6 位, 这一关于 π 的近似值的世界记录被祖冲之保持了近一千年, 他儿子祖暅提出的“ 祖暅原理 ”, 直到1 100 多年后才由意大利数学家卡瓦列发现．宋元时期中国基本上是以代数为主要研究对象, 这一时期, 关于高次方程的数值解法、线性方程组的解法、高阶等差数列、组合数学等, 都达到了当时世界的最高水平．宋元高峰时期出现了许多杰出人物, 秦九韶研究的同余式问题, 其成果已灿烂夺目, 直到 500 年后, 经瑞士数学家欧拉、法国数学家拉格朗日和德国数学家高斯三代巨匠前后 60 多年的努力, 才比较系统地建立起一次同余式的理论．南宋末期的杨辉比西方早半

个世纪提出了杨辉三角形(西方称之为帕斯卡三角形),元代数学家朱世杰对四元高次方程组提出的“相消法”,近 500 年后才由法国的贝佐特给出了初步方案. 遗憾的是,明清时期的统治阶级为了维护其统治地位,规定科举制必须采用“八股”文体,而鄙夷天文、数学等专门学问为“奇技淫巧”,加上生产水平低下与数学理论高度发展相脱节的实际状况,致使中国数学由宋元时期的蓬勃发展而走向衰落. 当我们准备学习西方数学家创立的微积分时,看到中国古代数学的辉煌和近代与西方的差距是非常必要的.

第 9 章 多元函数微分学

在上册中，我们所讨论的函数都只含有一个自变量，这一类函数叫做一元函数. 但是在自然科学和工程技术实践中，许多问题往往涉及多个因素，常常出现一个变量依赖于多个变量的情况，这就出现了含有多个自变量的函数，即多元函数.

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数微分法及其应用. 多元函数同一元函数有着密切的联系，我们常常把多元函数的问题转化为一元函数的问题，用一元函数的微分法加以解决. 同时还应注意到多元函数的自变量不止一个，而是很多个，因此它与一元函数有着本质的区别.

因为从一元函数到二元函数会产生许多新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推，故本章以二元函数为代表来讨论多元函数微分学.

9.1 多元函数的基本概念

一、区域

在一元函数的讨论中，邻域及区间是经常用到的概念，类似地，讨论多元函数时，经常用到邻域及区域的概念. 邻域及区域都是符合一定条件的点集. 为简单直观起见，我们就用点集的概念来说明邻域和区域的概念.

在解析几何中，一个二元有序数组 (x, y) 对应于平面上一个点，这种点的集合称为平面点集. 类似地，一个三元有序数组 (x, y, z) 对应于空间中一个点，这种点的集合称为空间点集.

例如，平面点集 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 表示 xOy 平面上以原点为圆心，半径为 1 的圆的内部，且不包含圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的所有点的集合，如图 9-1 所示. 平面点集 $B = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 表示 xOy 平面上第一象限内所有点的集合

