

高等数学

(下册)

杨开春,张富林,赵临龙 主编

陕西人民出版社

(陕) 新登字 001 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/杨开春, 张富林, 赵临龙主编. —西安:
陕西人民出版社, 2003
高校 21 世纪师范类规划教材
ISBN 7 - 224 - 06452 - 1
.高... . 杨... 张... 赵... .高等数学
—高等学校—教材 .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 007249 号

高校 21 世纪
师范类规划教材

高等数学 (上下册)

主 编 杨开春 张富林 赵临龙
责任编辑 韩 琳

封面设计 姚 锋
版式设计 陈 涛

出版发行 陕西人民出版社
购书电话 (029) 7205074 7205054 7205197
地 址 西安北大街 131 号
邮政编码 710003
经 销 陕西省新华书店
印 刷 陕西正华印刷科技有限责任公司

开 本 787mm× 1092mm 1/16
印 张 35.75
插 页 4
字 数 817 千字
版 次 2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷
印 数 1—5000
书 号 ISBN 7 - 224 - 06452 - 1/O · 10
定 价 50.00 元

前 言

本教材是陕西省高等教育面向 21 世纪教学与课程改革计划资助项目成果之一。

本教材的内容是《高等数学》项目组全体成员根据国家教委关于课程与教材改革要适应于社会发展，要服务于经济建设和有利于培养人才的要求，经过深入广泛的调查、研究制定的编写大纲编写的。本书的初稿曾作为内部教材在西安联大、渭南师院、安康师专等院校试用二年，在此基础上进一步充实了内容，修正了错误，经省教委批准纳入“高校 21 世纪师范类规划教材”。可供综合类及师范类院校物理、化学、生物、地理等非数学专业和综合及师范类专科院校相应非数学类专业使用。

本书在编写过程中，着重注意了以下几个方面。

(1) 在内容选取上遵循“少而精，广而浅”的原则。加强了理论与实际的联系；注重高等数学知识在社会经济与工程技术方面的具体应用；略去了一些较为繁杂的定理证明和冗长的理论推导，但力求保持理论与实际的一致性和系统性。

(2) 教材的编写力求打破传统习惯，对概念的引入更为朴实、简明和自然，尽可能从读者身边熟悉的问题入手；理论表述尽可能严谨，且直观说明和解释并用，并注重体现数学的思想和方法，提高学生对数学学习的兴趣。

(3) 本教材在每一章节都安排了内容丰富的例题。这些例题的选择遵循典型性、代表性和趣味性的原则，有利于学生增强探索、研究的能力。每章之后配有适量习题，有利于学生理解和巩固课程要求的基本概念和基本理论，掌握解决具体问题的能力。

(4) 本教材在大部分章节后附有理论应用和建立数学模型的阅读材料，并介绍了建立数学模型的一般方法。目的在于加强学生对理论应用和建立数学模型解决实际问题的重视和提高数学建模的能力以及对学习数学的兴趣。

本教材由西安联合大学杨开春，榆林高专张富林，安康师专赵临龙主编；渭南师院李海龙，商洛师专李军社任副主编，组织省内师范院校多位长期在教学一线工作的教授、副教授等教学骨干在深入调查研究的基础上完成的。其中西安联大韩靖寇教授除参加编写任务外还审阅了全稿，并对整个编写过程提出了很好的意见。

在调研过程中，我们一直得到了陕西省教育厅高教处领导同志的指导和支持，并得到了西安交通大学理学院徐文雄教授的热情关心和具体指导。这些都对我们的调研及后来的成书过程起了极大的推动作用。此外我们还要对所有参编院校的领导及西安联大物理、化学、地理、经管等系的领导和广大师生对我们在调研及初稿试用时给予的大力支持表示衷心的感谢。

本教材约占 216 课时。具体可根据不同专业教学计划的要求在第五、第六、第七、第十一、第十二章中选授相应的内容。



高等数学

我们恳请读者在使用过程中能对教材中出现的缺点、错误批评指正，以使本教材不断完善。

编者
2002年10月

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	(295)
第一节 空间直角坐标系	(295)
第二节 向量	(297)
第三节 平面与空间直线	(308)
第四节 简单的曲面与空间曲线	(321)
理论应用与数学模型举例	(331)
第八章 多元函数微分学	(334)
第一节 多元函数的一般概念	(334)
第二节 偏导数	(339)
第三节 全微分及其应用	(345)
第四节 复合函数偏导数	(351)
第五节 几何方面的应用	(358)
第六节 方向导数与梯度	(363)
第七节 多元函数的极值	(367)
第九章 多元函数的积分学	(374)
第一节 二重积分的概念与性质	(374)
第二节 二重积分的计算	(377)
第三节 三重积分的定义和计算	(388)
第四节 重积分的应用	(396)
理论应用与数学模型举例	(400)
第十章 曲线积分与曲面积分	(404)
第一节 第一型曲线积分与第一型曲面积分	(404)
第二节 第二型曲线积分与第二型曲面积分	(410)
第三节 格林公式 曲线积分与路线的无关性	(418)
第四节 高斯公式与斯托克斯公式	(423)
第五节 场论初步	(427)
第十一章 线性代数	(435)
第一节 行列式	(435)
第二节 矩阵	(452)
第三节 n 维向量	(469)
第四节 线性方程组	(476)



