高职高专教材

高 等 数 学

(第二版)

上 册

盛祥耀 编

高等教育出版社

内容提要

本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用和空间解析几何。下册内容包括多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程及附录"数学史料"。

为适应不同专业的需要,书中适量配置了一些标有 * 的内容,以供选学。

本书可作为大学专科和高等专科学校各专业的教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学　上册 盛祥耀编。—2 版。—北京:高等教育出版社,1996(2002　重印)

ISBN 7 - 04 - 005170 - 2

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 盛…　Ⅲ. 高等数学　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 01225 号

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码　100009
传　　真　010 - 64014048

购书热线　010 - 64054588
免费咨询　800 - 810 - 0598
网　　址　http: www.hep.edu.cn
　　　　　http: www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷

开　　本　787×1092　1 16
印　　张　14
字　　数　340 000

版　　次　1987 年 10 月第 1 版
　　　　　1996 年 5 月第 2 版
印　　次　　年　月第　次印刷
定　　价　15 .10 元

郑 重 声 明

第二版前言

本书根据国家教委组织制定的高等学校工程专科“高等数学课程教学基本要求”及第一版使用情况,对第一版作了以下的一些修改:

一、在内容的要求和安排上作了适度的调整。

空间解析几何中增加二、三阶行列式的简介,这是因为中学没有学,并将这一章调至定积分之后;降低了对极限 $\varepsilon - \delta$ 定义的要求;泰勒公式作为泰勒级数的准备知识来处理,并将它放在级数一章之中;洛必达法则中删去“0^0”,“1^∞”,“∞^0”等未定型的极限;略去了富氏级数中在 $[-l, l]$ 上的展开式等。

二、更加注意教学法。

向量代数中的叉积定义由洛伦兹力引入。中学生对此是非常熟悉的,从而使叉积定义容易理解和接受;加强了微分运算,使之与工程技术要求更加接近;对一些重要理论和方法加强了分析和解释,增加了小结等。

三、文字上作了一些修改。

经过以上的修改,作者相信这一版会更受读者的欢迎。

感谢读者对第一版的厚爱,希望第二版能继续得到读者的帮助和支持。

作者

1994.6.27. 于清华园

第一版前言

这本《高等数学》是为大学专科各专业编写的。全书共十二章，分上下两册出版。上册包括：空间解析几何、函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分和定积分及其应用等七章。把空间解析几何放在第一章讲授，是考虑到新生入学时学习热情很高，他们期待学习新的知识。如把函数作为第一章似不能满足这个要求。几年实践说明，这样安排较合适。当然，把它放在定积分之后，也是可以的。下册包括：多元函数及其微分法、重积分、线面积分、级数和常微分方程等五章，最后附有数学史料。

在编写过程中除考虑到大学专科各专业的要求和特点外，还参考了为大学本科四年制所制订的高等数学课程的教学基本要求(讨论稿)及中央电大的教学大纲。另外，我们吸收了不少从事大学专科各专业高等数学教学的教师的想法：全书不写多余的内容，所写内容均为教学所必需，但根据各专业的需要可以有所选取。例如，某些专业可以不学面积分、富氏级数。类似这些内容我们用 * 号表示。为了便于自学，安排了不少数量的例题，讲授时可酌情采用。本书每节后有习题，每章后有总习题。习题数量适中，多数应让学生完成。答案附在每章之后。

本书内容用 150 学时左右就能讲完，如果每学期以 17 周计算，那么第一学期每周可排 5 学时，第二学期每周可排 4 学时。

编写本书时，参考了清华大学应用数学系盛祥耀、居余马、李欧、程紫明等编的《高等数学》，同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第二版)，盛祥耀、葛严麟、胡全德、张元德四人编的《高等数学辅导》，同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》，别尔曼著、景毅等译的《数学解析习题集编》及盛祥耀、葛严麟编的《习题集》(未出版)。在此，对以上所提到的作者表示感谢。

限于编者水平，有不当之处，希望广大读者提出宝贵意见。

盛祥耀

1985 年 12 月于清华园

目　　录

第一章 函　　数

§1. 集合　绝对值　区间

Ⅰ. 集合

一般可以把<u>集合</u>理解为具有某种属性的一些对象所组成的全体.例如某班全体同学组成一个集合;所有三角形组成一个集合;地球上所有的国家组成一个集合;数 1、2、3、4、5 组成一个集合;满足不等式 $a<x<b$ 的 x 组成一个集合;第一、三象限分角线上所有的点组成一个集合等等.集合里的各个对象叫做这个集合的<u>元素</u>.习惯上集合用大写字母如 A、B、C…等表示,而元素用小写字母如 a、b、c…等表示.

