高 等 数 学(上)

杨盛祥　主 编

陈　琳　颜文勇　副主编
杨　元　主审

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括:极限与连续,导数的概念,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程,向量代数与空间解析几何。书后还附有积分表、常用数学公式及习题答案。

本书适宜于高职高专类学校工科各专业学生学习使用,也可供有关工程技术人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 .上/ 杨盛祥主编 .—重庆:重庆大学出版社,2003 .6

ISBN 7-5624-2812-3

Ⅰ.高 ... Ⅱ.杨 ... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 031655 号

高 等 数 学(上)

杨盛祥 主编

陈 琳 颜文勇 副主编

杨 元 主审

责任编辑:谭 敏 版式设计:谭 敏

责任校对:任卓惠 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400044

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆璧山印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:12.25 字数:305 千

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5624-2812-3/O·219 定价:16.00 元

前言

本教材是以1996年国家教委组织制定的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》为依据,由具有丰富的高职高专教学经验的教师编写而成. 由于高职高专类学校所设专业较多,为了适合不同专业、不同层次的教学,编写教师根据多年的教学经验,对教学内容进行了较为恰当的处理. 该教材具有以下特点:

1. 极限理论以描述性定义为主线,对数学要求不高而教学时数又少的专业,讲解极限时可完全采用描述性定义. 教材中函数的极限部分,仅对 $x\to x_0$ 的情形既给出了描述性定义又给出了精确定义(即 ε-δ 定义). 这样处理后,使抽象的 ε - δ 语言有了具体意义,教学实践证明,这种方式与单纯只讲精确定义的方式相比,前者令学生更容易接受,对大部分专业,教学时可采用这种模式. 这样处理的另一个好处是,尽管只对 $x\to x_0$ 这一种情形介绍了精确定义,但对极限理论中的重要结论,如极限与无穷小的关系定理、无穷小的性质以及极限的运算法则等都可以证明了.

2. 由于高职高专类学校的学生数学基础参差不齐,为了适应不同层次的教学,教材中对习题的编排采用了由浅入深、循序渐进、逐步深入的原则. 例如,对导数部分的习题,首先设计了一些题型用以熟悉函数的导数以及函数在给定的导数的四种记号,熟悉已推出的导数公式. 然后编写一些用来熟悉导数的四则运算法则,但同时又能巩固导数公式的习题. 最后选取复合函数的导数的习题时,又考虑到巩固所有的导数公式及四则运算法则. 许多学生想问"学习导数有什么用",导数的应用这一章非常明确地回答了这一问题,同时,该章的内容、习题的选取仍然没有忘记巩固导数的公式及运算法则. 通过这种螺旋式的循环,使学生对重点内容达到熟练掌握的程度.

3. 本教材中编入了导数及定积分在经济管理以及其他领域中的应用,这样既拓宽了教材的使用范围,又增强了数学课与专业课之间的联系.

4. 大部分高职高专类学校都存在教学内容多而教学时数少的矛盾,为了解决这一矛盾,编写教材时既考虑到要符合教学要求,又照顾了在实际教学时的可操作性,对后续课程没有影响或影响不大的内容做了适当的删减. 比较典型的是空间解析几何中建立平面方程、直线方程,研究平面与平面、直线与直线以及直线与平面的夹角的内容,这些知识的学习对逻辑推理能力、空间想象能力的提高是非常有用的,但是删除这些内容不会影响多元函数微积分内容的学习. 通过削枝强干、删繁就简,希望在较少的时间内尽可能完成教学要求的主要内容.

参加编写的教师有杨盛祥(编写第 1 章、第 8 章及第 10 章)、陈琳(编写第 2 章及第 11 章)、成和平(编写第 3 章)、洪洁(编写第 4 章及第 9 章)、颜文勇(编写第 5 章及第 6 章)、陈晓敏(编写第 7 章).

西南交通大学杨元教授仔细审阅了全书,在此表示衷心感谢.

