

高等学校试用教材

高等数学

(化、生、地类专业)

第二册

上海师范大学数学系
中山大学数学力学系 合编
上海师范学院数学系

高等教育出版社

内 容 提 要

《高等数学》(化、生、地类专业)由上海师范大学数学系、中山大学数学力学系、上海师范学院数学系同志根据高等学校理科数学教材编写大纲讨论会上制定的《高等数学》(化、生、地类专业)编写大纲编写的。全书分三册出版。本书是第二册,共五章。包括无穷级数,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分,富里哀级数与偏微分方程初步。第六、七、八章由林克伦同志执笔,第九、十两章由关伟德同志执笔。本书可供综合大学和师范学院化、生、地类有关专业用作试用教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 第二册/上海师范大学数学系等.—北京:高等教育出版社,2001 重印

化生地类专业

ISBN 7-04-001797-0

. 高... . 上... . 高等数学-高等学校-教材
. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00957 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网 址	http://www.hep.edu.cn
传 真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本	850×1168 1/32	版 次	1978 年 4 月第 1 版
印 张	8.625	印 次	年 月第 次印刷
字 数	206 000	定 价	8.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电 话:(010)84043279 13801081108

传 真:(010)64033424

E - mail: dd@hep .com .cn

地 址:北京市东城区沙滩后街 55 号

邮 编:100009

目 录

第六章 无穷级数	1
§ 6.1 数项级数	1
1. 级数及其收敛与发散的概念(1) 2. 级数收敛的必要条件(5)	
3. 级数的基本性质(7) 4. 正项级数的收敛判别法(8) 5. 交错级数及其收敛判别法(13) 6. 绝对收敛与条件收敛(15)	
§ 6.2 幂级数	17
1. 幂级数及其收敛半径(17) 2. 幂级数的运算(20)	
§ 6.3 函数的幂级数展开式	22
1. 泰勒级数(23) 2. 几个初等函数的幂级数展开式(25) 3. 欧拉公式(30)	
§ 6.4 函数的幂级数展开式的应用	31
1. 函数值的近似计算(32) 2. 定积分的近似计算(35) 3. 微分方程的幂级数解法(37)	
第七章 向量代数与空间解析几何	43
§ 7.1 空间直角坐标系	43
1. 空间点的直角坐标(43) 2. 空间两点之间的距离(47)	
§ 7.2 向量	50
1. 向量概念(50) 2. 向量的加减法与数乘向量(51) 3. 向量的坐标表示(55) 4. 向量的乘法(59)	
§ 7.3 平面与空间直线	65
1. 平面的方程(66) 2. 空间直线的方程(71)	
§ 7.4 简单的曲面与空间曲线	77
1. 二次曲面(77) 2. 空间曲线的方程(85)	
第八章 多元函数的微分学	89
§ 8.1 多元函数的一般概念	89
1. 多元函数的概念(89) 2. 二元函数的极限和连续的概念(94)	
§ 8.2 偏微商	97
1. 偏微商的概念(97) 2. 二元函数偏微商的几何意义(100)	
3. 高阶偏微商(101)	
§ 8.3 全微分	104

1. 全微分与偏微分的概念(104)	2. 全微分在近似计算和误差估计中的应用(108)	
§ 8.4	复合函数的偏微商	112
1. 连锁法则(112)	2. 隐函数的微商或偏微商(118)	
§ 8.5	几何方面的应用	121
1. 空间曲线的切线和法平面(121)	2. 曲面的切平面与法线(123)	
§ 8.6	方向微商与梯度	126
1. 方向微商(126)	2. 梯度(128)	
§ 8.7	多元函数的极值	132
1. 二元函数的极值(133)	2. 条件极值——拉格朗日乘数法则(137)	
第九章	多元函数的积分学	143
§ 9.1	二重积分的概念与性质	143
1. 二重积分的概念(143)	2. 二重积分的性质(147)	
§ 9.2	二重积分的计算	148
1. 化二重积分为二次积分(148)	2. 利用极坐标计算二重积分(155)	
§ 9.3	三重积分的定义和计算	162
1. 三重积分的定义及其计算公式(162)	2. 利用柱面坐标、球面坐标计算三重积分(168)	
§ 9.4	重积分的应用	174
1. 曲面面积(174)	2. 重心(176)	3. 转动惯量(179)
§ 9.5	曲线积分	181
1. 第一型曲线积分(182)	2. 第二型曲线积分(188)	3. 第二型曲线积分与线路无关的条件(192)
第十章	富里哀级数与偏微分方程初步	202
§ 10.1	富里哀级数	202
1. 函数的富里哀展开(202)	2. 富里哀级数的复数形式(227)	
§ 10.2	富里哀积分	234
§ 10.3	富里哀变换与卷积	237
1. 富里哀变换(237)	2. 卷积(239)	
§ 10.4	偏微分方程初步	242
1. 波动方程(243)	2. 热传导方程(254)	3. 拉普拉斯方程(262)
4. 薛定谔方程(267)		