含有有限个元素的集合称为<u>有限集</u>.含有无限个元素的集合称为<u>无限集</u>.如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$,读作"a 属于 A".否则记作 $a\notin A$,读作"a 不属于 A".

所谓给定一个集,就是给出这个集合由哪些元素组成.给出的方式不外两种:<u>列举法</u>和<u>描述法</u>.所谓列举法就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内.例如集合 A 包含 1、2、3、4、5 五个数,就可记为

$$A=\{1,2,3,4,5\}.$$

所谓描述法,就是把集合中的元素的公共属性描述出来.它记为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}$$

或

$$A=\{x: x\text{ 具有性质 }p\}.$$

大括号内先写上这个元素的一般形式,再划一竖线或":",然后写上这个集合的元素所具有的共同属性.例如满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的集合,可表示为

$$A=\{x\mid a<x<b\},$$

或

$$\boldsymbol{A}=\{x: a<x<b\}.$$

集合　　$\boldsymbol{M}=\{C\mid C\text{ 是圆心在原点的圆}\}$

表示所有圆心在原点的圆的集合.集合

$$P=\{(x,y)\mid y=2x+1,\ x\in R\}$$

表示所有在直线 $y=2x+1$ 上的点的集合,其中 R 表示全体实数集合.显然点 $(1,2)\in P$,而点 $(1,3)\in P$.

不含任何元素的集合叫做<u>空集</u>,记为　,例如,方程 $x^2+y^2=-1$ 的实数解是一个空集.

Ⅱ. 子集、交集、并集和补集

定义一　如果集合 A 中的每一个元素都属于集合 B,则称 A 为 B 的<u>子集</u>.记为

$$A \quad B,$$

或

$$B \quad A.$$

例如 R 表示全体实数的集合,Q 表示全体有理数的集合.显然 Q 中每一个元素都属于 R.所以集合 Q 是集合 R 的子集.

如果 A 是 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A 那么集合 A 叫集合 B 的<u>真子集</u>,记作

$$A \quad B.$$

例如,所有有理数集合 Q 是所有实数集合 R 的真子集.即

$$Q \quad R.$$

由定义可知,任何一个集合 A 是它自己的子集,即 $A \quad A$.空集可认为是任何集合的子集.

定义二 设两个集合 A, B 如果 $A \quad B$, 同时 $B \quad A$, 则称集合 A 与集合 B <u>相等</u>.记作

$$A = B.$$

这里要注意,如果集合 A 只有一个元素 a 组成,不能写为

$$A = a,$$

应写为

$$A = \{a\}.$$

如果元素 a 属于 A, 不能写为

$$a \quad A,$$

应写为

$$a \in A.$$

也就是说记号 , 是在集合之间使用的.

定义三 既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫做集合 A 与集合 B 的<u>交集</u>,记作

$$A \cap B.$$

如图 1.1.

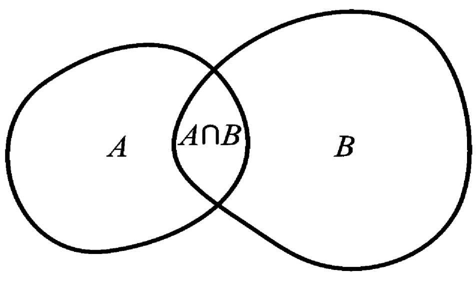

图 1.1

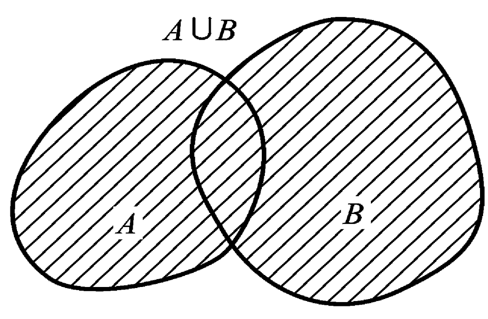

图 1.2

定义四 所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的<u>并集</u>.记作

$$A \cup B.$$

如图 1.2 中阴影部分表示集合 A 与 B 的并集.