第五节 方阵的特征值与特征向量	(494)
理论应用与数学模型举例	(498)
第十二章 傅里叶级数与偏微分方程初步	(500)
第一节 傅里叶级数	(500)
第二节 正弦级数和余弦级数	(505)
第三节 以 $2l$ 为周期的周期函数的傅里叶级数	(509)
第四节 波动方程	(512)
第五节 热传导方程	(522)
第六节 泊松方程与拉普拉斯方程	(528)
第七节 薛定谔方程	(533)
第八节 行波法	(535)
第九节 格林函数法	(540)
第十节 贝塞尔方程与贝塞尔函数	(543)
习题答案	(547)

第七章 向量代数与空间解析几何

我们已经知道,在平面上建立了直角坐标系之后,就能够运用代数运算方法研究平面图形问题.那就是平面解析几何.对于空间解析几何,顾名思义,它同样也是利用坐标的方法,去研究空间图形问题的.为了避免一些繁复的计算而使问题得到简捷的解决,本章还引进了在工程技术上有着广泛应用的向量,运用向量几何特性,研究空间的平面和直线.最后介绍空间曲面和空间曲线的基本知识.

空间解析几何的知识对于我们学习多元函数微积分等是十分重要的基础.

第一节 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

像平面解析几何那样,我们首先建立空间中的直角坐标系.

过空间一个点 O ,作三条互相垂直的数轴,使这三条数轴都以 O 点为其原点,且都具有相同的长度单位,分别称这三条轴为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴).通常把它们按右手规则配置相互位置关系.即让右手拇指、食指和向掌心弯折 $\frac{1}{2}$ 角度的

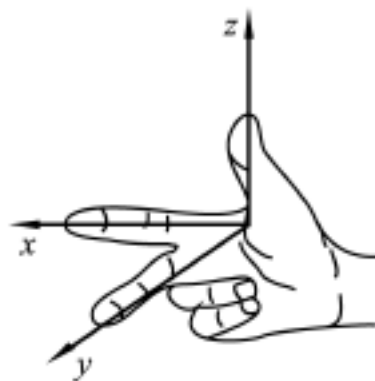


图 7—1

的中指,自然伸直互成直角时(图 7—1),拇指指向为 z 轴正向,食指指向为 x 轴正向而中指指向为 y 轴正向.这样,我们就建立了一个空间直角坐标系. x 轴、 y 轴和 z 轴为这坐标系的坐标轴,点 O 称为坐标原点(简称原点).

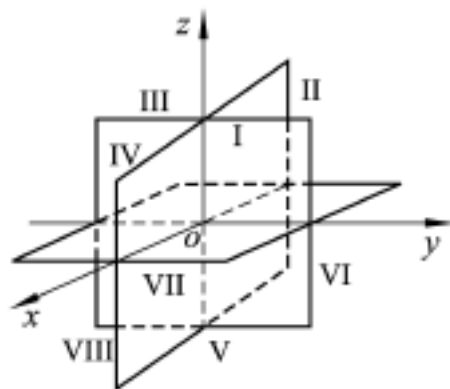


图 7—2

由立体几何知识,三条坐标轴中任意两条必可确定一个平面,这样确定的三个平面统称为坐标面,分别称为 xoy 面、 yoz 面、 zox 面.这三个坐标面把空间分割成八个部分,每一个空间部分叫做一个卦限,处于 xoy 面的 z 轴正向的四个卦限称为 I 、 II 、 III 、 IV 卦限,而位于 xoy 面的 z 轴负向的四个卦限则分别称为 V 、 VI 、 VII 、 $VIII$ 卦限(图 7—2).

空间内建立了空间直角坐标系之后,这空间内的任意一点与有序数组之间就确立了对应关系.

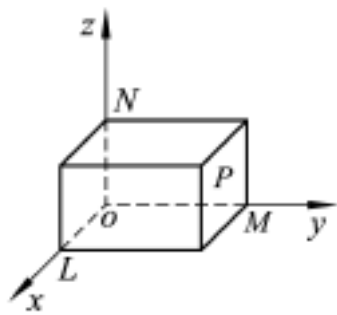


图 7—3

取空间任意一点 P , 过 P 作三个平面分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直, 垂足分别是 L 、 M 、 N (图 7—3). L 、 M 、 N 三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别对应着实数 x 、 y 、 z , 这样, 空间一点 P 就确定了唯一的一个有序数组 (x, y, z) .