由于我们的水平有限,时间仓促,错误在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2003 年 3 月

数学发展简介

高等数学通常仅是相对初等数学而言的,其内容并无确切所指,作为高等学校教学科目的高等数学,通常包含微积分、微分方程、解析几何及级数的初步知识．高等数学主要产生于17世纪,18世纪发展成熟．高等数学建立过程中第一个决定性的步骤是解析几何的创立,这一时期的杰出人物是笛卡尔和费尔马．法国数学家笛卡尔把变量引入数学,建立了数和形之间的关系,这样,运用所有的代数方法解决几何问题成为可能．笛卡尔的同胞费尔马具体地研究了直线、圆和其他圆锥曲线的方程,发现了坐标轴可以平移、旋转,并以此来简化方程．17世纪后半期,英国数学家、物理学家牛顿从物理观点出发来研究数学,从而创立了微积分学．德国数学家莱布尼兹则是从几何问题(如曲线的切线,面积等)入手,提出了微积分的基本概念．微积分在18世纪得到了巨大的发展,沿着牛顿、莱布尼兹开创的道路,经过许多数学家(如拉格朗日、柯西、达朗贝尔、拉普拉斯、斯托克斯、维尔斯特拉斯等)的共同努力,使微积分的理论逐渐完善、严密,应用更加广泛．

中国是一个有着悠久历史和灿烂文化的文明古国,中国古代的四大发明曾经极大地推动了世界文明的进步．同样,作为中国文化的重要组成部分,中国古代数学,由于其自身的历史渊源和独特的发展过程,形成了与西方迥然不同的风格,成为世界数学发展的历史长河中的一支不容忽视的源头．根据古籍记载、考古发现及其他文字资料推测,至少在公元前3000年左右,在中华古老的土地上就有了十进位记数法,开始使用分数及几何工具规和矩．庄子关于极限的论述“一尺之棰,日取其半,万世不竭”更是世界数学史早期最光辉的数学思想之一,与西方17世纪才提出的无穷小的概念相比,早2 000多年．三国时期的刘徽对《九章算术》做了最好的注释,他为了计算圆周率提出了“割圆术”,在中国数学史上,首次将极限概念用于近似计算,刘徽是中国早期对数学理论进行了深入研究的最杰出的数学家之一．南北朝时期的祖冲之最杰出的成就是关于圆周率的计算,他把这一重要的数值精确到小数点后第6位,这一关于π的近似值的世界记录被祖冲之保持了近一千年,他儿子祖暅提出的“祖暅原理”,直到1 100多年后才由意大利数学家卡瓦列发现．宋元时期中国基本上是以代数为主要研究对象,这一时期,关于高次方程的数值解法、线性方程组的解法、高阶等差数列、组合数学等,都达到了当时世界的最高水平．宋元高峰时期出现了许多杰出人物,秦九韶研究的同余式问题,其成果已灿烂夺目,直到500年后,经瑞士数学家欧拉、法国数学家拉格朗日和德国数学家高斯三代巨匠前后60多年的努力,才比较系统地建立起一次同余式的理论．南宋末期的杨辉比西方早半

个世纪提出了杨辉三角形(西方称之为帕斯卡三角形),元代数学家朱世杰对四元高次方程组提出的"相消法",近500年后才由法国的贝佐特给出了初步方案.遗憾的是,明清时期的统治阶级为了维护其统治地位,规定科举制必须采用"八股"文体,而鄙夷天文、数学等专门学问为"奇技淫巧",加上生产水平低下与数学理论高度发展相脱节的实际状况,致使中国数学由宋元时期的蓬勃发展而走向衰落.当我们准备学习西方数学家创立的微积分时,看到中国古代数学的辉煌和近代与西方的差距是非常必要的.

目录

第 1 章 极限与连续

极限的方法是研究变量的一个基本方法,高等数学中许多重要概念是用极限的方法建立起来的. 本章主要介绍极限和函数的连续性等概念.

1.1 函数

一、邻域

在研究函数的时候,经常要用到邻域这个概念.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 叫做邻域 $U(a,\delta)$ 的中心,δ 叫做邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于 $a-\delta<x<a+\delta$,所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

由此看出,点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 就是以点 a 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ (图1-1).

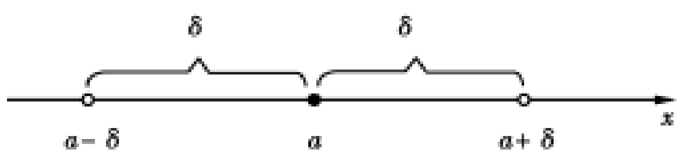


图 1-1

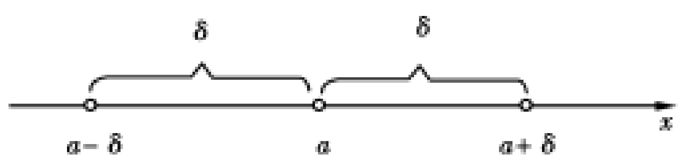


图 1-2

由上面的分析可知,变量 x 在点 a 的 δ 邻域内取值,实际上就是指变量 x 在开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 内取值.

另外一种常见的邻域称为点 a 去心的 δ 邻域,记作 $U(\hat{a},\delta)$,即

$$U(\mathring{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

点 a 去心的 δ 邻域就是开区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$(图 1-2).