例如, $A = \{x \mid 1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 2\}$, 那么

$$A\cap B=\{x\mid 1<x<2\};\text{而 } A\cup B=\{x\mid 0<x<3\}.$$

又例如,$\{1,2,3,4,6\}\cap\{0,2,4,8,10\}=\{2,4\}$,

$$\{1,2,3,4,6\}\cup\{0,2,4,8,10\}=\{0,1,2,3,4,6,8,10\}.$$

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集,那么集合 I 称为<u>全集</u>.

定义五　如果集合 A 是全集 I 的子集,则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合,叫做集合 A 在集合 I 的<u>补集</u>.简称集合 A 的补集,记作 $\overline{A}$.如图 1.3 中阴影部分是集合 A 的补集 $\overline{A}$(长方形表示全集 I),它可表示为

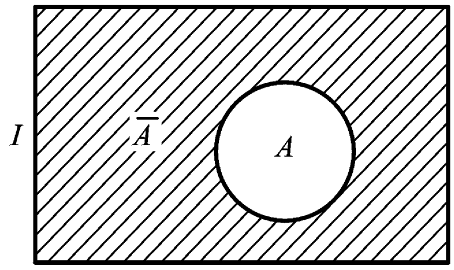

图　1.3

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I,\text{且 } x\notin A\}.$$

显然,$A\cup\overline{A}=I$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $\overline{\overline{A}}=A$.其中 $\overline{\overline{A}}$ 表示:集合 $\overline{A}$ 的补集.例如,全集 I 为所有实数集合.Q 表示所有有理数的集合,则

$$\overline{Q}=\{x\mid x\in R,\text{且 } x\notin Q\}.$$

即 $\overline{Q}$ 为所有无理数集合.

Ⅲ. 绝对值

定义六　实数 a 的绝对值(记作 $|a|$)规定为

$$|a|=\begin{cases}a, & \text{若 } a\geq 0;\\ -a, & \text{若 } a<0.\end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离.

绝对值有以下的一些性质:

(1) $-|a|\leq a\leq|a|$;

(2) 如果 $|x|<\varepsilon$,则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$,反之亦然;

(3) 如果 $|x|>N$,则 $x>N$ 或 $x<-N$,反之亦然.

绝对值有以下的一些运算规则:

(1) $|a+b|\leq|a|+|b|$(a, b 为实数).

事实上

$$-|a|\leq a\leq|a|,$$
$$-|b|\leq b\leq|b|,$$

两式相加,得

$$-(|a|+|b|)\leq a+b\leq|a|+|b|.$$

所以

$$|a+b|\leq|a|+|b|.$$

(2) $|a-b|\geq|a|-|b|$(a, b 为实数)

事实上,

$$|a|=|a-b+b|\leq|a-b|+|b|,$$

即

$$|a-b|\geq|a|-|b|.$$

(3) $|ab|=|a||b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　($b\neq 0$).

这两个公式是显然的.

Ⅳ. 区间

集合$\{x \mid a < x < b\}$**称为**<u>**开区间**</u>**,记作**(a, b).**它在数轴上表示点** a **与点** b **之间的线段,但不包括端点** a **及端点** b**(图 1.4);集合**$\{x \mid a \leq x \leq b\}$**称为**<u>**闭区间**</u>**,记作**$[a, b]$.**它在数轴上表示点** a **与点** b **之间的线段,包括其两个端点(图 1.5).**

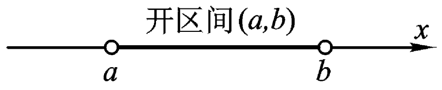

图 1.4

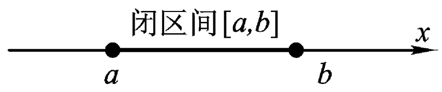

图 1.5

还有其他类型的区间:

$\{x \mid a < x \leq b\}$ **记作**$(a, b]$**,称为**<u>**半开区间**</u>;

$\{x \mid a \leq x < b\}$ **记作**$[a, b)$**,称为**<u>**半开区间**</u>;

$\{x \mid x > a\}$**或**$\{x \mid x < a\}$**记作**$(a, +\infty)$**或**$(-\infty, a)$**,称为**<u>**半无穷区间**</u>;

$\{x \mid x$ **为任何实数**$\}$**记作**$(-\infty, +\infty)$**,称为**<u>**无穷区间**</u>**等.**

集合$\{x \mid |x - a| < \varepsilon\}$**称为**<u>**点** a **的** ε **邻域**</u>.**它也可以用开区间来表示.事实上**

$$|x - a| < \varepsilon,$$

去绝对值,得

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon,$$

即

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

就是说,点 a **的** ε **邻域就是开区间**$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.**从数轴上看,点** a **的** ε **邻域表示:以点** a **为中心,长度为** 2ε **的开区间(图 1.6).**

图 1.6

例如,把 -1 **的**$\frac{1}{2}$**邻域表示成开区间.即**

$$|x - (-1)| < \frac{1}{2}.$$

去绝对值,得

$$-\frac{1}{2} < x + 1 < \frac{1}{2},$$

即

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2},$$

即为开区间 $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.