反过来, 对于一个任意的有序的数组 (x, y, z) , 它们应在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别找到对应的点 L 、 M 、 N , 而过 L 、 M 、 N 分别垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的三个平面必交于一个点 P , 即这有序数组 (x, y, z) 也惟一确定了空间中的一个点 P .

这样, 在空间直角坐标系建立之后, 空间内的点 P 与有序数组 (x, y, z) 之间就建立了相互间的一一对应关系. 点 P 的位置关系的研究就可转化为有序数组 (x, y, z) 的讨论来进行. 称有序数组 (x, y, z) 为点 P 的坐标. 记为 $P(x, y, z)$. x, y, z 分别叫 P 点的横坐标、纵坐标和竖坐标.

显然, 点 P 的位置特征必在 P 的坐标中反映出来. 例如: 若 P 在第一卦限, 其三坐标必为正值; 若 P 在 yoz 面上, 其横坐标必取值为零, 即 $x = 0$; 若 P 点在 x 轴上, 则纵、竖两坐标必同为零, 即 $y = z = 0$; 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$.

二、空间两点间的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, P_1 、 P_2 两点间的距离记为 $|P_1P_2|$.

为了用这两点的坐标表示它们间的距离, 过 P_1 、 P_2 各作三个分别与三坐标轴垂直的平面. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体, 且分别与坐标轴交于 L_1 、 L_2 、 M_1 、 M_2 、 N_1 、 N_2 等六个点 (图 7—4).

由几何知识, 显然可得:

$$\begin{aligned} |P_1R| &= |L_1L_2| = |x_2 - x_1|, \\ |RQ| &= |M_1M_2| = |y_2 - y_1|, \\ |QP_2| &= |N_1N_2| = |z_2 - z_1|, \\ |P_1Q|^2 &= |P_1R|^2 + |RQ|^2, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 \\ &= |P_1R|^2 + |RQ|^2 + |QP_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

故 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

特殊地, 点 $P(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 间的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 已知 $P_1(4, 3, 1)$ 、 $P_2(7, 1, 2)$ 、 $P_3(5, 2, 3)$, 求 $|P_1P_3P_2|$ 及 $|P_1P_2P_3|$.

解 $|P_1P_2| = \sqrt{(7 - 4)^2 + (1 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{14}$,

$$|P_2P_3| = \sqrt{(5 - 7)^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{6},$$

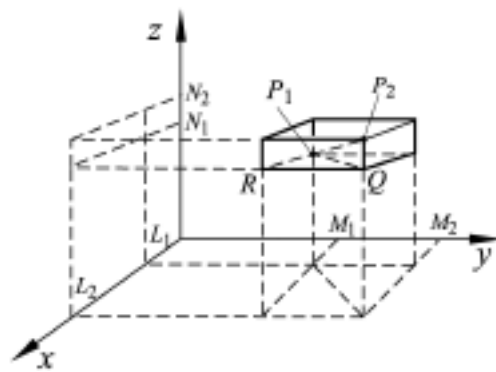


图 7—4

$$|P_3P_1| = \sqrt{(4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6},$$

$$\cos \angle P_1P_3P_2 = \frac{|P_2P_3|^2 + |P_3P_1|^2 - |P_1P_2|^2}{2|P_2P_3| \cdot |P_3P_1|} = \frac{6+6-14}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{6},$$

所以 $\angle P_1P_3P_2 = \arccos(-\frac{1}{6}) = \pi - \arccos \frac{1}{6}.$

又因为 $|P_2P_3| = |P_3P_1|$, 即 $\triangle P_1P_2P_3$ 是以 P_3 为顶点的等腰三角形, 所以

$$\cos \angle P_1P_2P_3 = \frac{\frac{1}{2}|P_1P_2|}{|P_2P_3|} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{6},$$

故 $\angle P_1P_2P_3 = \arccos \frac{\sqrt{21}}{6}.$

例2 在纵轴上求一点 M , 使它到点 $A(1, -4, 7)$ 和 $B(5, 6, 5)$ 等距离.

解 设 M 点的坐标为 $(0, y, 0)$, 依题意有 $|AM| = |MB|$, 即

$$\sqrt{(-1)^2 + (y+4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{5^2 + (6-y)^2 + 5^2}.$$

解之, 得 $y = 1,$

故 M 点的坐标为 $(0, 1, 0)$.