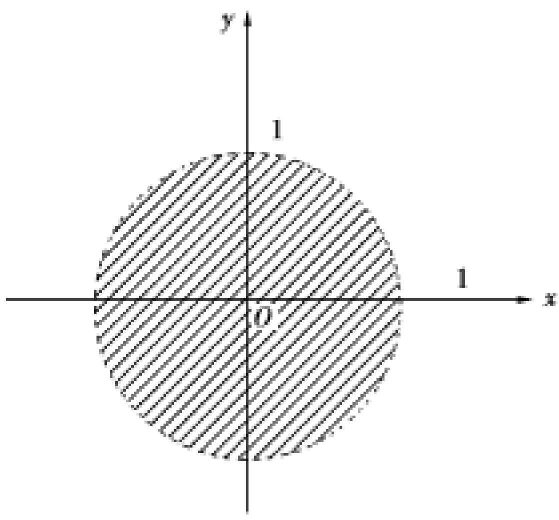

图 9-1

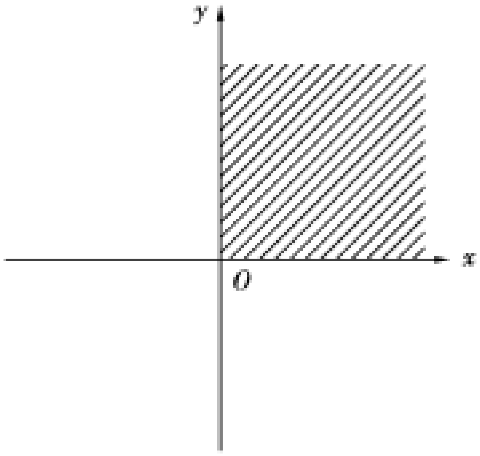

图 9-2

(不包含 x 轴, y 轴上的点), 如图 9-2 所示. 空间点集 $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ 表示 Oxyz 空间中以原点为球心, 半径为 1 的球的内部且包含球面的所有点的集合.

一般地, 平面区域是指平面上由一条曲线或几条曲线围成的部分. 区域可以是有限的, 例如上述的圆形区域、球形区域等等, 这种区域称之为有界区域. 区域也可以延伸到无穷远处, 例如整个 xOy 平面, 空间中的第一卦限等等, 这种区域是无限的, 称之为无界区域. 围成区域的曲线称为区域边界. 包括全部边界的区域称为闭区域, 不包括边界上任何点的区域称为开区域.

与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 称为点 P_0 的 δ 邻域, 记作 $U(P_0, \delta)$, 即

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

从图形上看, $U(P_0, \delta)$ 就是以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心、$\delta > 0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x, y)$ 的全体. 如果不强调邻域半径 δ 则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的 δ 邻域.

上述关于平面区域的概念可类似地推广到空间中去.

二、多元函数的概念

在很多自然现象和实际问题中, 经常会遇到多个变量之间的依赖关系.

例 1　正圆锥体体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

这里, V 随着 r、h 的变化而变化, 当 r、h 在一定范围($r > 0, h > 0$)取定一对值时, V 的值就随之而确定. 即当取定二元有序数组(r, h)时, V 便有确定的值与之对应. 这里底半径 r 和高 h 是相互独立的, 它们之间不存在依赖关系.

例 2　设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻, 由电学知道, 它们之间具有关系

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

这里, R 随着 R_1, R_2 的变化而变化, 当 R_1, R_2 在一定范围($R_1 > 0, R_2 > 0$)取定一对值时, R 的值就随之确定. 即当取定二元有序数组(R_1, R_2)时, R 便有确定的值与之对应. 这里 R_1, R_2 是相互独立的, 它们之间不存在依赖关系.

上面两例的具体意义虽各不相同, 但它们却有共同的性质, 抽出这些共性就得出以下二元函数的定义.

定义 1　设有变量 x、y 和 z. 如果当变量 x、y 在一定范围内任意取定一对值(x, y)时, 变量 z 按照一定的法则, 总有确定的数值与这对值相对应, 则 z 叫做 x, y 的二元函数, 记作

$$z = f(x, y) \quad \text{或} \quad z = z(x, y)$$

其中, x、y 叫做自变量, 而 z 叫做因变量. 自变量 x、y 的变化范围叫做函数的定义域.

类似地, 可以定义三元函数 $u = f(x, y, z)$ 以及三元以上的函数. 二元及二元以上的函数统称为多元函数.

如果对于点 $P(x, y)$, 函数 $z = f(x, y)$ 有确定的值与它对应, 就说函数 $z = f(x, y)$ 在点

$P(x,y)$ 处有定义. 函数的定义域就是使函数有定义的点的全体. 故二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域一般是 xOy 平面上的平面区域. 类似地, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的定义域一般是空间中的区域.

关于函数的定义域, 与一元函数类似, 可以做如下约定: 在讨论用算式表达的多元函数时, 就以使这个算式有确定值的自变量的变化范围所确定的点集为这个函数的定义域.

