

全国高职、高专教育高等数学系列教材

# 高等数学

(上册)

主 编 刘书田

副主编 胡显佑 高旅端

编著者 刘书田 侯明华

北京 大学 出版 社

· 北 京 ·

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/刘书田,侯明华编著.-北京:北京大学出版社,2001.6

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05054-2

.高... .刘... 侯... .高等数学-高等学校:技术  
学校-教材 .013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 031067 号

书 名: 高等数学(上册)

著作责任者: 刘书田 侯明华 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05054-2/O · 0509

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 邮购部 62752019

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

印刷者: 北京大学印刷厂

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

850× 1168 32 开本 12 印张 300 千字

2001 年 6 月第 1 版 2003 年 7 月第 2 次修订

2003 年 9 月第 6 次印刷

印 数: 28001- 33000 册

定 价: 15.50 元

## 内 容 简 介

本书是全国高等职业、高等专科学校教育“高等数学”基础课教材。本书依照教育部颁布的高职、高专“高等数学”教学大纲，并结合作者多年来为经济类、管理类和工科类高职、高专学生讲授“高等数学”课所积累的教学经验编写而成。全书分上、下两册，供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用。上册共分五章，内容包括函数、极限、连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用；下册共分四章，内容包括微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数。书中加“\*”号的内容，对非工科类学生不讲授，仅对工科类学生讲授，有的内容任课教师可酌情选用。每章按节配置足够数量的习题，书末附有答案和必要的提示。为便于学生学习，书末附录给出了常用的数学公式、曲线图形。

本书作者长期为高职、高专学生讲授“高等数学”课，深知高职、高专学生在学习高等数学内容时的疑难与困惑，因此本书能针对学生的接受能力、理解程度按大纲要求讲述“高等数学”课的基本内容，叙述通俗易懂、例题丰富、图形直观、富有启发性，便于自学，注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养。

本书可作为高等职业、高等专科学校经济类、管理类和工科类学生“高等数学”课的教材，也可作为参加自学考试、文凭考试（仅用本书上册）、职大师生讲授和学习“高等数学”课程的教材或教学参考书。对数学爱好者本书也是较好的自学教材。

# 高职、高专教育高等数学系列 教材出版委员会

主任: 刘 林

副主任: 关淑娟

委员(以姓氏笔画为序):

刘 林	刘书田	刘雪梅	田培源
关淑娟	林洁梅	周惠芳	胡显佑
赵佳因	侯明华	高旅端	

## 全国高职、高专教育高等数学系列教材

微积分(经济类适用)	刘书田等编著	定价 13.50 元
微积分学习辅导(经济类适用)	刘书田等编著	定价 13.50 元
高等数学(上册)	刘书田等编著	定价 15.50 元
高等数学(下册)	刘书田等编著	定价 12.00 元
高等数学学习辅导(上册)	刘书田等编著	定价 13.00 元
高等数学学习辅导(下册)	刘书田等编著	定价 11.00 元
线性代数	胡显佑等编著	定价 9.00 元
线性代数学习辅导	胡显佑等编著	定价 9.00 元
概率统计	高旅端等编著	定价 12.00 元
概率统计学习辅导	高旅端等编著	定价 10.00 元

# 前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲,为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材.本套书分为教材三个分册:《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》;配套辅导教材三个分册:《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》,总共6分册.需要向任课老师和读者说明的是,《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用,上册需讲授64~68学时,下册需讲授32~36学时.书中加“\*”号的内容,对非工科类学生可不讲授,仅对工科类学生讲授,这些内容任课教师也可酌情选用.《线性代数》讲授30~32学时,《概率统计》讲授36~40学时.以上建议仅供授课老师参考.