习 题 一

1. 在空间直角坐标系中, 指出下列各点的位置: $A(2, 1, 3); B(-2, -1, 3); C(2, 1, 0); D(0, 0, -3)$.
2. 计算下列各对点的距离:
 - (1) $(0, 0, 0), (2, -1, 3)$;
 - (2) $(4, -2, 3), (-2, 1, 3)$.
3. 求点 $P(2, -3, 1)$ 到各坐标轴的距离及到各坐标面的距离.
4. 证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.
5. 求点 (x, y, z) 关于(1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

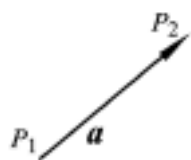
第二节 向 量

一、向量概念

在我们日常生活和科学研究过程中所接触到的“量”有两类, 一种只同大小或多少有关, 如质量、面积、产量等, 称它们为数量; 另一种量既有大小, 又有方向, 如力、速度、力矩等, 称之为向量. 数量一般用 a, b 等表示, 向量一般可记为 \vec{a}, \vec{b} 或 $\overline{a}, \overline{b}$ 等.

向量的大小叫做向量的模. 通常向量 \vec{a} 的模记为 $|\vec{a}|$. 任何向量的模都是非负的实数. 模为 1 的向量叫做单位向量. 不同方向的单位向量是相异的向量. 换句话说, 实数的单

位是惟一的, 而向量中, 单位向量却有无数多个. 模等于零的向量叫做零向量, 记做 0 . 零向量的方向可以看做是任意的.



在数学上, 我们还常用一条有方向的线段来表示向量. 这有向线段的长度表示向量的模, 这有向线段的方向就表示向量的方向. 如图以 P_1 为始点、 P_2 为终点的有向线段表示向量 a , 则 $|a| = |P_1P_2|$, 而 a 的方向就由 P_1

图 7—5 到 P_2 的指向. 这个向量 a 也可以记为 P_1P_2 (图 7—5).

需要特别说明的是, 在数学中, 我们所研究的向量, 只与其大小(模)和方向有关, 而与其始点无关. 也就是说, 这里所谈的向量是始点可以随意放置的自由向量.

两个向量 a 、 b , 如果模数相等, 并且方向相同, 就称它们是相等的, 记为 $a = b$. 显然, 相等的两个向量是在同一直线上或在平行直线上的.

向量是不能比较大小的, 但向量的模是可以比较大小的.

与向量 a 模相等而方向相反的向量叫做向量 a 的反向量, 记为 $-a$. 显然, 互为反向量的两个向量是在同一直线上或在平行的直线上的.

二、向量的加减法与数乘向量

1. 向量的加法

如同已知两个力可以求它们相加在一起的合力那样, 我们规定两个向量 a 、 b 的加法是:

把第二个向量 b 的始点与第一个向量 a 的终点重合之后, 以向量 a 的始点为始点, 向量 b 的终点为终点的向量, 就叫做向量 a 与向量 b 的和, 记为 $a + b$ (图 7—6). 这种求两个向量的和的运算就叫向量的加法. 按照上述求两个向量和的做法还称为向量加法的三角形法则.

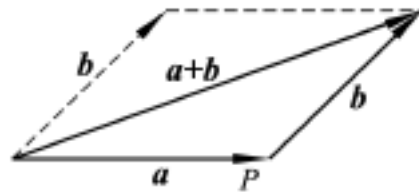


图 7—6

如图 7—6, 以 a 、 b 及 $a + b$ 构成的三角形为基础, 做一个平行四边形. 则 $a + b$ 恰是以 a 、 b 为邻边的平行四边形的对角线. 这种把两向量 a 、 b 始点重合, 作平行四边形, 它们共同始点为始点的对角线为这两个向量的和的运算做法叫向量求和的平行四边形法则. 显然, 对同一对向量 a 、 b , 无论用三角形法则还是用平行四边形法则, 所得到的结果都是完全一致的.

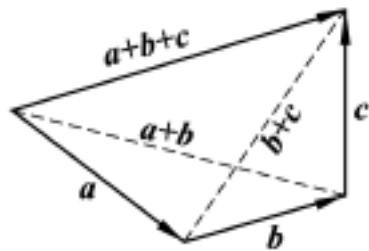


图 7—7

对于三个或更多向量的加法, 我们完全可以按照三角形求和法则, 运用始、终点重合的做法, 得到它们的和(图 7—7).

因为向量与我们熟知的数量(如实数)是两类不同的量, 所以, 我们不但要对向量的运算方法有正确的理解, 还要掌握能够使这种运算简捷运用的运算规律.

向量的加法有如下运算规律:

- (1) 交换律: $a + b = b + a$
- ;(2) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

依据加法法则, 由图 7—6 和图 7—7 中虚线所画部分, 不难看出这两条运算规律的合理性.

2. 向量的减法

如同有理数中的减法那样,我们借助于向量的加法来规定向量的减法.