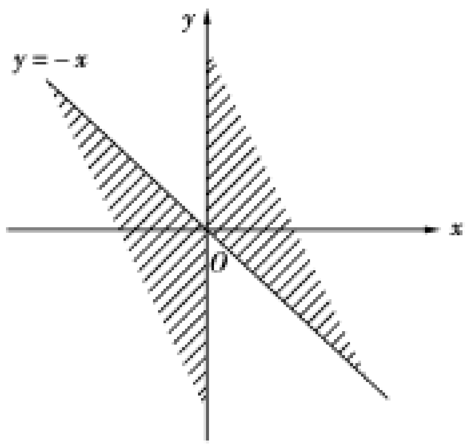

图 9-3

例 3　求函数 $z=\ln[x(x+y)]$ 的定义域.

解　这是复合函数 $z=\ln u$, 其中 $u=x(x+y)$. 由对数函数知 $u>0$, 即 $x(x+y)>0$, 于是有

$$\begin{cases} x>0 \\ x+y>0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x<0 \\ x+y<0 \end{cases}$$

故函数的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x+y>0 \text{ 且 } x>0 \text{ 或 } x+y<0 \text{ 且 } x<0\}$ (图 9-3).

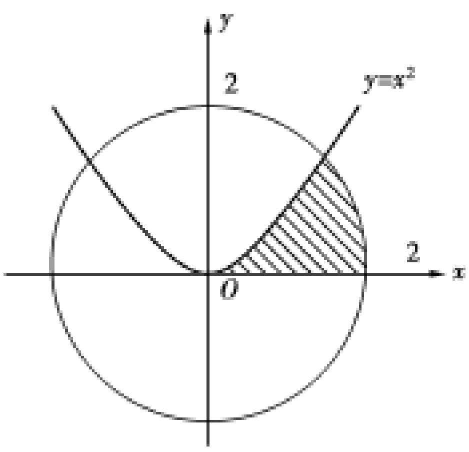

图 9-4

例 4　求函数 $z=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ 的定义域.

解　z 可以看做两个函数的商 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$, 其中

$$z_1=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z_2=\sqrt{x-\sqrt{y}}$$

所以, z_1 的定义域为　$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4\}$

z_2 的定义域为　$D_2=\{(x,y)\mid x>\sqrt{y} \text{ 且 } y\geq 0\}$

z 的定义域是 z_1, z_2 定义域的公共部分(图 9-4), 即

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4 \text{ 且 } x>\sqrt{y}, y\geq 0\}$$

大家知道, 在直角坐标系中, 一元函数 $y=f(x)$ 的图形是平面上的一条曲线. 那么, 对于二元函数 $z=f(x,y)$, 其图形是什么呢? 设二元函数

$$z=f(x,y) \quad (x,y)\in D$$

在定义域 D 内取定一点 $P(x,y)$, 在空间可以作出一点 $M(x,y,f(x,y))$ 与它对应, 当点 $P(x,y)$ 在 D 内变动时, 点 $M(x,y,f(x,y))$ 就相应地在空间中变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面. 故二元函数表示空间直角坐标系中的一个曲面(图 9-5). 例如, 由空间解析几何知道, 线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一个平面.

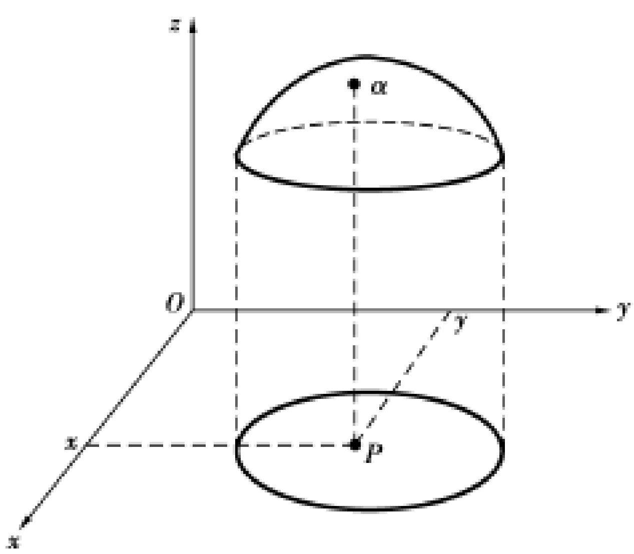

图 9-5

三、二元函数的极限

一元函数的极限的定义为: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义(但在 x_0 处不一定有定义), 如果当 x 无限趋于 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 无限趋于某个确定的常数 A, 则称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0)$$