二、初等函数

1. 基本初等函数及其图像

以下 5 类函数称为基本初等函数:

(1)幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数);

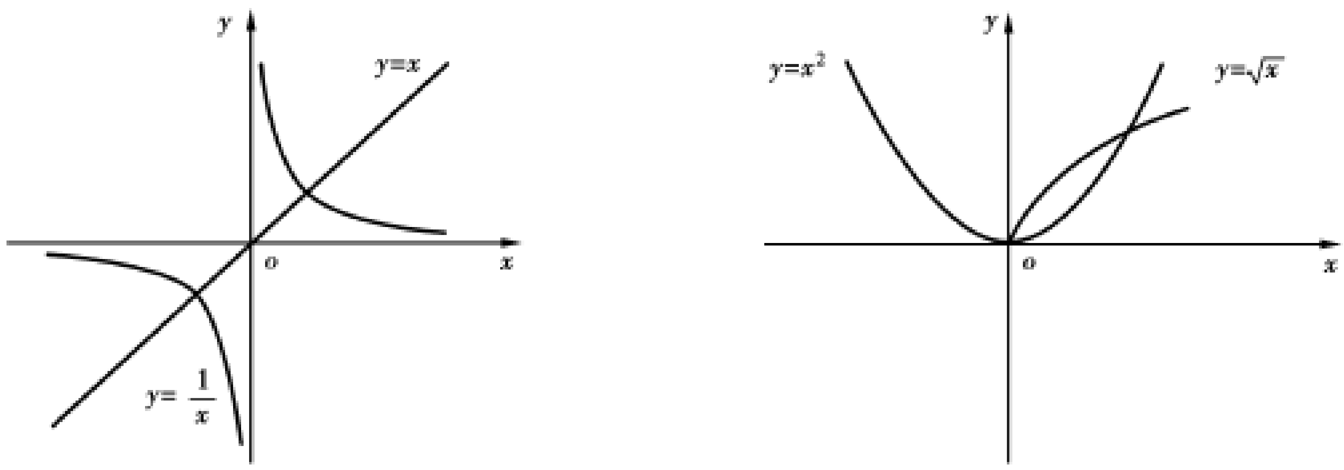
(2)指数函数 $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$);

(3)对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$);

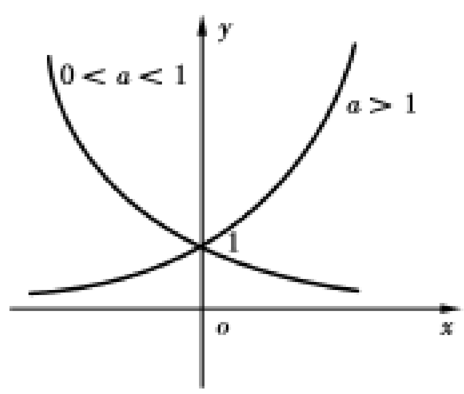
(4)三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$;

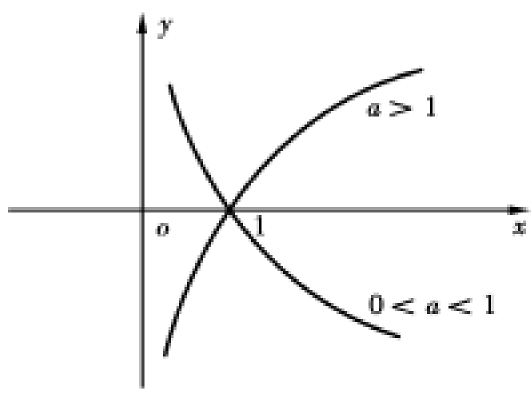
(5)反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数的图像如图 1-3 所示.

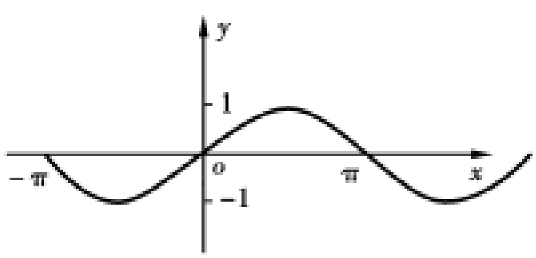


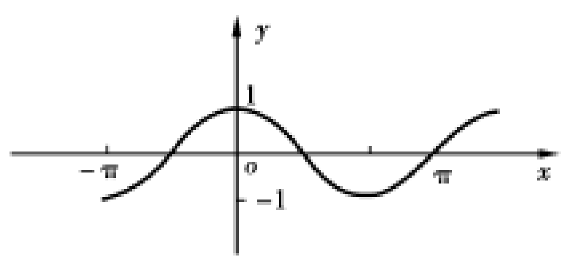
(a)幂函数 $y=x^{\mu}$ $\mu=1,-1,2,\frac{1}{2}$



