21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列

高等数学(工科类)

上　册

主　编　唐瑞娜　白淑岩
副主编　赵玉松　姜成建　宋金堂

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书分上、下两册，共 5 篇 16 章 .上册包括微积分、常微分方程 2 篇，涉及函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、二元函数微积分及常微分方程共 9 章的内容；下册包括拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论与数理统计 3 篇，其中有拉普拉斯变换、无穷级数、行列式、矩阵、线性方程组、概率论、数理统计初步共 7 章 .每章节后都配有一定数量的习题，并在每册书末附有习题答案 .

本书注意结合中学教材的实际及普通高中新课程改革的方案，起点适中，内容重点突出，层次分明；编排模块化，方便选择性教学；习题配备文题对应，难易适中；叙述语言简洁，条理清楚，浅显易懂，便于自学 .

本书可作为高职高专、成人院校工科类专业的高等数学教材，也可作为数学专科学生自学参考教材 .

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·上册：工科类/ 唐瑞娜，白淑岩主编 .—北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2004 .10

(21 世纪高职高专规划教材·公共基础系列)

ISBN 7－81082－393－0

Ⅰ .高…　Ⅱ .①唐…　②白…　Ⅲ .高等数学－高等学校－教材　Ⅳ .O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 085623 号

责任编辑：黎　丹

出 版 者：清 华 大 学 出 版 社　　邮编：100084　　电话：010－62776969
北京交通大学出版社　　邮编：100044　　电话：010－51686045，62237564

印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　　印张：17　　字数：390 千字

版　　次：2004 年 10 月第 1 版　　2004 年 10 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7 81082 393 0/ O·16

印　　数：1～5 000 册　　定价：23 .00 元

前　　言

英国著名哲学家培根指出:“数学是科学的大门和钥匙.”数学分为初等数学与高等数学.高中以前阶段所学的数学一般称为初等数学.初等数学研究的对象主要是常量和固定的图形,使用的方法一般来说是静止的、孤立的;而高等数学则是用运动的观点和相互联系的辩证方法研究变量和变化的图形,从而能更生动地反映出客观世界的变化规律,所以高等数学已成为现代科学技术、科学管理等诸多领域理论研究的工具与基础,同时也是高职高专院校课程设置中一门十分重要的文化基础课和工具课.

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程的教学基本要求》,结合高职高专工科类专业的特点,针对高职高专的培养对象而编写的.在编写过程中,做到了以下几点.

- 定位准确,针对性强 以高职高专院校的培养目标为依据,以适用、够用、好用为指导思想,在体现数学思想为主的前提下删繁就简,深入浅出,做到既注重高等数学的基础性,又适当保持其学科的科学性与系统性,同时更突出它的工具性.
- 教材编写模块化.考虑到高职高专工科类不同专业对高等数学的需求不同、课时分配不同等实际原因,教材的编写采用了模块化,全书分上、下两册共五大模块.上册包括微积分、常微分方程 2 个模块,下册包括了拉普拉斯变换与无穷级数、线性代数基础、概率论和数理统计初步 3 个模块.每个模块的内容相对独立,有利于学校根据实际情况灵活安排课程,方便教师有选择性地教学.
- 内容安排重点突出,层次分明.微积分是高等数学的主要内容,是现代工程技术的主要数学支撑,也是高职高专工科类学生学习高等数学的首选,因此作为必学的内容,把它放在第一模块.常微分方程是建立在微积分基础之上的,是微积分在实际中的应用,所以把它作为第二模块与微积分一起放在上册.
- 理论联系实际,突出了数学的应用思想.书中概念的引入、定理的证明等尽可能地从实际背景入手;在第一部分微积分的应用中,除了介绍微积分在物理方面与几何方面的应用外,还单独增加了一元函数微积分在经济学中的应用,以求拓宽工科类学生的数学应用基础,提高其理论联系实际的能力.
- 加大了例题的示范性,利于学生尽快掌握数学的方法;习题的配备类型合理,文题对应,难易适中,具有一定的梯度,符合学生的认知规律.

参加本书编写的作者是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线教师.在编写过程中,我们参照了国内外众多院校教师编写的教材和书籍,融进了自己的教学心得和体验,结合实际,反复推敲,力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的高

等数学教材.

鉴于编者水平有限，书中不当之处在所难免，敬请读者与同行指正.

编　者

2004 年 10 月

目　　录

第 1 篇　微　积　分

第 2 篇　常微分方程

第 1 篇　微积分

第 1 章　函　　数

微积分是数学的重要分支，是高等数学的核心内容，它开创了变量数学的时代，使数学能够描述自然界中事物的变化与运动，成为数学联系实际的重要工具 .因此，它是现代科学技术的主要数学支撑 .

函数是微积分的主要研究对象 .微积分的主要研究内容就是在实数范围内，讨论、研究函数的微分学和积分学 .因此，熟练掌握函数的有关基础知识对学习微积分至关重要 .本章将在高中数学的基础上，复习和加深函数的相关知识 .

1.1　函数的概念与性质

1.1.1　函数的概念

客观世界中的事物都是相互依赖、相互变化、相互联系着的，这种相互关系在数学上的表现形式之一就是所谓的函数关系 .

定义 1.1　设 D 为非空实数集，x 与 y 是两个变量 .如果对变量 x 在 D 中的每一个值，按照某种对应法则 f，变量 y 有确定的实数值与之对应，那么就称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$ 或简记为 $y=f(x)$.称 x 为自变量，y 为因变量 .称自变量的取值范围 D 为函数 f 的定义域；与 x 对应的 y 值称为 x 处的函数值，当 x 取遍 D 内的所有实数时，相应函数值的全体组成的集合 $\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域，记为 $f(D)$.

自变量只有一个的函数称为一元函数，否则称为多元函数；如果对于 D 中每个 x 的取值，y 值惟一，则称函数为单值函数；如果对于 D 中每个 x 的取值，y 有两个或两个以上不同的值与之对应，则称函数为多值函数 .微积分主要讨论单值函数 .

定义域 D 与对应法则 f 是确定函数的两要素，当两个函数的定义域与对应法则相同时，称这两个函数相同(或相等) 此时，不论这两个函数的表示形式如何，二者都表示同一个函数，否则称这两个函数不相同(或不相等) .

例 1.1　(1) 函数 $y=1$ 与函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 虽然表示形式不一样，但由于它们的定义域都是实数集 R，对 R 中每一个实数 x，它们都对应相同的函数值 1，所以二者表示的是同一个函数；

(2) 函数 $y=|x|$ 与函数 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数;

(3) 函数 $y=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$ 与函数 $y=x+2$ 定义域不同，前者为$\{x\mid x\neq 1\}$，后者为实数集 R，故它们是不相同的函数.

定义 1.2　设 a 与 b 是两个实数，且 $a<b$，则

(1) 称满足不等式 $a\leq x\leq b$ 的实数 x 的集合为闭区间，记为$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leq x\leq b\};$$

(2) 称满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合为开区间，记为(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\};$$

(3) 称满足不等式 $a\leq x<b$ 或 $a<x\leq b$ 的实数 x 的集合为半开半闭区间，记为$[a,b)$或$(a,b]$，即

$$[a,b)=\{x\mid a\leq x<b\},\ (a,b]=\{x\mid a<x\leq b\}.$$

实数 a，b 称为相应区间的端点.

以上这些区间都称为有限区间，称 $b-a$ 为这些区间的长度.在数轴上，这些有限区间对应长度有限的线段.

引进记号“$+\infty$”(正无穷大)及“$-\infty$”(负无穷大)，则有以下的无限区间.如

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geq a\},\ (-\infty,b)=\{x\mid x<b\}.$$

实数集 R 记为$(-\infty,+\infty)$，即$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

有限区间$[a,b]$，(a,b)及无限区间$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$在数轴上的表示分别如图 1 1(a)，(b)，(c)，(d)所示.

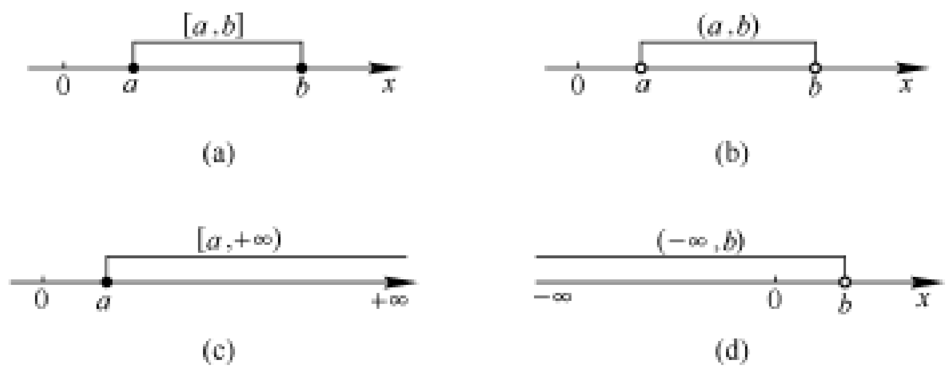


图 1 1

下文中在不需要指明区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间时，一律简称为区间，用符号 I 表示.

定义 1.3　设 $a\in$ R，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域，记为$U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，称 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径；将 a 的 δ 邻域中心 a 去掉后得 a 的 δ 空心邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

点 a 的 δ 邻域及空心 δ 邻域有时又分别简记为 $U(a)$ 与 $\mathring{U}(a)$.

1.1.2　函数的表示法

函数的表示方法一般有以下 4 种.

(1) 解析法(又称为公式法).此种表示方法将函数关系用数学式子给出，便于理论研究.微积分中的绝大部分函数均以此种方法表示.

(2) 图像法.如果函数 $y=f(x)$ 定义在数集 D 上的话，其图像就是 xOy 平面上的点集 $\{(x, y) \mid y=f(x), x\in D\}$.一般情况下，它是平面上一条曲线.用图像法表示函数，形象直观，函数的几何性态表现得十分明显.例如，气象站的温度记录器，记录了温度与时间的函数关系，它就是借助于仪器自动描绘在纸带上的一条曲线表达的.

(3) 列表法.自变量 x 与因变量 y 的函数关系通过表格反映出来.此时，自变量 x 与因变量 y 的对应关系一目了然.例如，火车的出站和进站的车次都是时间的函数，火车时刻表就是用列表的方法给出了这种函数关系.

(4) 语言叙述法.即函数关系是用语言文字描述出来的.

例 1.2　取整函数 $f(x)=[x]$，它表示不超过 x 的最大整数，画出它的图形.

解：它的图形如图 1 2 所示，由取整函数定义知

$$\left[\frac{5}{7}\right]=0,\ [\sqrt{2}]=1,\ [-3.5]=-4.$$

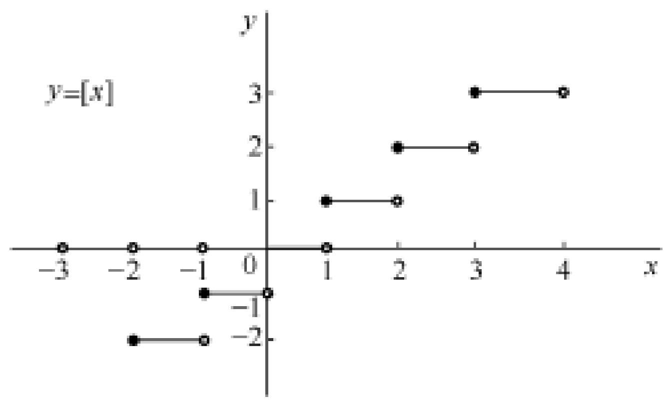


图 1 2

例 1.3　讨论狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数}\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的图形.

解：其图形画不出来，但可以想像为：x 轴上稠密地分布着无穷多点，在直线 $y=1$ 上也有无穷多个点稠密地分布着.由狄利克雷函数的定义知，当 $x=-1, \sqrt{2}, \frac{4}{5}$ 时，对应的函数值分别为 1，0，1.

例 1.4　画出符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图形.

解：图形如图 1 3 所示，对任意实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn} x$.

上述这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数，通常称为分段

函数.生活中经常遇到用分段函数表示的问题.例如,邮件重量与邮资的关系以及货运行李重量与运费之间的关系等,都可用分段函数表示.

虽然分段函数表达式分几段,但它表示的是一个函数,其定义域是所有段中自变量取值的全体.如取整函数 $f(x)=[x]$,狄利克雷函数 $D(x)$ 及符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 的定义域都是实数集 R,对应值域分别为整数集 Z、有限集$\{0,1\}$与$\{-1,0,1\}$.

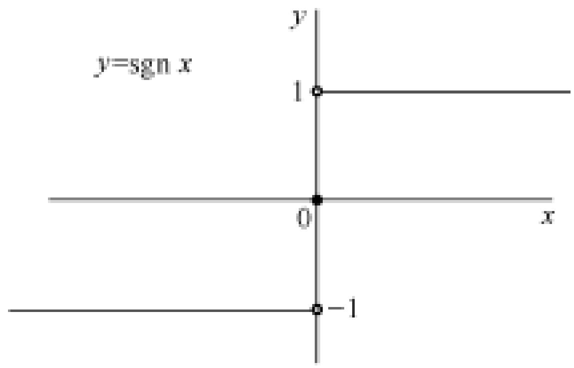


图 1 3

1.1.3　函数定义域的确定

如果考虑函数关系的实际意义,则函数的定义域须满足实际要求;如果不考虑函数关系的实际意义,且函数关系是由数学式子给出时,那么函数的定义域就是使该式有意义的自变量的全体.

确定函数定义域时,首先应考虑以下几点。

(1) 分式的分母不为 0;

(2) 偶次方根下的式子非负;

(3) 对数函数的真数大于零;

(4) 正切函数的变量不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(5) 余切函数的变量不等于 $k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$;

(6) 反正弦函数的变量、反余弦函数的变量的绝对值小于等于 1 等.

例 1.5　求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域,并求函数值 $f(0)$与 $f(1)$.

解:要使函数有意义,必须满足 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leq1$ 且 $25-x^2\geq0$,

即 $|x-1|\leq5$ 且 $|x|\leq5$,从而 $-4\leq x\leq6$ 且 $-5\leq x\leq5$.

因此有 $-4\leq x\leq5$.于是函数的定义域为$[-4,5]$.

又因为 $0\in[-4,5]$,$1\in[-4,5]$,所以 $f(0)=-\arcsin\dfrac{1}{5}+5$,$f(1)=2\sqrt{6}$.

例 1.6　将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木料(如图 1 4所示),求矩形截面两条边之间的函数关系及定义域.

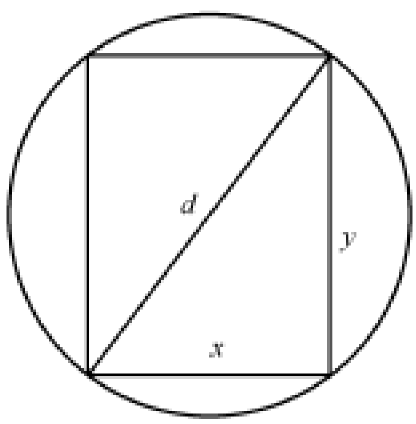


图 1 4

解:设截面矩形两条边长分别为 x 和 y,则有

$$x^2+y^2=d^2.$$

解得

$$y = \pm \sqrt{d^2 - x^2}.$$

根据实际意义知，所求函数关系为 $y = \sqrt{d^2 - x^2}$，**定义域为** $D = \{x \mid 0 < x < d\}$.

1.1.4　函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.4　**设函数** $y = f(x)$ **定义在对称区间** $(-a, a)$ $(a > 0)$ **上，若** $x \in (-a, a)$ **时，恒有** $f(-x) = f(x)$，**则称** $y = f(x)$ **为偶函数；若** $x \in (-a, a)$ **时，恒有** $f(-x) = -f(x)$，**则称** $y = f(x)$ **为奇函数.**

例如， $y = x^2$，$y = \cos x$ **及狄利克雷函数** $D(x)$ **是偶函数；** $y = x^3$，$y = \sin x$ **及符号函数** $y = \operatorname{sgn} x$ **是奇函数.**

偶函数的图形关于 y **轴对称. 奇函数的图形关于坐标原点对称，如图 1 5，图 1 6 所示.**

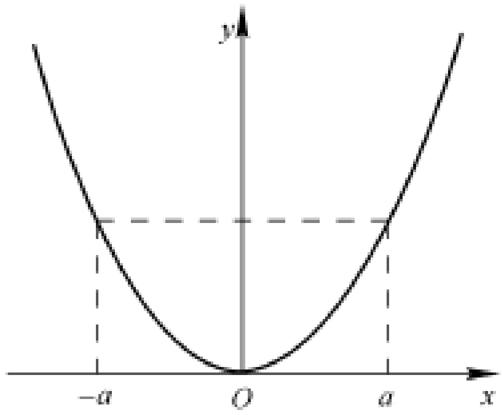


图 1 5

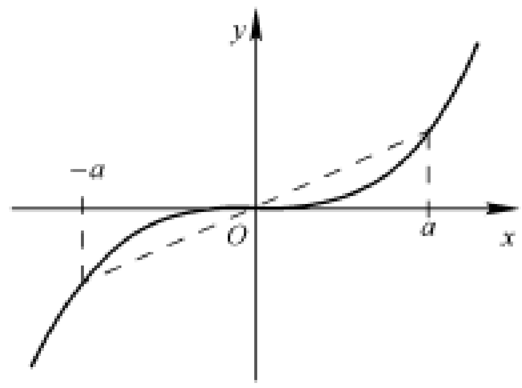


图 1 6

2. 函数的周期性

定义 1.5　**设函数** $y = f(x)$ **的定义域为** D，**如果存在非零常数** T，**使得对任意** $x \in D$，**有** $f(x + T) = f(x)$ **恒成立，则称** $f(x)$ **为周期函数，** T **称为** $f(x)$ **的周期. 其中最小正周期称为** $f(x)$ **的基本周期. 通常所说的周期函数的周期均指基本周期.**

例如，函数 $y = |\sin x|$ **的周期为** π，**函数** $y = \cos\dfrac{\pi}{3}$ **的周期为** 6π，**函数** $y = x - [x]$ **的周期为** 1，**此函数又称为纯小数函数，其图形如图 1 7 所示.**

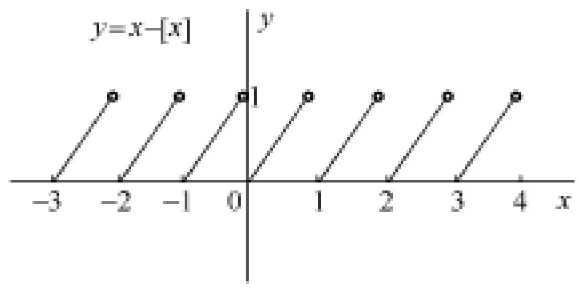


图 1 7

3. 函数的单调性

定义 1.6　**设** $y = f(x)$ **在区间** I **内定义，对于** I **内任意两点** x_1，x_2，**当** $x_1 < x_2$ **时，有** $f(x_1) \le f(x_2)$ **成立，则称** $f(x)$ **在区间** I **内是单调增加的或称** $f(x)$

是区间 I 内的单增函数；若 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的或称 $f(x)$ 是区间 I 内的单减函数.这两种函数统称为单调函数.

如果上述两个函数不等式去掉等号后也严格成立，则对应的函数分别称为 I 内的严格单增函数或严格单减函数.

例 1.7 判断下列所给函数的单调性.

(1) $f(x) = 3x - 2$；　　(2) $f(x) = x^2 + 1$.

解：(1) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) - f(x_2) = 3x_1 - 2 - (3x_2 - 2) = 3(x_1 - x_2) < 0.$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在其定义域内严格单增.

(2) 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + 1 - (x_2^2 + 1) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

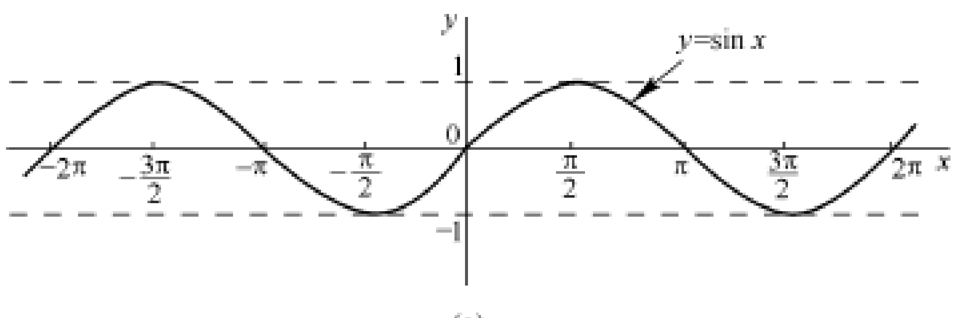
在区间 $(-\infty, 0)$ 内，$f(x_1) - f(x_2) > 0$，即 $f(x_1) > f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 是严格单减的；在区间 $[0, +\infty)$ 内，$f(x_1) - f(x_2) < 0$，即 $f(x_1) < f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 是严格单增的.

因此，$f(x) = x^2 + 1$ 在定义域内不是单调函数，但有单调区间 $(-\infty, 0]$ 及 $[0, +\infty)$，且分别为严格单减区间与严格单增区间.

4. 函数的有界性

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于任意的 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leq M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界.否则，称 $f(x)$ 在区间 I 内无界.

例 1.8 证明 $y = \cos x$，$y = \sin x$ 在 R 上是有界的.如图 1 8(a)，(b)所示.



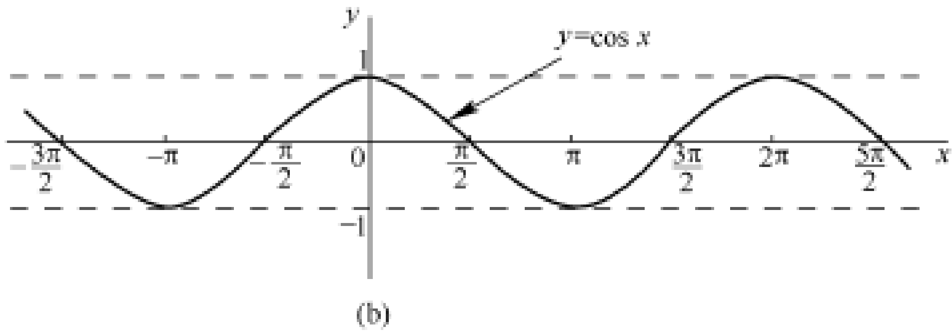


图 1 8

证明：事实上，存在 $M = 1 > 0$，对任意 $x \in \mathrm{R}$，恒有 $|\cos x| \leq 1 = M$，$|\sin x| \leq 1 = M$.

例1.9　试证 $y = e^x$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内是无界的．如图1 9所示．

证明：这是因为不存在正数 M，对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，恒有 $|e^x| \leq M$；或者说对任意的 $M > 0$，总有 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，使得 $|e^{x_0}| > M$.

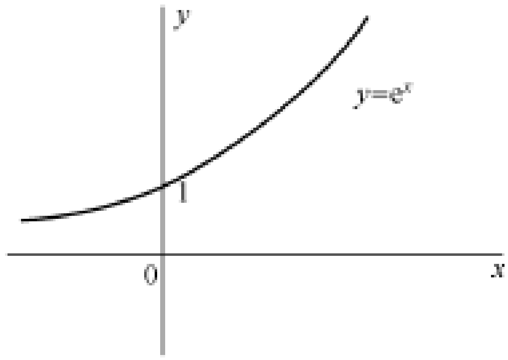


图1 9

习题 1.1

1．设 $y = \arcsin 3x (1 \leq x \leq 2)$，试问此数学式是否定义了$[1, 2]$上的一个函数关系？为什么？

2．下列函数中，$f(x)$和 $g(x)$是否表示同一函数？说明理由．

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$ 与 $g(x) = 1$；　　(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$．

3．求下列函数的定义域．

(1) $y = x^2 + 2x - 1$；　　(2) $y = \sqrt{3 - 5x}$；

(3) $y = \dfrac{1}{\lg(1 - x)}$；　　(4) $y = \ln(x + 1) + \arcsin \dfrac{x}{2}$．

4．设函数 $y = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 3, \\ x^2, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$ 求其定义域及函数值 $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$y(2)$．

5．判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x) = x^5 + 2x^3 + \sin x$；　　(2) $f(x) = (\tan x)^3$；

(3) $y = \sin x + \cos x$；　　(4) $y = \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2}$．

6．判断下列函数的单调性．

(1) $y = 2x + 1$；　　(2) $y = \ln x$；　　(3) $y = 2^{-x}$．

7．求下列函数的周期．

(1) $y = \sin \dfrac{x}{2}$；　　(2) $y = \cos 3x$；

(3) $y = \cos(x + 1)$；　　(4) $y = 3\sin(2x + 1)$．

8．邮资 y 是信件重量 x 的函数，按照邮局的规定，对于国内的外埠平信，按邮件重量每20克应付邮资0.8元，不足20克以20克计算.试写出信件的重量在60克以内时的函数表达式，并画出它的图形．

9．某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里内，每公里 k 元；超过 a 公里，超过部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元，求运价 m 与里程 x 间的函数关系．

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

在函数关系中，自变量与因变量是相对的.如函数 $y=0.5x$，若把 x 解出得 $x=2y$，则 x 就成为 y 的函数，这时 y 是自变量，而 x 是因变量，函数 $x=2y$ 称为函数 $y=0.5x$ 的反函数.一般地有下述定义.

定义 1.8 给定函数 $y=f(x)$，$x\in D$，值域 $f(D)$，如果把 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的单值函数 $x=g(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，即 $x=f^{-1}(y)=g(y)$，而称 $y=f(x)$ 为直接函数.

此时 x 与 y 的对应关系是一一对应的，即对每一个 $x\in D$，有惟一的 $y\in f(D)$ 与它对应.反过来，对每一个 $y\in f(D)$，也都有惟一的 $x\in D$ 与之对应.$y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量.因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)=g(y)$ 通常也写成 $y=f^{-1}(x)=g(x)$ 这时直接函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=g(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

可以证明严格单调的函数必有反函数.

例 1.10 求函数 $y=x^3-1$ 的反函数.

解：由 $y=x^3-1$，得 $x=\sqrt[3]{y+1}$.

按习惯记法，所求的反函数为 $y=\sqrt[3]{x+1}$.

例 1.11 求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解：把上式改写为 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，视其为 e^x 的二次方程，可解出 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$.由于 $e^x<0$，而 $y-\sqrt{y^2+1}<0$，所以右端取负号的情况应舍去，故得到 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，从而 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

按习惯写法，所求的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1.2.2 基本初等函数

基本初等函数包括以下 6 种。

(1) 常量函数 $y=C$(C 为常数)，$x\in \mathbf{R}$;

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$(α 为实常数);

(3) **指数函数**　$y = a^x\,(a > 0,\ a \neq 1)$，当 a 取无理数 e 时，有 $y = e^x$，$x \in R$；

(4) **对数函数**　$y = \log a^x\,(a > 0,\ a \neq 1)$，当 a 取 e 时，有 $y = \log e^x = \ln x$，$x > 0$；

(5) **三角函数**　$y = \sin x$，$y = \cos x$，$x \in R$；

$y = \tan x$，$y = \sec x$，$x \in \left\{ x \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$；

$y = \cot x$，$y = \csc x$，$x \in \{ x \mid x \neq k\pi,\ k \in Z \}$；

(6) **反三角函数**　$y = \arcsin x$，$y = \arccos$，$x \in [-1, 1]$；

$y = \arctan x$，$y = \text{arccot}\, x$，$x \in R$；

这些函数统称为基本初等函数.基本初等函数的定义域、值域、图形及性质见附录 A .

1.2.3　复合函数

定义 1.9　设 y 是 u 的函数($y = f(u)$)，u 是 x 的函数($u = g(x)$)，当 x 在某一区间 I 上取值时，相应的 u 值使 y 有意义，则称 y 是 I 上关于 x 的复合函数，记作 $y = f(u) = f[g(x)]$，$x \in I$.也称 $y = f[g(x)]$是由 $y = f(u)$与 $u = g(x)$复合成的，其中 x 是自变量，u 称为中间变量 .

函数的复合可以是多重的，也就是说一个复合函数可以有多个中间变量 .

例 1.12　设 $y = f(u) = 2u - 3$，$u = g(x) = x^2 + 1$，求 $f[g(x)]$.

解：$f[g(x)] = 2g(x) - 3 = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$.

例 1.13　设 $y = f(u) = \sqrt{u}$，$u = g(t) = e^t$，$t = \varphi(x) = x^2$，求 $f[g(\varphi(x))]$.

解：$f[g(\varphi(x))] = \sqrt{g(t)} = \sqrt{e^t} = \sqrt{e^{\varphi(x)}} = \sqrt{e^{x^2}}$.

例 1.14　设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq 0, \\ 2 - x, & x < 0 . \end{cases}$ 求复合函数值 $f[f(3)]$，$f[f(f(-2))]$.

解：因为 $x = 3 > 0$，所以 $f(3) = 1 - 3 = -2 < 0$，故 $f[f(3)] = f(-2) = 2 - (-2) = 4$；而 $x = -2 < 0$，所以 $f(-2) = 2 - (-2) = 4 > 0$，故 $f[f(-2)] = f(4) = 1 - 4 = -3 < 0$.从而 $f[f(f(-2))] = f(-3) = 2 - (-3) = 5$.

与函数复合对应的是函数分解.函数分解能够把一个复杂的函数分解成有限个简单函数的组合，这是后面求函数极限、导数、微分、积分的必要保证.这里所说的简单函数一般指基本初等函数或它的线性组合 .

例 1.15　将下列函数分解成简单函数 .

(1) $y = \arccos(2x + 1)$；　(2) $y = \tan^2 \dfrac{x}{2}$；

(3) $y = \dfrac{1}{\ln(1 + \sqrt{1 + x^2})}$；　(4) $y = e^{2\sin^2 x^2}$.

解：(1) 由题意有 $y = \arccos u$，$u = 2x + 1$，这两个函数都是简单函数，故 $y = \arccos(2x + 1)$ 是由 $y = \arccos u$ 与 $u = 2x + 1$ 复合而成；

(2) $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$ 由 $y=u^2$, $u=\tan v$, $v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成;

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$ 由 $y=\dfrac{1}{u}$, $u=\ln v$, $v=1+\sqrt{t}$, $t=x^2+1$ 复合而成;

(4) $y=e^{2\sin^2 x^2}$ 由 $y=e^u$, $u=2v^2$, $v=\sin t$, $t=x^2$ 复合而成.

1.2.4 初等函数

定义 1.10 凡是由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的能够用一个数学式子表示的函数统称为初等函数.

例如,函数 $y=\arcsin e^{\frac{x}{2}}$, $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 等都是初等函数,而狄利克雷函数 $D(x)$ 与 $y=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{2!5}+\dfrac{x^7}{3!7}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\cdots$ 就不是初等函数.

习题 1.2

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x+1$; (2) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$; (3) $y=x^3+2$; (4) $y=1+\lg(x+2)$.

2. 求下列简单函数的复合函数.

(1) $y=\ln u$, $u=\arcsin v$, $v=\dfrac{1}{1+x^2}$; (2) $y=u^3$, $u=\tan v$, $v=e^{3x}$.

3. 将下列复合函数分解成简单函数.

(1) $y=\sqrt{3x-1}$; (2) $y=e^{e^{-x^2}}$; (3) $y=\ln^3[\arccos x^3]^2$.