类似地,可以推出二元函数的极限的定义.

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义[在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不一定有定义],$P(x,y)$ 是该邻域内异于 $P_0(x_0,y_0)$ 的任意一点.如果当点 $P(x,y)$ 以任何方式无限趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,相应的函数值 $f(x,y)$ 无限趋于一个确定的常数 A,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \quad \text{或} \quad f(x,y)\to A(\text{当 } x\to x_0, y\to y_0)$$

与一元函数极限的概念相仿,还可以用"ε-δ"的方式对二元函数的极限作如下定义.

定义 2′ 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 M,假定函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义[但在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不一定有定义],如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得对于适合不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \text{ 或 } 0<|PP_0|<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in M$,恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立,则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$, $y\to y_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0}f(x,y)=A$$

为了区别于一元函数的极限,把二元函数的极限叫做二重极限.

例 5 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

解 因为 $x^2+y^2\geq 2|xy|$,所以

$$0\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x|}{2}(x, y \text{ 不能同时为零})$$

而

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{2}=0$$

根据夹逼定理,即得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

必须注意,虽然二元函数的极限的定义与一元函数的极限的定义极为相似,但却有着本质的区别.对于一元函数在 $x=x_0$ 点极限存在的充分必要条件是函数在 x_0 的左右极限存在且相等.即对一元函数来说,x 趋向于 x_0 的方式只有两种,只要 x 沿 x 轴从 x_0 的左右两个方向趋向于 x_0 就够了.

但是对于二元函数的极限就要复杂得多,动点 $P(x,y)$ 必须要以各种可能的方式趋向于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 的极限都要存在且相等,这时 $\lim\limits_{P\to P_0}f(x,y)$ 才能够存在.因此,如果动点 $P(x,y)$ 以某种特殊方式,例如沿着一条定直线或定曲线趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,即使函数无限接近某一确定值,还不能由此断定函数的极限存在.但是,如果当动点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数趋向于不同值,那么就可以断定这个函数当 $P\to P_0$ 时的极限不存在.

例 6　函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当 $x\to 0,y\to 0$ 时,极限是否存在?

解　当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴($y=0$)趋向点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴($x=0$)趋向点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋向点$(0,0)$时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然,它是随着 k 值的不同而改变的. 故点 $P(x,y)$ 虽然沿两种特殊方式(沿 x 轴或沿 y 轴)趋于原点时函数的极限存在并且相等,但该函数的极限并不存在.

四、二元函数的连续性

和一元函数一样,二元函数在一点连续的概念也可以利用函数的极限来定义.

定义 3　设有二元函数 $z=f(x,y)$,如果:(1)函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其某个邻域内有定义;(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在;(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处是连续的.

设自变量在点 $P_0(x_0,y_0)$ 有改变量 Δx、Δy,对应的函数 $z=f(x,y)$ 也有一个改变量 Δz,于是

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

则称 Δz 是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的全增量.

对于上述二元函数的点连续的概念,可以令 $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$. 则式 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 可以写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

因此,上面的定义 3 又可以写成:

定义 3′　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 及其某个邻域内有定义,如果

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处是连续的.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点处都连续,则称函数在区域 D 内连续.

和一元函数一样,连续函数经过有限次四则运算后仍为连续函数(对于除法,假定分母函数不为零). 连续函数的复合函数也是连续函数.

如果一个二元函数是可用 x,y 的一个数学式子来表示的函数,而且这个式子分别由关于 x,y 的基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算所构成,则称此函数为二元初等函数.