如果向量 b 与向量 c 的和等于向量 a , 即 $b + c = a$ 时,就把向量 c 叫做向量 a 减向量 b 的差, 记为 $c = a - b$. 这种求两个向量差的运算就是向量的减法.

同向量加法类似,两个向量 a, b 相减求差也有一个三角形法则和平行四边形法则(图 7—8). 这里要提醒大家特别注意的是差 $a - b$ 的指向是 b 的终点为始点、 a 的终点为终点的指向. 这一点大家联系减法求差的意义是不难理解的.

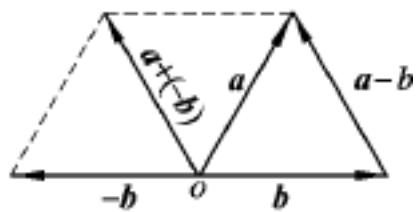


图 7—9

对于向量的减法运算,我们不再研究它的运算规律. 因为它从本质上说,也是一种加法. 即有:

$$a - b = a + (-b).$$

这一重要结论,大家不难由图 7—9 得到理解.

例 1 如图 7—10, 平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = a, AD = b, AA_1 = c$, 试用向量 a, b, c 来表示对角线向量 AC_1, B_1D .

解 因为 $AC = AB + AD = a + b$,

所以 $AC_1 = AC + CC_1 = AC + AA_1 = a + b + c$.

又因为 $BD = AD - AB = b - a$,

所以 $B_1D = BD - BB_1 = BD - AA_1 = b - a - c$.

3. 数乘向量

如同质量(数量)可以同加速度(向量)相乘,等于这物体运动所承受的力(向量)一样,我们这样规定数乘向量的运算.

实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量. 这个向量的模等于实数 λ 的绝对值 $|\lambda|$ 与向量 a 的模的乘积, 即 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$; 而该向量的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 a 方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 方向相反.

显然,按这个规定就有

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$, 即 $0 \cdot a = 0$;

当 $\lambda = 1$ 时, $\lambda a = a$, 即 $1 \cdot a = a$;

当 $\lambda = -1$ 时, $\lambda a = -a$, 即 $-1 \cdot a = -a$.

由于向量与它的单位向量同方向, 所以有

$$a = |a| a^\circ;$$

或

$$a^\circ = \frac{1}{|a|} a.$$

数乘向量的运算有如下运算规律:

(1) 结合律 $(\lambda \mu) a = (\lambda \mu) a$;

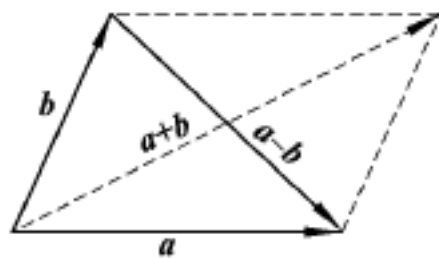


图 7—8

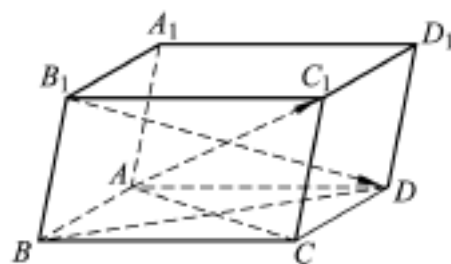


图 7—10

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

例2 用向量方法证明三角形中位线定理.

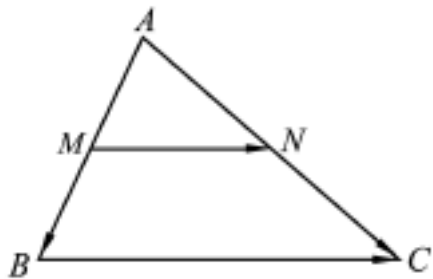


图 7—11

证明 设 M, N 为 $\triangle ABC$ 两边 AB, AC 的中点(图 7—11).

则 $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AB}$,

$\vec{AN} = \frac{1}{2} \vec{AC}$,

所以 $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$

$= \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB})$

$= \frac{1}{2} \vec{BC}$,

故 $\vec{MN} \parallel \vec{BC}$ 且 $|\vec{MN}| = \frac{1}{2} |\vec{BC}|$.

三、向量的坐标表示

在空间建立一个直角坐标系以后,这空间内的向量就可以用这直角坐标系的坐标加以表示.

我们取与 x 轴方向相同的单位向量为 i, 与 y 轴方向相同的单位向量为 j, 与 z 轴方向相同的单位向量为 k, 并称它们为这直角坐标系的基本向量. 则这空间内的任一向量都是这些基本向量与数乘积的和.