习　题

1. **设** $A = \{-1, 2, 4, 9, 10\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.**求** $A \cap B$, $A \cup B$.
2. **设** $A = \{x \mid x \geq 0\}$, $B = \{x \mid x < 5\}$**求** $A \cap B$, $A \cup B$.
3. **设全集为所有整数的集合,** A **为所有自然数的集合,求** A **的补集,即** A .
4. **写出集合** $A = \{1, 2, 0\}$**的所有子集.**

5. 解不等式$|x|>|x+1|$.

6. 解不等式$|x+1|+|x-1|=4$.

7. 把集合 $A=\{x||x-2|\le 3\}\cap B=\{x||x+1|<2\}$用区间记号表示.

8. 把点 2 的$\frac{1}{3}$邻域用集合表示.

§2. 映射与函数　反函数

Ⅰ. 映射

定义　设 A,B 是两个非空集合,如果按照一个确定的规则 f,对于集合 A 中每一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,则称 f 是由集合 A 到集合 B 的映射.记作

$$f:A\to B.$$

如果 A 中的元素 a,对应的是 B 中的元素 b 则称 b 为 a 的象,a 为 b 的原象.

在定义中,要注意按照规则 f 确定的集合 B 中的元素存在且是唯一的.例如图 1.7(b),1.7(c)不表示由集合 A 到集合 B 的映射.因为图 1.7(b)中集合 A 的元素 a 对应集合 B 中的两个元素 b、c,不符合映射定义中唯一性的要求.而图 1.7(c)中集合 A 的元素 a_2 在集合 B 中无元素对应,也不符合映射定义中存在性的要求,但要注意,图 1.7(d)所表示的是映射,尽管集合 A 中存在两个元素 a_1, a_2 对应集合 B 中的同一个元素 b,但不违背映射的定义.