编写本套系列教材的宗旨是:以提高高等职业教育教学质量为指导思想,以培养高素质应用型人才为总目标,力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此,我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求,在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用.本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣教学大纲,慎重选择教材内容.既考虑到高等数学本学科的科学性,又能针对高职班学生的接受能力和理解程度,适当选取教材内容的深度和广度;既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义,以使教学内容形象、直观,便于学生理解和掌握,并

达到“学以致用”的目的。

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同.辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写.教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上,独立解题的能力.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编 者

2001年5月于北京

## 修 订 说 明

根据教育部最新颁布的高等职业教育“高等数学课程教学基本要求”，以及使用本书的教师、同学反馈的意见，我们对全书内容进行了修订。此次修订主要是对部分重点内容进行调整，改写了一些定理的叙述和证明，增加了例题；对各节习题统一配置了“单项选择题”，并给出答案；删去了部分较难或繁琐的定理证明，给出直观的几何或物理解释。此次修订更正了原书中的排版、印刷错误。

编 者

2003年7月于北京

# 目 录

第一章	函数 · 极限 · 连续.....	(1)
§ 1.1	函数 .....	(1)
	一、实数概述 .....	(1)
	二、函数概念 .....	(5)
	三、函数的几何特性 .....	( )
	四、反函数 .....	( )
	习题 1.1 .....	( )
§ 1.2	初等函数 .....	( )
	一、基本初等函数 .....	( )
	二、复合函数 .....	( )
	三、初等函数 .....	( )
	习题 1.2 .....	( )
§ 1.3	极限概念 .....	( )
	一、数列的极限 .....	( )
	二、函数的极限 .....	( )
	三、无穷小与无穷大 .....	( )
	四、极限的性质 .....	( )
	习题 1.3 .....	( )
§ 1.4	极限运算 .....	( )
	一、极限运算法则 .....	( )
	二、两个重要极限 .....	( )
	三、无穷小的比较 .....	( )
	习题 1.4 .....	( )
§ 1.5	函数的连续性 .....	( )
	一、连续性概念 .....	( )

	二、连续函数的运算性质 .....	( )
	三、初等函数的连续性 .....	( )
	四、闭区间上连续函数的性质 .....	( )
	习题 1.5 .....	( )
§ 1.6	曲线的渐近线 .....	( )
	习题 1.6 .....	( )
<b>第二章</b>	<b>导数与微分</b> .....	( )
§ 2.1	导数概念 .....	( )
	一、两个实例 .....	( )
	二、导数概念 .....	( )
	习题 2.1 .....	( )
§ 2.2	初等函数的导数 .....	( )
	一、导数公式与运算法则 .....	( )
	二、高阶导数 .....	( )
	习题 2.2 .....	( )
§ 2.3	隐函数的导数 · * 由参数方程 所确定的函数的导数 .....	( )
	一、隐函数的导数 .....	( )
	* 二、由参数方程所确定的函数的导数 .....	( )
	习题 2.3 .....	( )
§ 2.4	微分 .....	( )
	一、微分概念 .....	( )
	二、微分计算 .....	( )
	* 三、微分的应用 .....	( )
	习题 2.4 .....	( )
§ 2.5	边际概念 · 函数的弹性 .....	( )
	一、经济学中常见的几个函数 .....	( )
	二、边际概念 .....	( )
	三、函数的弹性 .....	( )
	习题 2.5 .....	( )

<b>第三章</b>	<b>中值定理·导数应用</b>	( )
§ 3.1	微分中值定理	( )
	习题 3.1	( )
§ 3.2	洛必达法则	( )
	习题 3.2	( )
§ 3.3	函数的单调性与极值	( )
	一、函数单调性的判别法	( )
	二、函数的极值	( )
	习题 3.3	( )
§ 3.4	曲线的凹向与拐点·函数作图	( )
	一、曲线的凹向与拐点	( )
	二、函数作图	( )
	习题 3.4	( )
§ 3.5	最大值与最小值及应用问题	( )
	一、函数的最大值与最小值	( )
	二、几何应用问题	( )
	三、经济应用问题	( )
	习题 3.5	( )
* § 3.6	曲线的曲率	( )
	一、曲线的曲率	( )
	二、曲率圆	( )
	习题 3.6	( )
<b>第四章</b>	<b>不定积分</b>	( )
§ 4.1	不定积分概念与性质	( )
	一、不定积分概念	( )
	二、不定积分的性质	( )
	三、基本积分公式	( )
	习题 4.1	( )
§ 4.2	换元积分法	( )
	一、第一换元积分法	( )