若空间内的向量始点在坐标原点, 如图 7—12 中的向量 OP, 则因为 $OL = xi$, $OM = yj$, $ON = zk$, 故必有

$$\vec{OP} = xi + yj + zk,$$

这里, L, M, N 是过 P 点所作分别与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的三个平面与坐标轴的交点. 如在前面第一节中空间点的坐标所述, 这时的有序数组即 P 点的坐标 (x, y, z) 是惟一的. 故向量 OP 的这种和式也是惟一的. 这个表示式称为向量 OP 按基本向量的分解式.

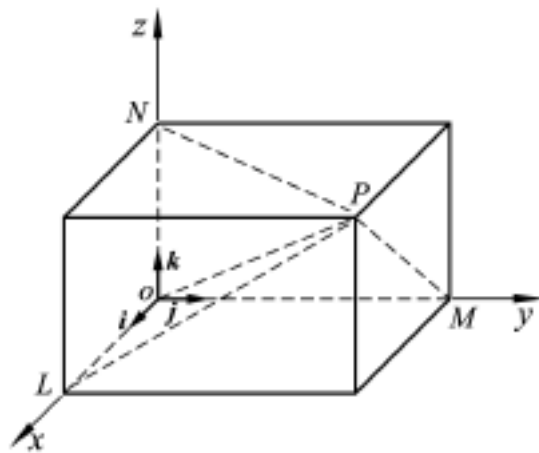


图 7—12

若空间内的向量始点不在坐标原点, 按我们前面所说自由向量的特性, 完全可以把该向量始点放置在坐标原点, 只要在移动该向量时保持其模和方向不变就行了.

由于向量始点都在坐标原点, 所以坐标系确立之后, 一个向量 OP 必然与它的终点 P 之间有了一一对应的关系, 而点 P 与它的坐标 (x, y, z) 之间也是一一对应的, 因此, 完全能够说向量 OP 与它按基本向量分解式的分解系数也是一一对应的. 我们把这个分解系数

x, y, z 就叫做向量 OP 的坐标, 记为 $\{x, y, z\}$.

即 $OP = \{x, y, z\}$

这就是向量的坐标表示式, 它同向量按基本向量的分解一样, 在向量的运算中有着重要的作用.

设 $OP_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $OP_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, 则 $OP_1 = x_1i + y_1j + z_1k$, $OP_2 = x_2i + y_2j + z_2k$. 依照向量加法, 数量与向量乘法的运算规律, 就有

$$P_1P_2 = OP_2 - OP_1,$$

$$P_1P_2 = (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k,$$

故 $P_1P_2 = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

同理, 若 $a = \{a_x, a_y, a_z\}$,

$$b = \{b_x, b_y, b_z\},$$

则 $a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$,

$$a = \{a_x, a_y, a_z\}.$$

即 $a + b = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j + (a_z + b_z)k$,

$$a = a_xi + a_yj + a_zk.$$

可见, 对向量进行加法、减法及与数的乘法运算, 只须对向量的各个坐标分别进行相应的运算就可以了.

例 3 两个非零向量 $a = \{x_1, y_1, z_1\}$ 、 $b = \{x_2, y_2, z_2\}$ 在同一直线上的充要条件是, 它们对应坐标的比相等.

证 若两向量共线, 则必有不为零的实数 λ , 使 $b = \lambda a$, 反之亦然. 这由数与向量乘法的意义不难理解.

由于 $\{x_2, y_2, z_2\} = \lambda \{x_1, y_1, z_1\} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$,

从而 $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$,

所以 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$.

例 4 已知 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 及 $P_1P = \lambda PP_2$ ($\lambda > -1$), 求分点 P 的坐标 (x, y, z) .

解 由已知条件可得

$$OP_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, OP_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, OP = \{x, y, z\},$$

所以 $P_1P = OP - OP_1 = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$,

$$PP_2 = OP_2 - OP = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\},$$

又由 $P_1P = \lambda PP_2$,

得 $\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} = \lambda \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$

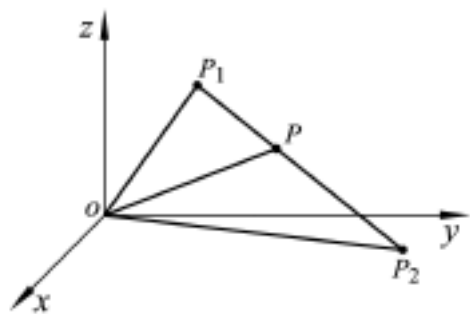


图 7—13

显然, 若 P 为 P_1P_2 的中点, 则 $\lambda = 1$, P 点的坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$.

向量用坐标表示之后, 它的模和方向也可以用坐标表示出来.

若此向量 $OP = \{x, y, z\}$ (图 7—14). 则其模 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, OP 的方向我们用 OP 与三条坐标轴正

向的夹角 α, β, γ 来表示. $0 \leq \alpha < \pi, 0 \leq \beta < \pi, 0 \leq \gamma < \pi$. 这三个角统称为向量 OP 的方向角.