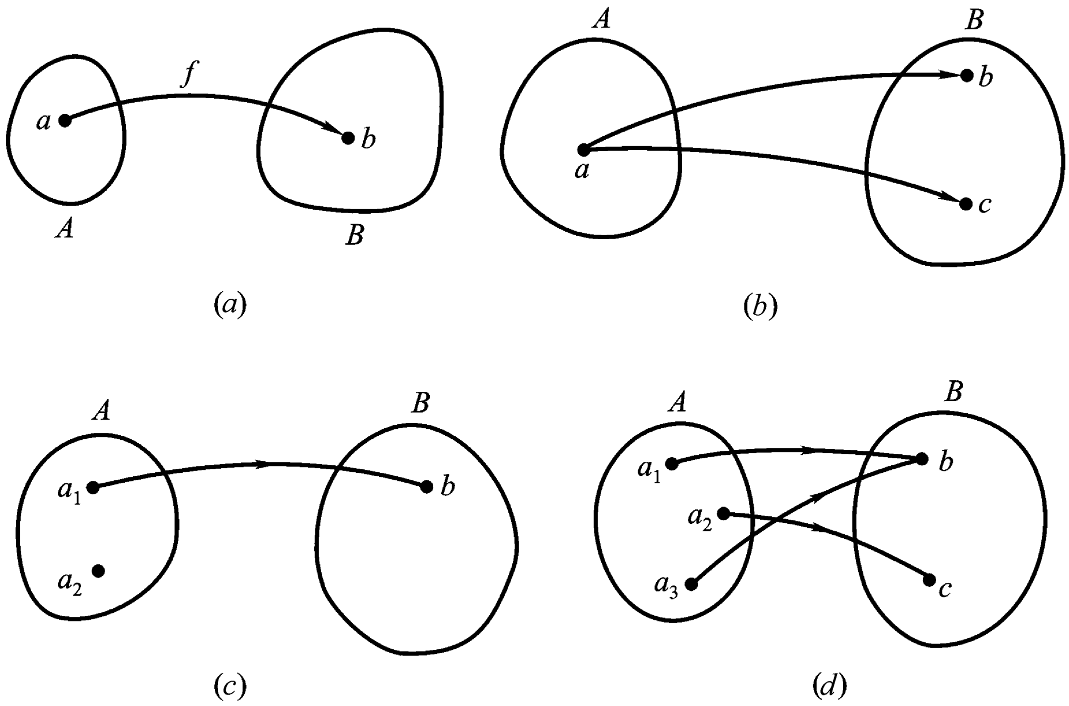

图　1.7

例 1　设 A 表示所有出生在中国的人的集合,B 表示所有中国的县的地名的集合,规则 f 是 A 中人对应其出生地的县名.则 f 是由 A 到 B 的映射.

例 2　设 N 是所有大于 1 的整数集合,R^+ 是所有正实数的集合,对应规则 f 是将 N 中元素取对数(常用对数),则 f 是由 N 到 R^+ 的映射.

例 3　设 $A=\{x|1\le x\le 3\}$, $B=\{y|1\le y\le 9\}$,对应规则 f 是将集合 A 中元素取平方,则 f 是由 A 到 B 的映射.

Ⅱ. 函数

定义 设有两个非空实数集合 D、B,如果对于数集 D 中的每一个数 x,按照确定的规则 f 对应着数集 B 中唯一的一个数 y,则称 f 是定义在集合 D 上的<u>函数</u>.

事实上,函数就是集合 D 到集合 B 的一种映射.

D 称为函数的<u>定义域</u>,与 $x\in D$ 对应的实数 y 记作 $y=f(x)$.与 x_0 对应的 y 值有时记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,集合 $B_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的<u>值域</u>.显然 $B_f \quad B$.

习惯上,x 称为<u>自变量</u>,y 称为<u>因变量</u>.要注意 f 是<u>函数</u>,而 $f(x)$是<u>函数值</u>.但是研究函数总是通过函数值来进行的.为了方便,以后也把 $f(x)$称作 x 的函数 或 y 是 x 的函数.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0,因变量 y 能得出一个确定的值,那么就说函数 $y=f(x)$ <u>在 x_0 处有定义</u>.

对于不同的函数,应该用不同的记号,如 $f(x)$,$g(x)$,$F(x)$,$G(x)$等等.

有时,会出现对于变量 x,有几个 y 值与之对应的情形,根据函数定义,y 不是 x 的函数.但为了方便,我们约定把这种情况称之为 y 是 x 的多值函数.对于多值函数通常是限制其 y 的变化范围使之成为单值,再进行研究.例如,反三角函数 $y=\mathrm{Arc}\sin x$ 是多值函数,当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$时,就是单值了(这时习惯上记为 $y=\arcsin x$).通过对 $y=\arcsin x$ 的研究就可了解 $y=\mathrm{Arc}\sin x$.

例 4 设函数 $f(x)=x^4+x^2+1$.求 $f(0)$,$f(t^2)$,$[f(t)]^2$,$f\left(\frac{1}{t}\right)$,$\frac{1}{f(t)}$.

解

$$f(0)=0^4+0^2+1=1,$$

$$f(t^2)=(t^2)^4+(t^2)^2+1=t^8+t^4+1,$$

$$[f(t)]^2=(t^4+t^2+1)^2,$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^4+\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1+t^2+t^4}{t^4},$$

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t^4+t^2+1}.$$

例 5 设 $f(x+3)=\frac{x+1}{x+2}$,求 $f(x)$.

解 令 $x+3=t$,则 $x=t-3$.

$$f(x+3)=\frac{(t-3)+1}{(t-3)+2}=\frac{t-2}{t-1}.$$

即

$$f(t)=\frac{t-2}{t-1}.$$

所以

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

例 6 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$,证明 $f(x)=f(-x)$.

证 因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}\cdot\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

所以

$$f(x) = f(-x).$$

例 7 求函数 $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \lg(x - 1)$的定义域.

解 这个函数是两项之和,所以当且仅当每项都有定义时,函数才有定义.第一项的定义域是 $D_1 = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$,第二项的定义域是 $D_2 = \{x \mid x > 1\}$ 所以函数 $f(x)$的定义域是

$$D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid 1 < x \leq 2\}.$$

或写为区间$(1,2]$.