	二、第二换元积分法 .....	( )
	习题 4.2 .....	( )
§ 4.3	分部积分法 .....	( )
	习题 4.3 .....	( )
<b>第五章</b>	<b>定积分及其应用</b> .....	( )
§ 5.1	定积分概念与性质 .....	( )
	一、两个实例 .....	( )
	二、定积分概念 .....	( )
	三、定积分的性质 .....	( )
	习题 5.1 .....	( )
§ 5.2	定积分的计算 .....	( )
	一、微积分学基本定理 .....	( )
	二、定积分的换元积分法 .....	( )
	三、定积分的分部积分法 .....	( )
	习题 5.2 .....	( )
§ 5.3	广义积分 .....	( )
	一、无限区间上的积分 .....	( )
	* 二、无界函数的积分 .....	( )
	习题 5.3 .....	( )
§ 5.4	定积分的应用 .....	( )
	一、微元法 .....	( )
	二、定积分的几何应用 .....	( )
	* 三、定积分的物理应用 .....	( )
	四、积分学在经济中的应用 .....	( )
	习题 5.4 .....	( )
附录一	初等数学中的常用公式 .....	( )
附录二	双曲函数和反双曲函数 .....	( )
附录三	常见的一些曲线的图形 .....	( )
	习题参考答案与提示 .....	( )

# 第一章 函数 · 极限 · 连续

函数是高等数学最基本的概念.本章从讨论函数概念开始,通过对一般函数特性的概括,并引进本教材主要讨论的初等函数,为学习“高等数学”打下基础.

极限与连续也是高等数学最基本的概念.在高等数学中,极限是深入研究函数和解决各种问题的基本思想方法.为了便于理解和掌握极限概念,我们从讨论一种最简单的情况——数列的极限入手,进而讨论函数的极限.函数的连续性与函数的极限密切相关,这里要讨论函数连续性概念和连续函数的重要性质.连续函数是高等数学中着重研究的一类函数.

## § 1.1 函 数

### 一、实数概述

高等数学主要在实数范围内研究函数,我们先讲述学习本课程必须具备的一些实数知识.

#### 1. 实数与数轴

实数由有理数与无理数两大类组成.有理数包括零、正负整数和正负分数.有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$  ( $p, q$  为整数,  $q \neq 0$ )表示,也可用有限小数或无限循环小数表示.无限不循环小数是无理数.全体实数构成的集合称为实数集,记作  $R$ .

若在一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点,标以  $O$ ,指定一个方向为正方向(通常把指向右方为正方向),并规定一个单位长度,则称这样的直线为数轴.任一实数都对应数轴上惟一的一

点;反之,数轴上每一点都唯一地表示一个实数.正由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系,所以在以下的叙述中,将把“实数  $a$ ”与“数轴上的点  $a$ ”两种说法看作有相同的含义,而不加以区别.

## 2. 实数的绝对值

设  $a$  是一个实数,则记号  $|a|$  称为  $a$  的绝对值,定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

例如,数 0 的绝对值  $|0| = 0$ ; 数  $5 (5 > 0)$  的绝对值  $|5| = 5$ ; 数  $-5 (-5 < 0)$  的绝对值  $|-5| = -(-5) = 5$ .

数  $a$  的绝对值  $|a|$  的几何意义: 在数轴上,  $|a|$  表示点  $a$  到原点的距离. 不论点  $a$  在原点的左侧 ( $a < 0$ ), 还是点  $a$  在原点的右侧 ( $a > 0$ ), 还是在原点 ( $a = 0$ ), 都如此 (图 1-1).

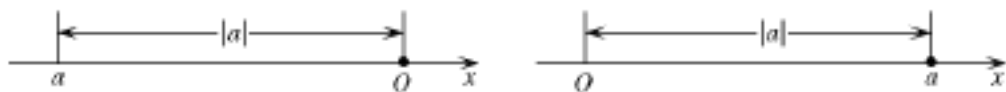


图 1-1

设  $a, b$  是两个实数,则由上述绝对值的定义可得

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & a \geq b, \\ b - a, & a < b. \end{cases}$$

由绝对值的定义,易得下列绝对值的性质:

- (1)  $|a| = \sqrt{a^2}$ ;
- (2)  $|a| = |-a| \geq 0$ , 当且仅当  $a = 0$  时等号成立;
- (3)  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

这是因为

当  $a < 0$  时,有  $-|a| = a < |a|$ ;

当  $a > 0$  时,有  $-|a| < a = |a|$ ;

当  $a = 0$  时,有  $-|a| = a = |a|$ .