例如

$$\sin(x+y),\ e^{x+y},\ \ln(1+x^2+y^2),\ \frac{\cos\sqrt{xy}}{\sqrt{x+y^2}}$$

等都是二元初等函数.

可以证明,如果一个二元初等函数在一个区域内有定义,则此二元函数在该区域内是连续的.由此结论,如果 $z=f(x,y)$ 是一个二元初等函数.$P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $z=f(x,y)$ 的定义区域内的某个点,则 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续,故

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

例 7　设 $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$,求 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)$.

解　由于 $f(x,y)$ 是初等函数,且点$(1,2)$在其定义区域内,故 $f(x,y)$ 在点$(1,2)$处连续.因此

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} f(x,y)=f(1,2)=\frac{1+2}{1\times 2}=\frac{3}{2}$$

与一元函数一样,在有界闭区域上的二元连续函数有下面两个性质:

性质 1(最大值和最小值定理)　定义在有界闭区域 D 上的二元连续函数,必取得最大值和最小值.

性质 2(介值定理)　定义在有界闭区域 D 上的二元连续函数,必取得介于函数最大值和最小值之间任何值.

9.2　偏导数

一、偏导数概念

1.偏导数的定义及其计算法

在研究一元函数的变化率时引入了导数的概念.对于多元函数同样需要研究其关于自变量的变化率问题.但多元函数的变化率不止一个,多元函数与自变量的关系比一元函数要复杂些.

研究多元函数对其中一个自变量的变化率,应把另外的自变量看做常数.以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例.如果把 y 看做常量,它就是 x 的一元函数,这个函数对 x 的导数就称为该二元函数关于 x 的偏导数,即有下述定义:

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,(x_0,y_0) 是 D 内一点.令 y 固定为常数 y_0,则 $z=f(x,y_0)$ 是 x 的函数:

$$z=f(x,y_0)=\varphi(x)$$

如果这个一元函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导,即极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

存在，则称这个极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \left. z'_x \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \text{ 或 } f'_x(x_0, y_0)$$

即

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

类似地，函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数 $f'_y(x_0, y_0)$ 定义为

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

这个偏导数也可记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \text{ 或 } \left. z'_y \right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在，那么对于 D 内的每个点 (x, y)，使 $z = f(x, y)$ 在该点处对 x 的偏导数与它对应，这样就在 D 内定义了一个新的函数，这函数称为 $z = f(x, y)$ 对 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x \text{ 或 } f'_x(x, y)$$

类似地，函数 $z = f(x, y)$ 对 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y \text{ 或 } f'_y(x, y)$$

在不引起混淆的时候，有时也将 z'_x, $f'_x(x, y)$ 分别简记为 z_x, f_x.

由偏导数的定义可知，在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是偏导函数 $f'_x(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的函数值，而 $f'_y(x_0, y_0)$ 就是偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的函数值. 偏导函数也简称为偏导数.

根据偏导数的定义可知，求 $z = f(x, y)$ 的偏导数，并不需要新的方法，只需将其他自变量看做常数，仅对一个变量求导. 因此，一元函数的求导法则和求导公式，对二元函数的偏导数仍然适用.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数. 例如，三元函数

$$w = f(x, y, z)$$

对 x 的偏导函数定义为

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

三元函数的偏导数仍是将其他自变量看做常数，仅对一个变量求导. 它的求法也还是一元函数的微分法的问题.

例 1　求 $z = x^2 + 3xy + e^y$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解　为求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，把 y 看做常数，对 x 求导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = 1 \\ y = 2}} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$$

为求$\frac{\partial z}{\partial y}$,把 x 看做常数,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + e^{y}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 3 + e^{2}$$

例 2 求 $z = \arctan\frac{y}{x}$的偏导数.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

例 3 设 $z = x^{y}(x>0, x\neq 1)$,验证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证 因为$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$,$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{y}\ln x$,所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x}x^{y}\ln x = x^{y} + x^{y} = 2z.$$

例 4 求 $w = x^2 + xyz + y^3 + \sqrt{z}$的偏导数.