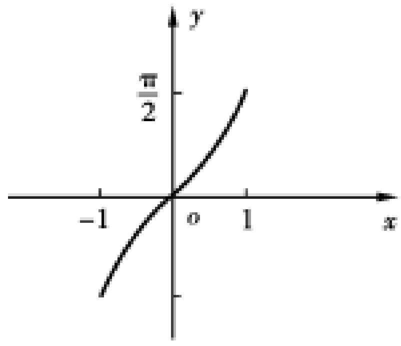


(b)指数函数 $y=a^{x}$ (c)对数函数 $y=\log_a x$

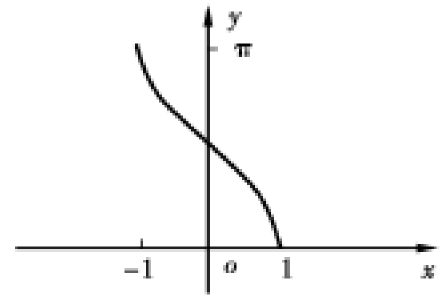




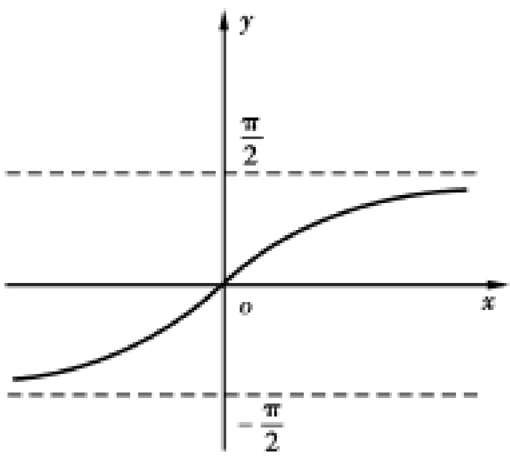
(d)正弦函数 $y=\sin x$ (e)余弦函数 $y=\cos x$



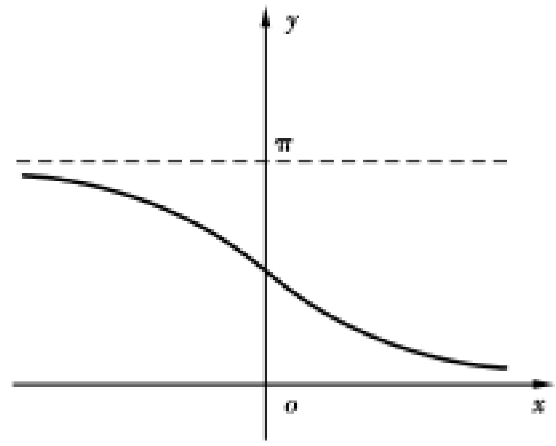
(f)反正弦函数 $y = \arcsin x$



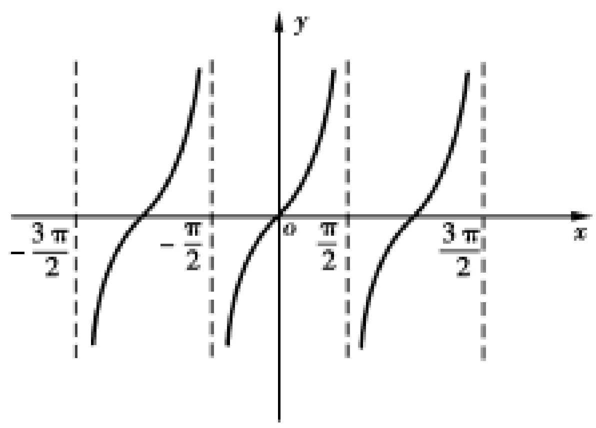
(g)反余弦函数 $y = \arccos x$



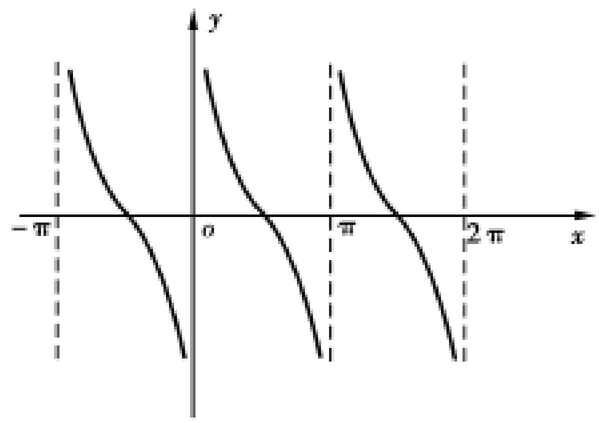
(h)反正切函数 $y = \arctan x$



(i)反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



(j)正切函数 $y = \tan x$



(k)余切函数 $y = \cot x$

图 1-3

2. 复合函数

实际问题中遇到的函数,可能是由基本初等函数经过了一系列四则运算得到的,也可能是由基本初等函数复合而成的.

例如 $y = \sqrt{\lg x}$就是由 $y = \sqrt{u}$, $u = \lg x$ 复合而成的,其中 u 是中间变量. 这里函数 $u = \lg x$ 的定义域是$(0, +\infty)$,但是为了使函数 $y = \sqrt{u}$有意义, x 只能在区间$[1, +\infty)$取值,从而保证由 $y = \sqrt{u}$, $u = \lg x$ 复合而成的函数 $y = \sqrt{\lg x}$有意义,即 $y = \sqrt{\lg x}$的定义域是$[1, +\infty)$.

一般地,设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$,如果当 x 在 D 内取值时,由函数 $u = \varphi(x)$所得到的 u 的所有值都使函数 $y = f(u)$有意义,则变量 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数,这个函数称为由函数 $y = f(u)$及 $u = \varphi(x)$复合而成的复合函数,记作

$$y = f[\varphi(x)]$$

必须注意,并不是任意两个函数都可以复合成一个函数. 例如 $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就