将上三式合并在一起,就是  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

(4) 设  $h > 0$ , 则

$|a| < h$  等价于不等式  $-h < a < h$ ;

$|a| > h$  等价于不等式  $a < -h$  或  $a > h$ .

从绝对值的几何意义看(图 1-2), 这个性质是显然的. 因  $|a| < h$  表示到原点的距离小于  $h$  的所有点  $a$  的集合; 而这正是不等式  $-h < a < h$  的几何说明. 同样可解释后一个等价的关系式(图 1-3).

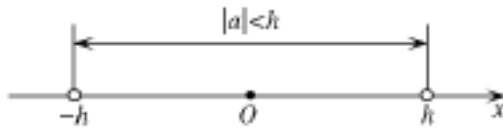


图 1-2

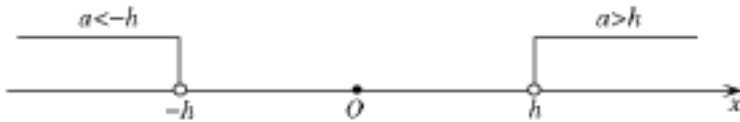


图 1-3

(5) 对实数  $a, b$  有不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq ||a| - |b||,$$

即和的绝对值不大于各项绝对值的和, 差的绝对值不小于各项绝对值的差.

(6) 对实数  $a$  和  $b$ , 有等式

$$|a \cdot b| = |a| |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0),$$

即乘积的绝对值等于绝对值的乘积, 商的绝对值等于绝对值的商.

例 1 解绝对值不等式  $|x - 5| < 3$ .

解 根据绝对值的性质(4), 由  $|x - 5| < 3$  得

$$-3 < x - 5 < 3 \quad \text{即} \quad 2 < x < 8.$$

由图 1-4 知,  $|x - 5| < 3$  的几何意义是, 表示数轴上与点 5 的距离小于 3 个单位的所有点  $x$  的集合.

一般言之,  $|x - x_0|$  表示两点  $x$  与  $x_0$  之间的距离; 而  $|x - x_0|$

$< h (h > 0)$  则表示数轴上到点  $x_0$  的距离小于  $h$  个单位的所有点  $x$  的集合(图 1-5) .



图 1-4

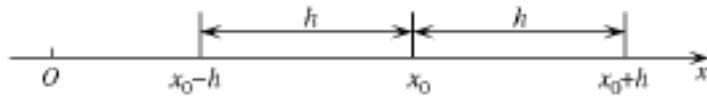


图 1-5

例 2 解绝对值不等式  $|x + 1| \geq 2$  .

解 根据绝对值的性质(4), 由  $|x + 1| \geq 2$  得

$$x + 1 \leq -2 \quad \text{或} \quad x + 1 \geq 2,$$

即

$$x \leq -3 \quad \text{或} \quad x \geq 1 .$$

由上述结果表明,  $|x + 1| \geq 2$  的几何意义是, 表示数轴上与点  $-1$  的距离不小于 2 个单位的所有点  $x$  的集合 .

一般言之,  $|x - x_0| \geq h (h > 0)$  表示数轴上到点  $x_0$  的距离不小于  $h$  个单位的所有点  $x$  的集合 .

### 3 . 区间

#### (1) 区间

区间可理解为实数集  $R$  的子集 . 区间分为有限区间和无限区间 .

有限区间 设  $a, b \in R$ , 且  $a < b$ (图 1-6) .

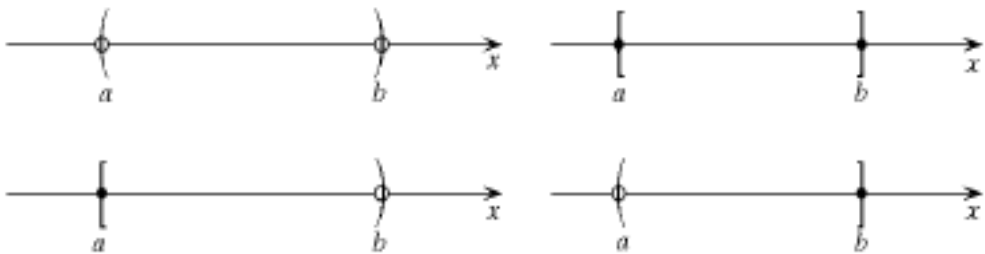


图 1-6

集合  $\{x | a < x < b\}$  可记作  $(a, b)$ , 称为以  $a, b$  为端点的开区

间 .