不难得到

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

显然, 向量 OP 的方向角满足

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

例 5 已知空间两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 求向量 M_1M_2 的模、方向角及其单位向量.

解 因为 $M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = \{1, 3, 0\} - \{2, 2, \sqrt{2}\} = \{-1, 1, -\sqrt{2}\}$,

所以 $|M_1M_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$.

又有 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故 $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

设 M_1M_2 的单位向量为 a ; 则有

$$= \{ (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \},$$

从而

$$x - x_1 = (x_2 - x_1),$$

$$y - y_1 = (y_2 - y_1),$$

$$z - z_1 = (z_2 - z_1),$$

故 $x = \frac{x_1 + x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + z_2}{1 + \lambda}$.

显然, 若 P 为 P_1P_2

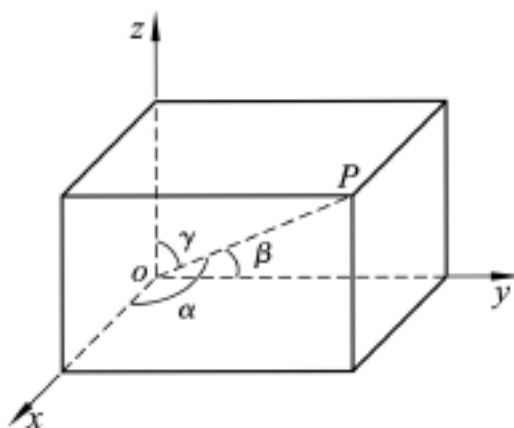


图 7—14

$$a \circ = \frac{M_1 M_2}{|M_1 M_2|} = \frac{1}{2} \{-1, 1, -\sqrt{2}\} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

四、向量间的乘法

向量与向量相乘时,从向量的实际意义出发,有不同的情况,需要分别加以讨论.

1. 两向量相乘的数量积

如同一物体在受到力 F (向量) 作用下沿直线从 P 点移动到 P' 点, 经过位移 $S = P'P$ (向量) 所做的功 W (数量) 当力 F 与位移 S 正方向的夹角为 $(0, \pi)$ 时, 有如下关系: $W = |F| |S| \cos \theta$ 一样, 我们把两个向量 a, b 的模和它们正方向夹角的余弦的乘积就叫做向量 a, b 的数量积(也称内积), 记为 $a \cdot b$ 或 ab . 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \quad (a, b).$$

这里 $\theta = (a, b)$ 表示向量 a, b 正向间的夹角. 显然 $0 \leq \theta \leq \pi$.

对于上述规定, 应当理解为从现实意义上看两个向量有时需要进行上述规定方式的运算, 而该运算的结果肯定是数量, 所以我们称这结果为两向量的数量积. 这种运算也随之叫做两向量的数乘运算或点乘运算.

由运算 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ 不难看到:

$$(1) \quad a \cdot a = |a|^2, \text{ 即 } a^2 = |a|^2.$$

这是因为 $(a, a) = 0$, 所以

$$a \cdot a = |a| |a| \cos 0 = |a|^2.$$

(2) 若 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $(a, b) = \frac{\pi}{2}$ 之一出现时, 必有 $a \cdot b = 0$; 反之, 若 $a \cdot b = 0$, 则必有 $a = 0$, 或 $b = 0$, 或 $(a, b) = \frac{\pi}{2}$ 成立. 由此可得:

定理 两个不等于零的向量互相垂直的充要条件是它们的数量积为零.

向量的点乘运算有如下运算规律:

- (1) 交换律 $a \cdot b = b \cdot a$;
- (2) 分配律 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- (3) 与数量相乘的结合律

$$(ka) \cdot b = a \cdot (kb) = k(a \cdot b).$$

例 6 证: 平行四边形对角线长的平方和等于它的各边边长的平方和.

证 如图 7—15. 平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $AB = a$, $AD = b$, $AC = m$, $DB = n$, 则有

$$m = a + b, n = a - b,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad m \cdot m &= (a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2, \\ n \cdot n &= (a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2, \end{aligned}$$

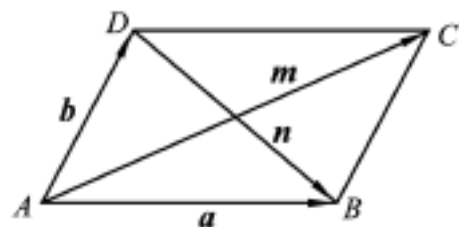


图 7—15

所以

$$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2),$$

即

$$|m|^2 + |n|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

如前所述, 向量用坐标表示以后, 它的模与方向可以用坐标计算, 向量间的加减法、数与向量的乘法能够运用坐标表示, 向量与向量的数量积也可以用坐标表示.