不能复合成一个复合函数. 因为无论 x 取什么值,由函数 $u = 2 + x^2$ 所得到的 u 的值都使函数 $y = \arcsin u$ 没有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如,函数 $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$ 是由 $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \sin w$, $w = \frac{1}{x}$ 复合而成.

3. 初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数,叫做初等函数.

例如 $y = \sqrt{3 - x} + \arctan \frac{1}{x}$, $y = e^{2x}\sin\omega x$, $y = \sqrt{x^2} = |x|$ 都是初等函数.

三、分段函数

有些函数在定义域的不同范围内具有不同的表达式,这样的函数叫做分段函数.

例 1　旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品,超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每 kg 交费 0.20 元,超过 50kg 的部分每 kg 交费 0.30 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

解　设物品重量为 $x$kg,应交运费为 y 元,则所求的函数关系是一个分段函数.

当 $0 \leq x \leq 20$ 时, $y = 0$

当 $20 < x \leq 50$ 时, $y = 0.2(x - 20) = 0.2x - 4$

当 $x > 50$ 时, $y = 0.2(50 - 20) + 0.3(x - 50) = 0.3x - 9$

因此,所求的函数关系为

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 20 \\ 0.2x - 4, & 20 < x \leq 50 \\ 0.3x - 9, & x > 50 \end{cases}$$

注意:此函数尽管由 3 个表达式给出,但实际上它是一个函数,其定义域是 $[0, +\infty)$.

例 2　在电学中常遇到各种波形,图 1-4 就是一种三角波的波形. 写出电压 U 与时间 t 在一个周期内的函数关系.

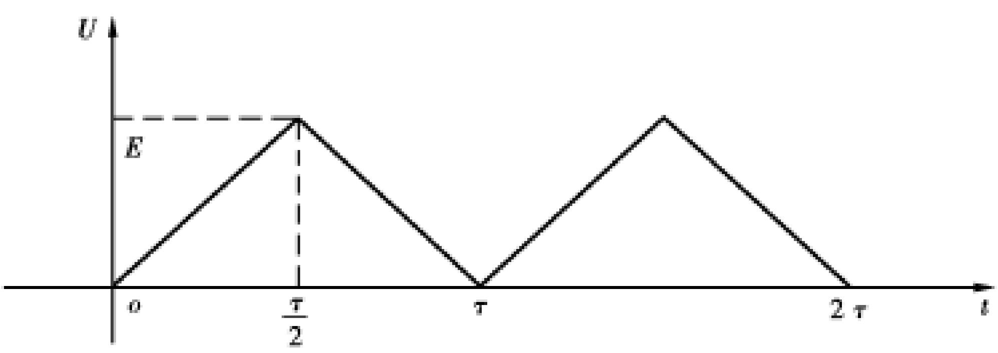


图 1-4

解　由所给波形知道这是一个以 τ 为周期的周期函数.