集合  $\{x \mid a \leq x \leq b\}$  可记作  $[a, b]$ , 称为以  $a, b$  为端点的闭区间 .

集合  $\{x \mid a \leq x < b\}$  和  $\{x \mid a < x \leq b\}$  可记作  $[a, b)$  和  $(a, b]$ , 这是半开区间 .

以上各有限区间的长度都为  $b - a$  .

无限区间

集合  $\{x \mid a < x < +\infty\} = \{x \mid a < x\}$ , 记作  $(a, +\infty)$ , 这是无限区间; 类似的记号  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$  都是无限区间; 实数集  $R$  记作  $(-\infty, +\infty)$  .

本教材在以后的叙述中, 若我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时, 将用字母  $I$  表示这样一个泛指区间 .

## (2) 邻域

设  $\delta$  为某一个正数, 称开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  为点  $x_0$  的邻域,  $x_0$  称为邻域的中心,  $\delta$  称为邻域的半径. 邻域的长度为  $2\delta$ , 点  $x_0$  的邻域用不等式表示为 (图 1-7)

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \text{或} \quad |x - x_0| < \delta .$$

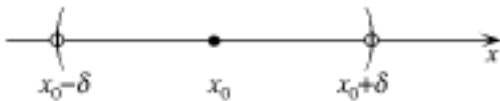


图 1-7

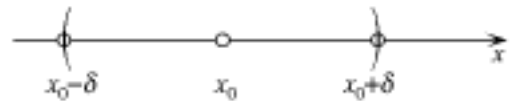


图 1-8

若把邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  中的中心点  $x_0$  去掉, 由余下的点构成的集合, 称为点  $x_0$  的空心邻域, 常表示为 (图 1-8)

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{或} \quad 0 < |x - x_0| < \delta .$$

## 二、函数概念

### 1. 函数的定义

在我们的周围, 变化无处不在. 我们所看到的事物都在变化. 这些变化着的现象中的许多现象可以用数学有效地来描述. 其中,

有一些变化着的现象中存在着两个变化的量,简称变量.这两个变化着的量不是彼此孤立的,而是相互联系、相互制约的.观察下面的例子.

例 3 圆的半径  $r$  和它的面积  $A$  之间有关系

$$A = \pi r^2 \quad (r > 0),$$

其中,  $r$  和  $A$  是变量,只要  $r$  取定一个正数值,面积  $A$  就有一个确定的值与之对应.因此,上述公式表明了变量  $r$  和  $A$  之间的数量关系.

例 4 在气象观测站,气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上,如图 1-9 所示的曲线.曲线上某一点  $P_0(t_0, \theta_0)$  表示时刻  $t_0$  的气温是  $\theta_0$ .观察这条曲线,可以知道在这一天内,时间  $t$  从 0 点到 24 点气温的变化情形.时间  $t$  和气温  $\theta$  都是变量,这两个变量之间的数量关系是由一条曲线确定的.

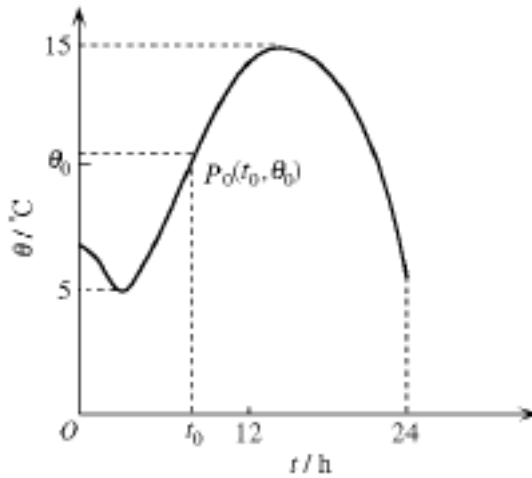


图 1-9

例 5 银行储蓄,1 年定期整存整取,年利率为 2.25%,存款金额与一年所得利息列表如下:

存款金额 $k$ (元)	100	500	1000	2000	5000	10000
一年利息 $r$ (元)	2.25	11.25	22.5	45	112.5	225

存款金额  $k$  和 1 年所得利息  $r$  都是变量.由该表,已知表中列