设

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

$$\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

即

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k},$$

按照数量积的运算规律, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x \mathbf{i} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_y \mathbf{j} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) + a_z \mathbf{k} \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i}^2 + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j}^2 + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \\ &\quad \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k}^2. \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 两两互相垂直, 所以 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$,

又由于 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 均为单位向量, 它们的模都等于 1, 所以 $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$,

从而

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

这就是两向量数量积的坐标表示式.

进而, 我们还可以得到这两个向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角的计算公式:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

这是因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 以及

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

和

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

所以, \mathbf{a}, \mathbf{b} 夹角余弦的坐标表示式成立.

由此夹角余弦公式, 我们还能有如下重要推论:

空间内两个向量 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 相互垂直的充要条件是

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

例7 在空间直角坐标系 $\{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 下, $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标为 $A(1, 1, 2), B(2, 1, 1), C(1, 2, 1)$, 求 $\triangle ABC$ 及这三角形的面积 $S_{\triangle ABC}$.

解 因为 $\mathbf{BA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OB} = \{1, 1, 2\} - \{2, 1, 1\} = \{-1, 0, 1\}$,

$$\mathbf{BC} = \mathbf{OC} - \mathbf{OB} = \{1, 2, 1\} - \{2, 1, 1\} = \{-1, 1, 0\},$$

所以

$$|\mathbf{BA}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$|\mathbf{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC} = (-1)(-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1,$$

故 $\cos \angle ABC = \cos (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}$.

因而有 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$,

和 $S_{\triangle ABC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \sin \angle ABC = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

这里要提醒大家特别注意的是, $\angle ABC$ 只能看做是向量 \overrightarrow{BA} 、 \overrightarrow{BC} 的夹角, 而绝不可以看做是向量 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{BC} 的夹角. 因为, 按照两向量夹角的定义, 应也是必须是两向量正方向所成的最小正角. 所以 $\angle ABC = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. 而 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BA} 方向相反, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ 则是 $\angle ABC$ 的补角.

2. 两向量相乘的向量积

现实生活中, 我们知道两个向量相乘的结果也可以是一个向量. 如, 物理学中的力矩 m 就是一个向量(图 7—16), 当力 f (向量) 的作用点是 A , 力臂 $OA = r$ (向量), 那么力矩 $m = r \times f$.

所以, 我们规定两个向量 a 乘 b 的向量积是一个向量, 记作 $a \times b$, 它的模为 $|a \times b| = |a| |b| \sin (a, b)$, 它的方向与 a 和 b 都垂直, 并且按 $a, b, a \times b$ 这个顺序适合右手规则(图 7—17).

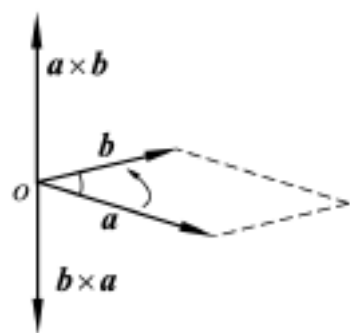


图 7—17

力矩与力臂、力的向量关系就是如此的, 所以, 我们对向量与向量相乘的向量积意义的规定是完全合理的.

向量与向量的向量积也叫做向量间的叉乘运算积.

因为平行四边形的面积等于它的两邻边边长的积再乘以这两边夹角的正弦, 所以, 两不共线向量 a 与 b 的向量积的模, 等于以 a, b 为边的平行四边形的面积.

由向量积的意义, 我们还可以看到一个很重要的结论:

两向量 a 与 b 共线的充要条件是 $a \times b = 0$.

这是因为, 若 a, b 共于一条直线, 则它们的夹角为 0 或 π , 从而 $|a \times b| = 0$, 即 $a \times b = 0$; 反过来, 当 $a \times b = 0$, 即 $|a| |b| \sin (a, b) = 0$, 必有 $a = 0$ 或 $b = 0$, 或 $a \parallel b$, 因为零向量可以看成与任何向量共线, 所以总有 $a \parallel b$.

向量的向量积还有如下运算规律:

(1) 两向量的向量积是满足反交换律的, 即

$$a \times b = - (b \times a),$$

(2) 两向量的向量积满足于数量因子的结合律, 即

$$(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b) = a \times (\lambda b),$$

式中 λ 为任意实数, a, b 为任意向量.

(3) 两向量的向量积对于向量满足分配律, 即

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c,$$

或

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b.$$

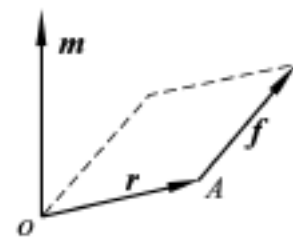


图 7—16