解 $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + yz$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xz + 3y^2$, $\frac{\partial w}{\partial z} = xy + \frac{1}{2\sqrt{z}}$.

要注意:多元函数的偏导数符号$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$是一个整体符号,不能分开,单独的 ∂z, ∂x 和 ∂y 都是没有意义的.

2.连续与偏导数存在的关系

在一元函数中,可导必连续,但连续不一定可导.但对多元函数来说,连续不是偏导数存在的必要条件,偏导数存在也不是连续的充分条件.

在多元函数中,连续不能保证偏导数存在.例如函数

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

在(0,0)点连续,但是在该点处其偏导数却不存在.因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\text{(不存在)}.$$

同理$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}$(不存在).

对于多元函数来说,即使它在某点的各个偏导数都存在,也不能保证它在该点连续.例如,函数

$$f(x,y) = \begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2 = 0\end{cases}$$

在点$(0,0)$处对 x 的偏导数为

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{(0+\Delta x)\cdot 0}{(0+\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

同理

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot(0+\Delta y)}{0^2+(0+\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0$$

可是在 9.1 节的例 6 中知道,该函数在$(x,y)\to(0,0)$时极限不存在,因此该函数在点$(0,0)$处不连续.

二、二元函数偏导数的几何意义

偏导数$f_x(x_0,y_0)$的几何意义是曲面

$$z=f(x,y)$$

被平面$y=y_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_x对 x 轴的斜率(图 9-6).同样,偏导数$f_y(x_0,y_0)$的几何意义是曲面

$$z=f(x,y)$$

被平面$x=x_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_y对 y 轴的斜率(图 9-7).