第六章 无穷级数

无穷级数是与数列极限有密切联系的一个概念.它不仅在数学分析理论本身是一个重要的研究工具,而且在自然科学与工程技术中也有着广泛的应用.本章主要讨论一类最简单最重要的级数,那就是幂级数.为此,在前面先简单地介绍一些数项级数的知识.

§6.1 数项级数

1. 级数及其收敛与发散的概念

我们先看一个无穷级数的例子.如果要求出圆的面积,可先作圆的内接正六边形(图 6-1).设这正六边形的面积为 A_1 ,它是圆面积的一个近似值.再以这正六边形的每一边为底边,在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形.设这六个等腰三角形的面积之和为 A_2 ,那么这个圆的内接正十二边形的面积 $S_2 = A_1 + A_2$,它也是圆面积的一个近似值,其近似程度比前面的好.同样,再以这正十二边形的每一边为底边,在弓形内作顶点在圆上的等腰三角形.设这十二个等腰三角形的面积之和为 A_3 ,那么这个圆的内接正二十四边形的面积 $S_3 = A_1 + A_2 + A_3$,它也是圆面积的一个近似值,其近似程度比前面的都更好.依此类推.这个圆的面积近似地等于 $S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, n 越大,则近似的程度越好.人们自然地认为圆的面积是:

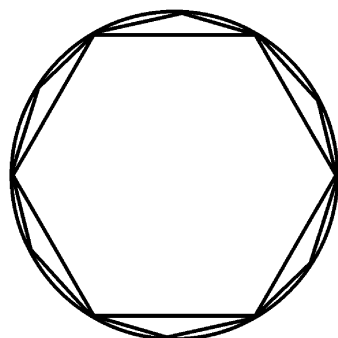


图 6-1

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

定义 1 设给定了序列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 则如下的式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \text{ (或简写为 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{)} \quad (1)$$

就叫做无穷级数, 或简称级数. 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项. 其中 $u_n (n=1, 2, \dots)$ 都是数, 或者都是函数.

如果 $u_n (n=1, 2, \dots)$ 都是数, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就叫做数项级数. 下列级数都是数项级数:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \\ & 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots, \\ & 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots. \end{aligned}$$

如果 $u_n = u_n(x) (n=1, 2, \dots)$ 都是 x 的函数, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 就叫做函数项级数. 下列级数都是函数项级数:

$$\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \\ & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx + \dots, \end{aligned}$$

本节只讨论数项级数.

定义 2 设给定了级数(1), 作级数的前 n 项的和

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

可得到另一个数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots.$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (有限值), 那么就称级数(1)是收敛的, 并称 S 为级数(1)的和, 写作

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S.$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 那么就称级数(1)是发散的. (注意: 发散级数没有和.)

例 1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ 的收敛性 .

解 因为 $S_n - \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$,

从而
$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} .$$

而
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1 ,$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 其和为 1 . 即

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 .$$

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ 的收敛性 .

解 因为 $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$,
共 n 项

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在), 所以级数 $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ 发散 .

例 3 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ 的收敛性 .

解 因为 $S_n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n$.

当 n 为奇数时, $S_n = -1$; 当 n 为偶数时, $S_n = 0$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散 .

上面三个例子都是等比级数的特例 . 下面我们来讨论一般的等比级数(等比级数又叫做几何级数):

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots, (a \neq 0),$$

其中 r 叫做等比级数的公比 .

如果 $|r| < 1$, 那么

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

当 $|r| < 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow 0$, 所以 $S_n \rightarrow \frac{a}{1 - r}$, 这时等比级数收敛, 其

和为 $\frac{a}{1 - r}$; 当 $|r| > 1$ 时, 由于 $\frac{ar^n}{1 - r} \rightarrow \infty$, 所以 $S_n \rightarrow \infty$, 这时等比级

数发散; 当 $r = 1$ 时, $S_n = na$, 级数发散; 当 $r = -1$ 时, 级数成

为 $a - a + a - a + \dots$, 当 n 为奇数时 $S_n = a$, 当 n 为偶数时 $S_n = 0$, 所

以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 从而级数发散 .

综上所述可得结论: 公比为 r 的等比级数, 当 $|r| < 1$ 时, 级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1 - r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时, 级数发散 .

一般说来, 直接讨论 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是否存在是很困难的 . 以后我们将介绍一些简单的方法来判断某些级数是否收敛 . 同样, 对于收敛级数, 要求其和 S 的准确值也还是困难的, 但是我们可以用 S_n 作为 S 的近似值 . S 与 S_n 的差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

叫做(收敛)级数的 n 项后的余项 . 用 S_n 近似代替 S 所产生的误差就是这个余项的绝对值 $|r_n|$. 只要 n 足够大, 这个误差就可以任意小 .

注意: 发散级数是没有和的, 当然其前 n 项之和 S_n 也就不能近似地表达什么, 因此也没有 n 项后的余项的概念 .

由此可见, 收敛级数与发散级数在实用上有根本性的区别 . 因此, 研究级数的收敛性是级数理论中的首要问题 . 下面我们还将专门讨论级数的收敛性问题 .

2. 级数收敛的必要条件

为了研究级数的收敛性,我们先看看收敛级数有什么性质.

定理 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证 由于 $S_n = S_{n-1} + u_n$,从而 $u_n = S_n - S_{n-1}$.又因为级数收敛,所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_n 、 S_{n-1} 的极限存在且相等.因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ 是收敛级数,果然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

这定理也可以这样来叙述:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

但是要注意: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 并不是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件.

有许多级数,虽然一般项趋于 0,但它仍然是发散的.例如调和级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

虽然它的一般项 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$,但它是发散级数.证明如下:

$$\begin{aligned} \text{因为 } S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{4\text{项}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}}_{8\text{项}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k} \\
& \qquad \qquad \qquad 2^{k-1} \text{项} \\
& + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{n} \\
& \qquad \qquad \qquad \text{不足 } 2^k \text{项} \\
& > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
& \qquad \qquad \qquad 2 \text{项} \qquad \qquad \qquad 4 \text{项} \\
& + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \dots \\
& \qquad \qquad \qquad 8 \text{项} \\
& + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} \\
& \qquad \qquad \qquad 2^{k-1} \text{项} \\
& = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}, \\
& \qquad \qquad \qquad k \text{项}
\end{aligned}$$

当 n 无限地增大时, 不等式右边的数 $1 + \frac{k}{2}$ 也无限地增大, 从而 S_n 也无限地增大, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散级数.

由此可见, 由 $u_n \rightarrow 0$ 并不能判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 那么这定理有什么用处呢? 这定理的重要用处在于它给出了判断级数发散的准则. 因为由这定理可知: 如果 u_n 不趋于 0, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$ 的收敛性.

解 因为 $\lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ 发散.

例 5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ 的收敛性.

解 因为 $\lim_n (-1)^n$ 不存在, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

3. 级数的基本性质

以后讨论级数的收敛性时, 要用到级数的几个基本性质. 现介绍如下:

性质 1 在级数前面去掉有限项或加上有限项得一新级数, 新级数收敛或发散的性质与原级数相同.

证 设原级数为

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots$$

去掉前 m 项后的新级数为

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots,$$

并设 S_n 为原级数前 n 项的和, S_n 为新级数前 n 项的和. 显然有

$$S_{n+m} = (u_1 + u_2 + \dots + u_m) + S_n$$

即 $S_n = S_{n+m} - (u_1 + u_2 + \dots + u_m)$.

由此可见, 如果 $\lim_n S_{n+m}$ 存在, 极限为 S , 那么 $\lim_n S_n$ 也存在, 且等于

$S - (u_1 + u_2 + \dots + u_m)$. 如果 $\lim_n S_{n+m}$ 不存在, 那么 $\lim_n S_n$ 也不存在. 这就是说新

级数收敛或发散的性质与原级数相同. 加上有限项后新级数收敛性不变的证明是完全相仿的.

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 那么级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛; 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

证 记 $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$,

$$u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

$$S_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n),$$

$$T_n = (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \dots + (u_n - v_n).$$

显然 $S_n = u_n + v_n, T_n = u_n - v_n$.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ 都收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ 都存在.

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

与 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n - \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

这就是说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 都收敛, 其和为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

性质 3 以非零常数 k 乘级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每项得新级数

$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$, 新级数收敛或发散的性质与原级数相同.

证 设 S_n 为原级数前 n 项的和, S'_n 为新级数前 n 项的和. 显然

$$S'_n = k u_1 + k u_2 + \dots + k u_n = k S_n.$$

所以, 如果 S_n 有极限 S , 那么 S'_n 也有极限, 且等于 kS ; 如果 S_n 没有极限, 那么 S'_n 也没有极限.

4. 正项级数的收敛判别法

正项级数就是每项非负的级数(即各项 $u_n \geq 0$). 它是级数中比较简单的. 这一段我们只讨论正项级数, 以后研究其它级数的收敛性时, 也常要用到正项级数的收敛性.

正项级数的特点是它的前 n 项之和 S_n 是一个单调增加数列: $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$. 要判定正项级数是否收敛, 只要看它的 S_n 是否有上界就行了. 如果 S_n 有上界, 那么由极限存在准则(单调有界数列必有极限), 可知 S_n 有极限, 从而级数收敛; 如果 S_n 无上界, 那么 S_n 无极限, 从而级数发散.

我们要研究正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性, 但直接计算 S_n 一般来说是不容易的, 通常是把它与另一收敛情况已知的正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 作比较, 通过比较来决定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否有上界, 从而判定是否收敛. 比较判别法则如下:

定理 1 设已知两个正项级数

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

与
$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

如果级数(2)收敛, 并且 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 那么级数(1)也收敛.

如果级数(2)发散, 并且 $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$, 那么级数(1)也发散.

证 先证明第一部分, 已知级数(2)收敛, 设其和为 S , 因为(2)是正项级数, 所以对任何 n 均有

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq S.$$

又因为 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 所以有

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq S.$$

即正项级数(1)的前 n 项之和 S_n 是有上界的, 从而级数(1)收敛.

现证明第二部分. 用反证法. 假设级数(1)收敛, 那么由定理的第一部分可得级数(2)收敛, 这与已知条件矛盾, 所以级数(1)必发散.

作为比较判别法的举例, 我们来讨论 p 级数:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (p \text{ 是常数}).$$

当 $p=1$ 时, 就是前面已经讨论过的调和级数, 已知它是发散的.

当 $p < 1$ 时, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的, 所以由比较判别法

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也是发散的.

当 $p > 1$ 时, 因为对正项级数加括号不影响它的收敛性, 所以可把 p 级数加括号写成如下的形式

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}}_{2\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}}_{4\text{项}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p}}_{8\text{项}} + \dots, \end{aligned}$$

再把它与下面的级数作比较

$$\begin{aligned} &1 + \underbrace{\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}}_{2\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}}_{4\text{项}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p}}_{8\text{项}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}}^2 + \frac{1}{2^{p-1}}^3 + \dots \end{aligned}$$

显然, 从第二项起, 前者各项都小于后者对应的各项, 而后者是等比级数, 其公比 $r = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ($p > 1$), 它是收敛的, 所以由比较判别法可知前者也是收敛的.

综上所述可得结论: p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散; 当 $p > 1$ 时, 级数收敛.

例如,级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 是发散的;级数 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ 是收敛的.

在比较判别法的基础上,下面再介绍一个在实用上非常方便的比值判别法,又称达朗贝尔(d'Alembert)判别法.

定理 2 设已知正项级数

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

如果 $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 那么 $\rho < 1$ 时,级数收敛; $\rho > 1$ 或 $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时,级数发散; $\rho = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

证 当 $\rho < 1$ 时,取 $r = \frac{\rho + 1}{2}$,它是 ρ 与 1 的平均值,在 ρ 与 1 之间,比 ρ 大,比 1 小.因为 $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 时 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$, 所以当 n 充分大以后, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 就小于 r (图 6-2).也就是说,从某个 m 开始后所有的 n 都满足不等式

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < r.$$

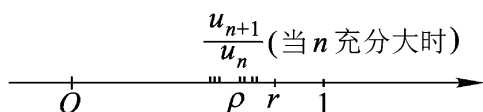


图 6-2

因此有

$$\begin{aligned} u_{m+1} &< r u_m, \\ u_{m+2} &< r u_{m+1} < r^2 u_m, \\ u_{m+3} &< r u_{m+2} < r^3 u_m, \\ &\dots, \end{aligned}$$

把下面两个级数作比较

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \dots \tag{3}$$