当 $0 \leq t < \frac{\tau}{2}$ 时, U 和 t 的函数关系由连接 $(0,0)$ 点与 $\left(\frac{\tau}{2}, E\right)$ 点的线段的方程 $U = \frac{2E}{\tau}t$ 所决定.

当 $\frac{\tau}{2} \leq t < \tau$ 时, U 和 t 的函数关系由连接 $\left(\frac{\tau}{2}, E\right)$ 点与 $(\tau, 0)$ 点的线段的方程

$$U = \frac{E-0}{\frac{\tau}{2}-\tau}(t-\tau) \text{ 即 } U = -\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$$

决定. 因此在一个周期内, U 与 t 的函数关系为

$$U = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}t, & 0 \le t < \frac{\tau}{2} \\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & \frac{\tau}{2} \le t < \tau \end{cases}$$

1.2　数列的极限

三国时期的刘徽,为求圆的面积和圆周率创造了"割圆术". 他用圆内接正多边形当边数无限增多时来逼近圆(图 1-5).

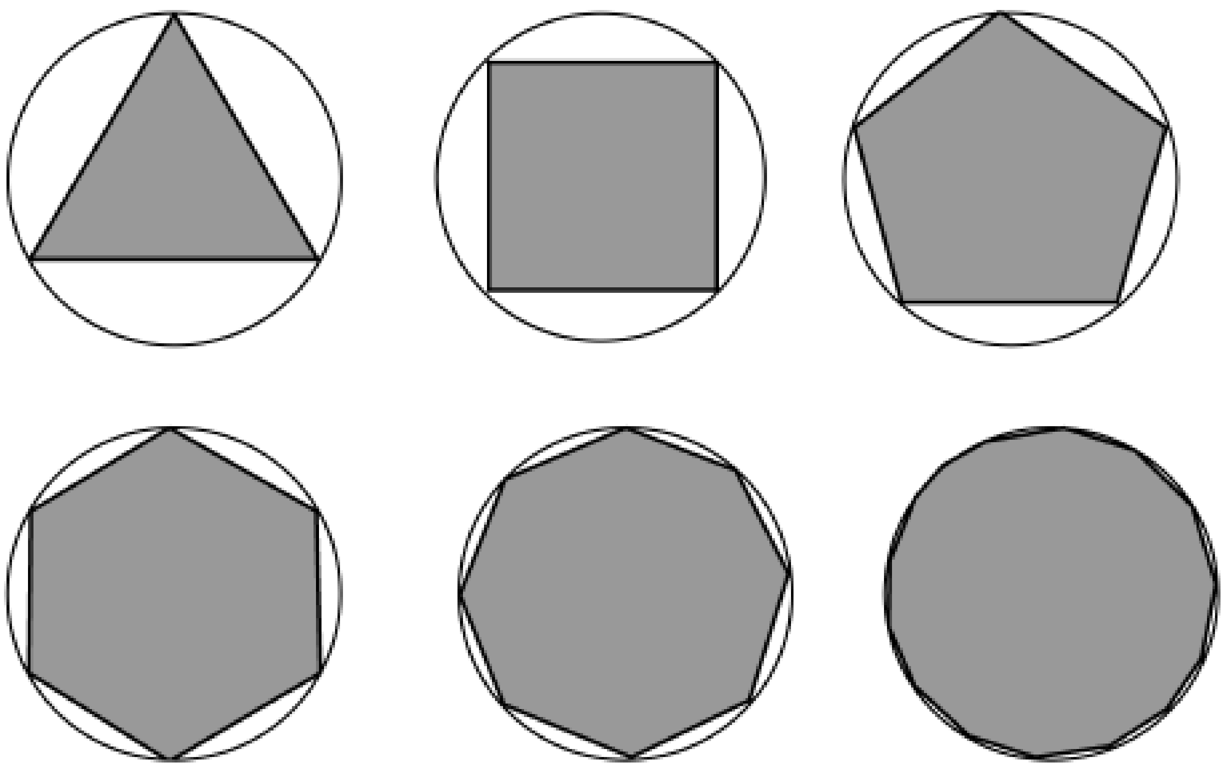


图 1-5

刘徽的"割圆术"是极限法的最直观的描述.

一、数列

例 1　我国战国时代哲学著作《庄子》里有一句话:"一尺之棰,日取其半,万世不竭". 这句话的意思是说:"有一根一尺长的木棒,如果第一天截取它的一半,而以后每天截取前一天剩余的一半,那么这根木棒是永远截不完的."

可以依次写出第一天、第二天、…、第 n 天、…的剩余量

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

这样得到的一列数称为数列.

一般地,如果按照某一法则,可以得到第一个数 x_1,第二个数 x_2, …这样依次排列着,使得

对应于任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n,那么,这列有次序的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 就叫做数列.

数列中的每一个数叫做数列的项,第 n 项 x_n 叫做数列的一般项,如果知道了数列的一般项 x_n,让 n 依次取一切自然数就可以得到这个数列,因此,常用数列的一般项 x_n 来代表这个数列. 例如,数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 就可以表示例 1 中的数列.

下面给出一些数列并分析它们的项 x_n 随项数 n 变化的情况:

$x_n=1+\frac{1}{n}$,　　即 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1+\frac{1}{n}, \cdots$

$x_n=2^n$,　　即 $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

$x_n=(-1)^{n+1}$,　　即 $1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

在数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$ 中,当项数 n 无限增大时,数列所对应的项 $1+\frac{1}{n}$ 与常数 1 无限接近,这种情形,称常数 1 为数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$ 的极限. 而在数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 中,当项数 n 无限增大时,$(-1)^{n+1}$ 不与某个确定的常数无限接近,这时称数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ 没有极限. 同样,数列 $x_n=2^n$ 也无极限.

二、数列的极限

根据上面的分析,可以给出数列极限的描述性定义.

定义 1　设 x_n 是一个数列,a 是一个常数,若当 n 无限增大时,x_n 无限趋近于数 a,则称数列 x_n 收敛,并称常数 a 为数列 x_n 的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a \quad (n\to\infty)$$

如果数列不收敛,就称数列发散.

例如,数列 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 是收敛的,其极限为 0,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

数列 x_n 可看做数轴上的动点,例如 $x_n=1+\frac{1}{n}$ 可用数轴上的点表示出来(图 1-6).

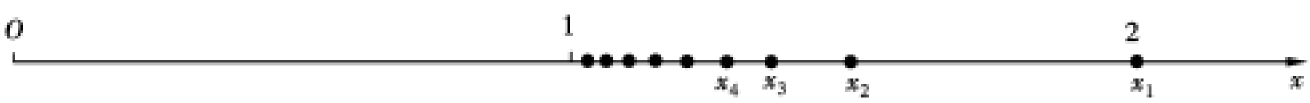


图 1-6

数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$ 以常数 1 为极限. 在几何上即动点 x_n 变到一定时刻后,它与定点 1 之间的距离无限接近.

上面所给出的极限的描述性定义中,用到了"无限增大","无限趋近"这样一些不确切的语言,这样定义虽然直观,容易理解,但不便于推理,为了建立较严密的极限理论,可以将上述描述性定义中的不确切语言用数学语言来描述.

在数列 $x_n=1+\frac{1}{n}$ 中,动点 x_n 与定点 1 的距离无限接近,即 $|x_n-1|$ 任意小,这就是说,要使

$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{10}$,只要 $n>10$ 就行了,即从第 11 项开始,后面的所有项 $x_{11},x_{12},x_{13},\cdots$, $x_n,\cdots$都能使不等式$\left|x_n-1\right|<\frac{1}{10}$成立. 同样,

要使　$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$,　　只要 $n>100$

要使　$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{1\ 000}$,　　只要 $n>1\ 000$

…

现在,用 ε表示任意的正数(无论它多么小),

要使　$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$,　　只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

这样一来,$x_n=1+\frac{1}{n}$与常数 1 无限接近,就可以换成$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|<\varepsilon$这样一个数学式子来描述,而 n 无限增大则可以用 $n>\frac{1}{\varepsilon}$这一数学式子描述. 用$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$是正整数$(0<\varepsilon<1)$. 于是 n 无限增大又可用 n 大于某个正整数 N 来描述$\left(\text{此例中 } N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$. 通过以上分析,可以得到数列极限的精确定义(即 ε- N 定义).

定义 1′　设 x_n 是一个数列,a是一个常数,如果对任意给定的正数 ε(无论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$$

都成立,则称常数 a是数列 x_n 的极限.

定义中的 ε是任意的正数,当要证明数列 x_n 以 a 为极限时,更要强调 ε的任意性,它可以要多小就多小,因为只有这样,不等式$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 但是,当已知数列 x_n 以 a 为极限时,ε又可以具体给定,比如说,取 $\varepsilon=1$,$\varepsilon=10$,等等.

由于不等式$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$等价于

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$$

因此,$n>N$ 时$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$表示 N 项以后无穷多项都满足不等式$\left|x_n-a\right|<\varepsilon$,即

$$a-\varepsilon<x_{N+1}<a+\varepsilon,\qquad a-\varepsilon<x_{N+2}<a+\varepsilon,\quad\cdots$$

于是数列 x_n 以 a 为极限在几何上表示:N 项以后的一切点 $x_{N+1},x_{N+2},x_{N+3},\cdots$都落在开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内(图 1-7).

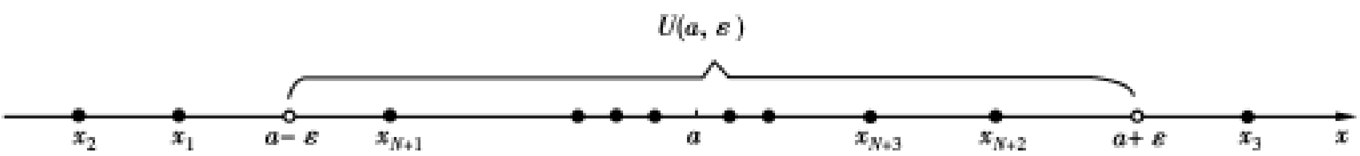


图 1-7

例 2 用 ε- N 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

分析 要使 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$,只要 $2^n>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.

证 对任给的正数 $\varepsilon\left(设\ \varepsilon<\frac{1}{2}\right)$,存在正整数 $N\left(现在\ N=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$,当 $n>N$ 时,有 $\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

用例 2 的方法可以证明

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0 \qquad (|q|<1)$$

在以后的计算中可以直接应用这一结论.

三、收敛数列的有界性

首先介绍数列有界性的概念.

对于数列 x_n,如果存在着正数 M,使得对于数列的一切项 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leq M$$

则称数列 x_n 是有界的;如果这样的 M 不存在,就说数列 x_n 是无界的.

由于 $|x_n|\leq M$ 等价于 $-M\leq x_n\leq M$,因此,数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在区间 $[-M,M]$ 上.

定理 1 如果数列 x_n 收敛,那么数列 x_n 一定有界.

证 因为数列 x_n 收敛,所以可设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,根据数列极限的 ε- N 定义,对于 $\varepsilon=1$,存在着正整数 N,使得 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<1$$

都成立,于是,当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leq|x_n-a|+|a|<1+|a|$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,这样数列 x_n 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leq M$$

即数列 x_n 有界.

由定理 1 知,如果数列 x_n 无界,则数列 x_n 一定发散,但如果数列 x_n 有界,却不能断定数列 x_n 一定收敛,例如数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界,但此数列是发散的. 这就是说,数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

1.3　函数的极限

一、当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

上节介绍了数列极限，因为数列 x_n 可看做自变量为正整数 n 的函数，即 $x_n=f(n)$，所以数列的极限也是函数的极限的一种类型，它们的不同之处可以通过比较 $x_n=\frac{1}{n}$ 与 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 之后得出．由于 $x_n=\frac{1}{n}$ 中 n 只能取正整数，因此 $n\to\infty$ 表示 n 大于零而无限增大．对函数 $y=\frac{1}{x}$，自变量 x 可以取不等于零的一切实数，同时可以看出，当 x 大于零并无限增大时，对应的函数值 $\frac{1}{x}$ 无限趋近于常数零；当 x 小于零且其绝对值 $|x|$ 无限增大时，$\frac{1}{x}$ 也无限趋近于常数零，对这种无论 x 大于零或 x 小于零，当 $|x|$ 无限增大时的这种变化趋势用记号 $x\to\infty$ 来表示．

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 内有定义，当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某个定数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \qquad (x\to\infty)$$

根据定义可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

有时候，只讨论自变量 x 大于零无限增大时的这种变化趋势，就用 $x\to+\infty$ 表示；而只讨论 x 小于零但其绝对值 $|x|$ 无限增大的这种变化趋势，就用 $x\to-\infty$ 表示，从而得到另外两种极限．

查看基本初等函数的图形，可以得出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$$

对于正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$ 来说，当 $x\to\infty$ 时它们都没有极限，因为当 $x\to\infty$ 时它们的值都在 -1～1 这两个数范围内摆动，不趋于某个定数，即

$$\lim_{x\to\infty}\sin x \text{ 不存在}，\qquad \lim_{x\to\infty}\cos x \text{ 不存在}$$

二、当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

可以看出，对函数 $y=f(x)=1+x^3$，当自变量 x 从定数 0 的左右两侧与 0 无限接近时，对应的函数值 $1+x^3$ 就与常数 1 无限接近，这时就称常数 1 为函数 $f(x)=1+x^3$ 当 $x\to0$ 时的极限．

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 x 从 x_0 的左右两侧无限趋近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于某个定数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为