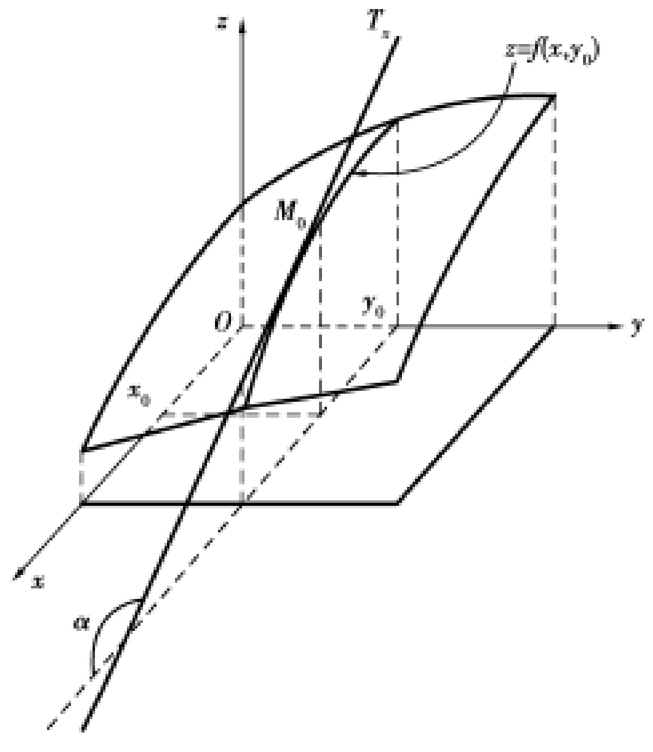

图 9-6

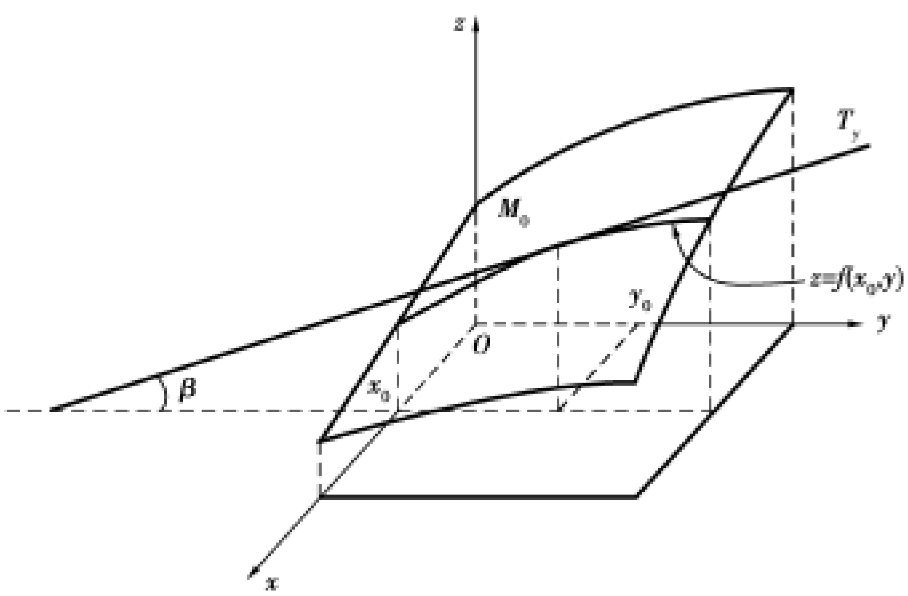

图 9-7

三、高阶偏导数

设函数$z=f(x,y)$在区域 D 内具有偏导数:

$$\frac{z}{x}=f'_x(x,y),\qquad \frac{z}{y}=f'_y(x,y)$$

这两个偏导数在 D 内都是 x, y 的函数.如果这两个函数的偏导数也存在,则称这两个函数的偏导数为原来函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数.根据对自变量求导次序的不同,可以有下列四个二阶偏导数:

$$(1)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$(2)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$(3)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

$$(4)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

其中第二, 第三两个偏导数称为混合偏导数.

类似上述方法, 还可以定义三阶、四阶以及任意阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 5　设 $z=x\ln(xy)$, 求它的二阶偏导数及$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+1,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=-\frac{1}{x^2}$$

该例中两个混合偏导相等, 即$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. 这不是偶然的, 事实上有下述定理:

定理　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域 D 内连续, 那么在该区域内这两个混合偏导数必相等.

上述定理说明二阶混合偏导数在连续条件下与求导的次序无关.

例 6　设 $u=z\arctan\frac{x}{y}$, 验证: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证明　$\frac{\partial u}{\partial x}=z\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\frac{zy}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2zyx}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\frac{\left(-\frac{x}{y^2}\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}}=-\frac{zx}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2zyx}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

因此　$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{2zyx}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2zyx}{(x^2+y^2)^2}+0=0$

9.3　全 微 分

二元函数的全微分是一元函数的微分的推广. 类似于一元函数的微分的定义, 可以定义二

元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分.

定义　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中, A, B 与 Δx, Δy 无关, 而 $o(\rho)$ 是 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小量, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分, 而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全微分, 记作 dz, 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点可微, 则称函数在 D 内可微.

定理 1　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

证　由于 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

显然, 当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时, 有 $\rho\to 0$, 于是有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)]$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}(A\Delta x + B\Delta y) + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} o(\rho) = 0$$

因此, 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

定理 2　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 必存在偏导数, 且 $A=\left.\frac{z}{x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $B=\left.\frac{z}{y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$

证　因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 则其全增量可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

其中, A, B 与 Δx, Δy 无关, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

上式对于任意的 Δx, Δy 都成立, 现令 $\Delta y=0$, 则 $\rho=|\Delta x|$. 这时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+B\cdot 0+o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

$$=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = A$$

上式表明

$$\left.\frac{z}{x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = A$$

同理可证 $\left.\frac{z}{y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 存在, 且 $\left.\frac{z}{y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=B$.

将定理 2 中的定点 (x_0,y_0) 换成任意点 (x,y), 定理 2 就给出了全微分存在时计算全微分的公式: