

21 世纪高等职业教育通用教材

高等数学

(高职少学时)

曾文斗 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是专为高职院校编写的高等数学教材,本着“必需、够用”原则,精选高等数学内容,主要包含:函数的极限与连续性;导数与微分;微分法的应用;积分法;定积分及其应用;多元函数微积分初步。每章都编有大量与之配套的习题,其中还包括历年全国成人高考专升本许多试题。附录中有:初等数学的一些常用公式及其相关知识;积分表;练习题、复习题参考答案。

本书可作为高职、成人高校高等数学(54学时)教材,也可供大专院校师生学习参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:高职少学时/曾文斗编. —上海:上海交通大学出版社,2004

21世纪高等职业教育通用教材

ISBN 7 - 313 - 03803 - 8

.高... .曾... .高等数学—高等学校:
技术学校—教材 .O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 065528 号

高 等 数 学

(高职少学时)

曾文斗 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

立信会计出版社常熟市印刷联营厂 印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:7.375 字数:208千字

2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷

印数:1-5050

ISBN7 - 313 - 03803 - 8/O · 164 定价:12.00元

版权所有 侵权必究

前 言

为适应高等职业教育改革和发展的需要,满足高职院校由(两年)学制改革所带动的课程体系和教学内容改革的急需,在有关领导的支持下,并在多年高职、高专教学改革实践的基础上,编写成本教材。

教育部 2004 年 4 月下发的《关于以就业为导向,深化高等职业教育改革的若干意见》中指出,高等职业教育要“以培养高技能人才为目标,加强教学建设和教学改革”,要“通过学制的改革推动高等职业教育在课程体系和教学内容等方面的改革,突出职业教育的灵活、快捷和适应性强等特点”。原国家教委也曾提出,高职教育的理论教学要以应用为目的,以“必需、够用”为原则。按照这些要求,本书的编写力求体现以下特点:

1. 精选内容,减少学时。根据高职教育培养“高技能”人才的要求,精选《高等数学》的内容,体现各高职专业在一元函数微积分方面所必须具备的基本知识和基本能力的要求,一些结论、公式一般不给出证明,而是给予直观的解释,减少理论教学的时数,对一般高职学生来说,完成这些基本内容(不含带“*”号的选学内容)的教学约需 54 学时。

2. 精简理论,加强应用。除了一些重要概念以外,许多定理、结论,都用“法则”、“公式”等形式出现,减少理论推导,注重工程技术和经济管理等方面的实际应用。同时,每节都配备有运用重要法则、公式的例题和基本练习题,每章后还选入既有基本训练作用、又有一定综合运算的复习题供各类学生选用。

3. 面向高职,适用性强。本书主要面向高职、高专各类少学时专业的学生。为增强适用性,还增加了“多元函数微积分初步”一章和各章节部分带“*”号的内容,供学习时数在 72 学时左右的专业选用。书中还编入历年全国成人高考专升本招生考试的许多试题,因此,也可作为成人高校大专班及专升本复习辅导用书。本书既有工程技术方面的

应用问题,又有经济管理实际应用的例题和习题,并在书末附录 中附上“初等数学的一些常用公式及相关知识”,因此,本书可供不同专业、不同教学对象的学生使用。

本书的编写得到了福建泉州黎明职业大学和泉州中营职业学院及各职业技术学院有关领导和教师的大力支持,在此,谨表示衷心的感谢。

高等职业教育的改革正在深入,课程教学内容和教学方法的改革已提上议事日程,编写能体现高等职业教育特色的教材目前仍然是一种尝试。同时,由于编者水平的限制,加上时间紧迫,本书的编写意图未必都能实现,错误和缺点在所难免,欢迎批评指正。

编者

2004年5月

目 录

第 1 章 函数的极限与连续性.....	1
1.1 初等函数	1
1.1.1 函数及其特性	1
1.1.2 基本初等函数	3
1.1.3 复合函数	9
1.1.4 初等函数.....	10
1.1.5 非初等函数举例.....	10
练习 1	12
1.2 极限的概念.....	14
1.2.1 数列的极限.....	14
1.2.2 函数的极限.....	15
练习 2	18
1.3 极限的运算法则.....	19
练习 3	21
1.4 两个重要极限.....	22
1.4.1 极限存在的准则.....	22
1.4.2 两个重要极限.....	23
练习 4	25
1.5 无穷小量与无穷大量.....	26
1.5.1 无穷小量.....	26
1.5.2 无穷大量.....	28
1.5.3 无穷小量与无穷大量的关系.....	28
练习 5	29
1.6 函数的连续性.....	30

1.6.1	函数的增量	30
1.6.2	连续函数的概念	31
1.6.3	函数的间断点	32
1.6.4	初等函数的连续性	33
1.6.5	闭区间上连续函数的性质	33
	练习 6	34
	复习题	35
第 2 章 导数与微分		38
2.1	导数与微分的概念	38
2.1.1	导数的定义	39
2.1.2	微分及其与导数的关系	41
2.1.3	几个基本初等函数的导数	42
2.1.4	导数与微分的几何意义	44
2.1.5	可导与连续的关系	45
2.1.6*	左导数与右导数	46
	练习 1	47
2.2	微分法则与基本公式	48
2.2.1	导数(微分)的四则运算法则	48
2.2.2	复合函数的微分法则	50
2.2.3	反函数的微分法则	52
2.2.4	导数(微分)的基本公式与求导(微分)法则	53
	练习 2	56
2.3	隐函数的微分法	58
2.3.1	隐函数的求导方法	58
2.3.2	对数求导法	59
	练习 3	61
2.4	高阶导数	61
	练习 4	63
	复习题	64

第 3 章 微分法的应用	67
3.1 微分中值定理	67
3.1.1 罗尔定理	67
3.1.2 拉格朗日定理	67
练习 1	69
3.2 洛必达法则	70
3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式	70
3.2.2 “ ∞ ”型未定式	71
3.2.3 其他类型未定式	72
练习 2	73
3.3 函数(曲线)性态的讨论	74
3.3.1 函数单调性的判别	74
3.3.2 函数的极值	76
3.3.3* 曲线的凹凸性与拐点	80
练习 3	82
3.4 函数的最大值与最小值	84
3.4.1 函数在闭区间上的最大值与最小值的求法	84
3.4.2 应用问题举例	85
练习 4	87
3.5* 微分法的其他应用	89
3.5.1 微分在近似计算中的应用	89
3.5.2 边际分析与弹性分析	90
练习 5	93
复习题	94
第 4 章 积分法	98
4.1 不定积分的概念	98

4.1.1	原函数.....	98
4.1.2	不定积分.....	99
	练习 1	101
4.2	直接积分法	102
4.2.1	不定积分的基本性质	102
4.2.2	基本积分公式	102
	练习 2	105
4.3	换元积分法	106
	练习 3	111
4.4	分部积分法	113
	练习 4	115
4.5	积分表的使用	116
	练习 5	118
	复习题.....	118
第 5 章	定积分及其应用.....	121
5.1	定积分的概念与性质	121
5.1.1	定积分的概念	121
5.1.2	定积分的性质	124
	练习 1	126
5.2	定积分与不定积分的关系	126
5.2.1	变上限函数	126
5.2.2	牛顿-莱布尼兹定理	128
	练习 2	129
5.3	定积分的换元法与分部积分法	130
5.3.1	定积分的换元积分法	130
5.3.2	定积分的分部积分法	133
	练习 3	134
5.4	定积分的应用	134
5.4.1	平面图形的面积	135

5.4.2	旋转体的体积	137
5.4.3*	定积分的其他应用举例	137
	练习 4	139
5.5	无限区间上的广义积分	140
	练习 5	142
	复习题	142
第 6 章*	多元函数微积分初步	146
6.1	多元函数的概念	146
6.1.1	空间解析几何简介	146
6.1.2	多元函数	149
6.1.3	二元函数的极限与连续	150
	练习 1	151
6.2	偏导数与全微分	152
6.2.1	偏导数	152
6.2.2	全微分	155
	练习 2	158
6.3	复合函数与隐函数的微分法	159
6.3.1	二元复合函数的求导法则	159
6.3.2	隐函数的求导公式	160
	练习 3	162
6.4	二元函数的极值	162
6.4.1	无条件极值	163
6.4.2	条件极值	166
	练习 4	167
6.5	二重积分	168
6.5.1	二重积分的概念与性质	169
6.5.2	直角坐标系下二重积分的计算	172
	练习 5	177
	复习题	178

附录.....	182
附录 初等数学的一些常用公式及相关知识.....	182
附录 积分表.....	190
附录 练习题、复习题参考答案	201

第 1 章 函数的极限与连续性

极限的概念是用以描述变量在一定变化过程中的终极状态,它是高等数学的重要基本概念之一。本章将在给出初等函数有关概念的基础上,介绍极限、无穷小量和无穷大量的概念,着重讨论极限的运算法则和两个重要极限,并介绍连续函数的概念和性质。

1.1 初等函数

1.1.1 函数及其特性

1) 函数的概念

定义 1 设某一变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个值时, 变量 y 按照一定的对应法则有确定的值与它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中, x 叫做自变量, y 叫做因变量。

如果自变量 x 取某一数值 x_0 时, 函数 y 有确定的值 y_0 与之对应, 就称函数在点 x_0 处有定义。使函数有定义的自变量取值的集合, 称为函数的定义域。自变量取定义域内某一值时, 因变量所对应的值叫做函数值。函数值的集合叫做函数的值域, 它是由定义域和对应法则决定的。

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \lg(2x+1)$ 的定义域。

解 由 $\begin{cases} 1-x > 0, \\ 2x+1 > 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x < 1, \\ x > -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $-\frac{1}{2} < x < 1$, 则函数 $y =$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \lg(2x+1)$ 的定义域是 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ 。

2) 函数的几个特性

() 有界性

定义 2 对于定义在区间 (a, b) 内的函数 $y = f(x)$, 如果存在一个正数 M , 使得对于 (a, b) 内的任一 x , 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是有界的, 如果 M 不存在, 就称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是无界的。

例如, 对于任一 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $|\sin x| \leq 1$, 所以, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的; 而函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的; 但 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内是有界的。

() 奇偶性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 (a, b) 内, 如果对于任一 $x \in (a, b)$, 都有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立, 则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是奇函数; 如果对于任一 $x \in (a, b)$, 都有

$$f(-x) = f(x)$$

成立, 则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是偶函数。

奇函数的图像是关于原点对称的, 偶函数的图像是关于 y 轴对称的。所以奇函数和偶函数的定义域都是关于原点对称的。

例 2 判别下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^3$;

(2) $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$;

(3) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 。

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, 所以 $f(x) = x^3$ 是奇函数;

(2) 因为 $f(-x) = \frac{1}{2}(2^{-x} + 2^x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) = f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$ 是偶函数;

(3) $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$, 因为 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq f(x)$, 所以 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 既不是奇函数也不是偶函数。

() 单调(增减)性

定义4 设函数 $y = f(x)$ 定义在区间 (a, b) 内, 如果对于 (a, b) 内的任意两点 $x_1 < x_2$, 都有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ 或 } (f(x_1) > f(x_2))$$

成立, 则称 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加(减少)的, 如果可以将等号去掉, 则称严格单调增加(减少)的。称 (a, b) 为单调增加(减少)区间。

例如, 指数函数 $y = 2^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的, 而 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调减少的(见表 1-1(2))。

() 周期性

定义5 对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个常数 $T(T > 0)$, 使得对于其定义域内的所有 x , 都有

$$f(x + T) = f(x)$$

成立, 则称 $y = f(x)$ 是其定义域上的周期函数, T 为函数的周期。通常, 把周期函数的最小正周期简称为(基本)周期。

例如, 函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数。

1.1.2 基本初等函数

定义6 下面六类函数统称为基本初等函数:

(1) 常函数 $y = C$ (C 是常数);

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$);

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当 $a = e$ ($e = 2.718\dots$) 时, $y = e^x$;

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 当 $a = e$ 时, $y = \log_e x$, 简记为 $y = \ln x$, 称为自然对数函数;

(5) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x \left[= \frac{1}{\cos x} \right]$ 。

$$y = \csc x \left[= \frac{1}{\sin x} \right];$$

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 。

上述六类函数,特别是前五类函数,在中学数学中已作过较详细的讨论,这里只就它们的图像和性质列表作简要的介绍(见表 1-1)。

表 1-1(1)

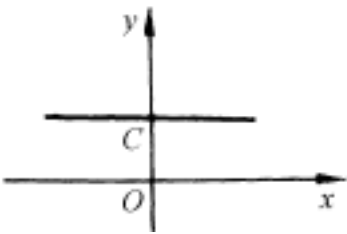
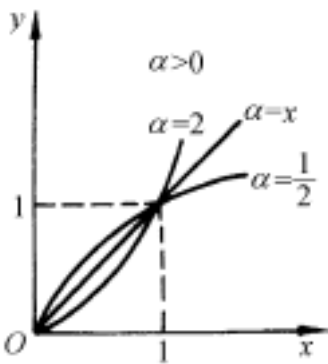
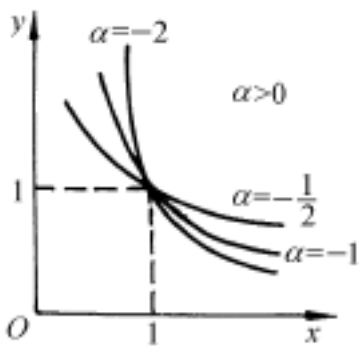
名称	解析式	图 形	简单性质
常函数	$y = C$		垂直于 y 轴的直线
幂函数	$y = x$ (\mathbb{R})		过(1, 1)点, 单调增加函数
			过(1, 1)点, 单调减少函数, 以 x 轴、y 轴为渐近线

表 1-1(2)

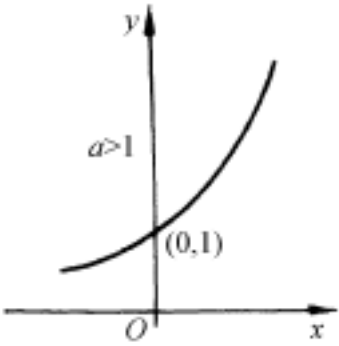
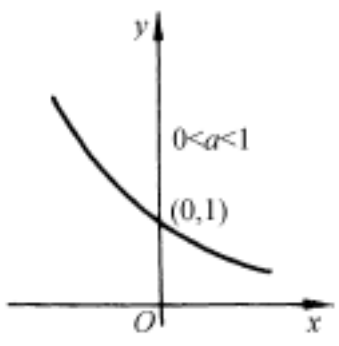
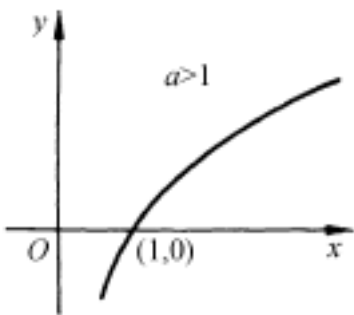
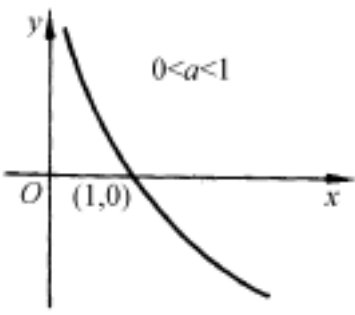
名称	解析式	图 形	简单性质
指数函数	$y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$		$-\infty < x < +\infty$, $0 < a^x < +\infty$, 过 $(0, 1)$ 点, 单调增加函数, 以 x 轴为渐近线
			$-\infty < x < +\infty$, $0 < a^x < +\infty$, 过 $(0, 1)$ 点, 单调减少函数, 以 x 轴为渐近线
对数函数	$y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$		$0 < x < +\infty$, 过 $(1, 0)$ 点, 单调增加函数, 以 y 轴为渐近线
			$0 < x < +\infty$, 过 $(1, 0)$ 点, 单调减少函数, 以 y 轴为渐近线

表 1-1(3)

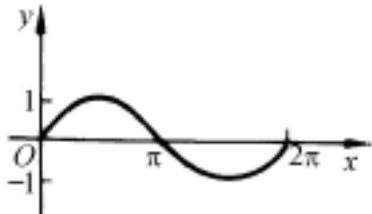
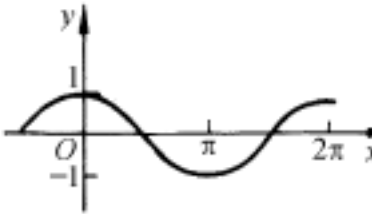
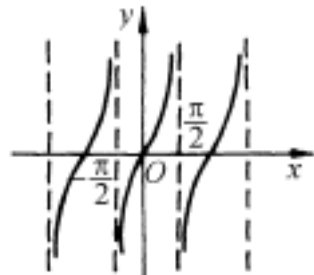
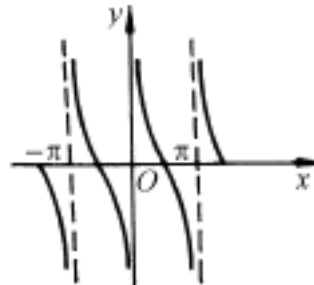
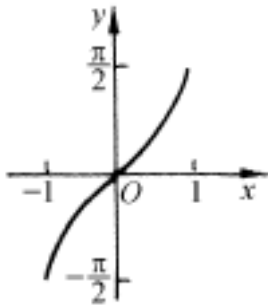
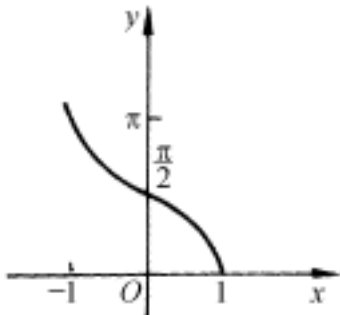
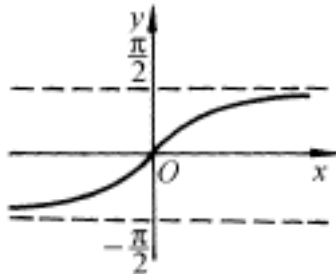
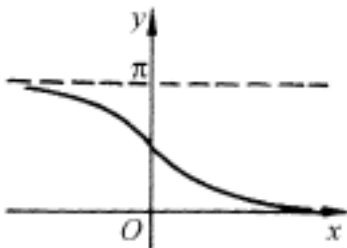
名称	解析式	图 形	简单性质
三 角 函 数	$y = \sin x$		$-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, 是奇函数, 有 $\sin(-x) = -\sin x$, 以 2π 为周期
	$y = \cos x$		$-\infty < x < +\infty$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 是偶函数, 有 $\cos(-x) = \cos x$, 以 2π 为周期
	$y = \tan x$		$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数), $-\infty < \tan x < +\infty$, 是奇函数, 有 $\tan(-x) = -\tan x$, 以 π 为周期
	$y = \cot x$		$x = k\pi$ (k 为整数), $-\infty < \cot x < +\infty$, 是奇函数, 有 $\cot(-x) = -\cot x$, 以 π 为周期

表 1-1(4)

名称	解析式	图 形	简单性质
反 三 角 函 数	$y = \arcsin x$		$-1 \leq x \leq 1,$ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$ 单调增加函数, 是奇函数, 有 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
	$y = \arccos x$		$-1 \leq x \leq 1,$ $0 \leq \arccos x \leq \pi,$ 单调减少函数
	$y = \arctan x$		$-\infty < x < +\infty,$ $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2},$ 单调增加函数, 是奇函数, 有 $\arctan(-x) = -\arctan x$
	$y = \operatorname{arccot} x$		$-\infty < x < +\infty,$ $0 < \operatorname{arccot} x < \pi,$ 单调减少函数