Ⅲ. 函数的表示法

函数有三种表示法:公式表示法;图形表示法;表格表示法.图形表示法在工程中常用.例如生产的进度表,仪器的记录等.它的优点是直观,一目了然,它的缺点是不便于分析研究.表格表示法在设计工作中常用.它的优点是使用方便,如对数表,三角函数表,它的缺点也是不便于分析研究.公式表示法在理论研究中、推导论证中使用,它的优点是表达清晰、紧凑,缺点是抽象,不易理解.

Ⅳ. 建立函数关系

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一.在这儿我们仅介绍利用简单的几何或物理关系建立函数关系.在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 8 有一块边长为 a 的正方形铁皮,将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形,制成一只无盖盒子,求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系

解 设剪去的小正方形的边长为 x,盒子的体积为 V.由图 1.8,容易得到

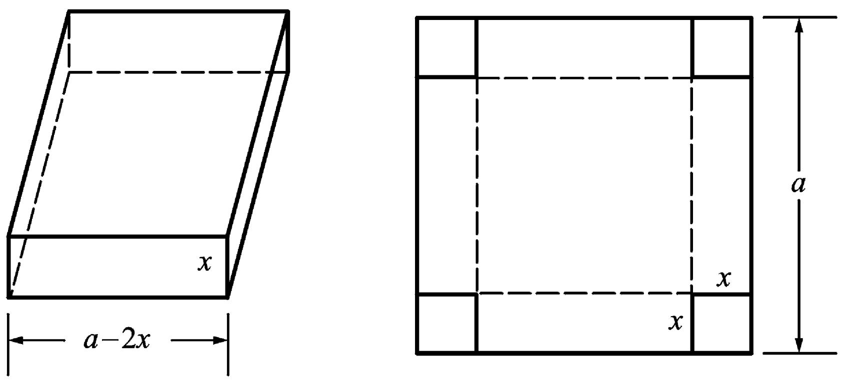

图 1.8

$$V = x(a - 2x)^2 \quad x \in \left(0, \frac{a}{2}\right).$$

例 9 设有一圆锥容器,容器的底半径为 R 厘米,高为 H 厘米 现以每秒 a 立方厘米的速率往容器内注入水.试把容器中的水的容积 V 分别表示成时间 t 及水高 h 的函数(图 1.9).

解 (1) 显然 t 秒时容器中水的容积为

$$V = at.$$

(2) 设当容器中水的高度为 h 时水的容积为 V,并设此时水面的半径为 r.根据锥体体积公式有

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H - h).$$

因为$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$,所以有

$$\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H},$$

即

$$r=\frac{R}{H}(H-h),$$

代入锥体体积公式,得

$$V=\frac{\pi R^2 H}{3}\left[1-\left(1-\frac{h}{H}\right)^3\right],\ h\in[0,H].$$

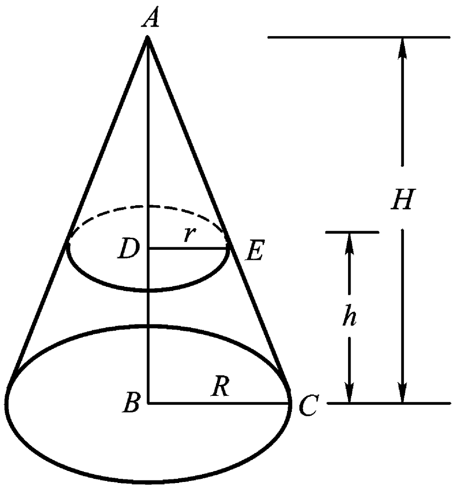

图 1.9

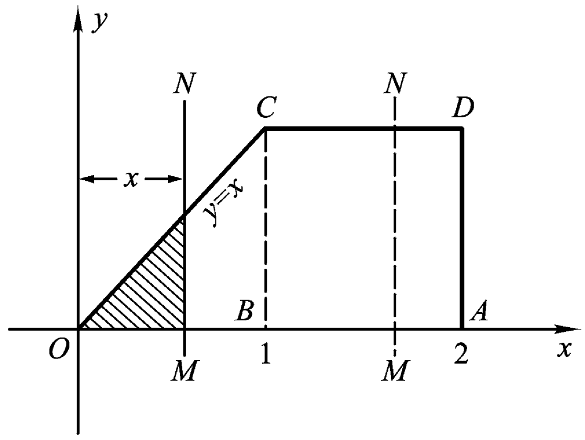

图 1.10

有时变量之间的函数关系较为复杂,需要用几个式子来表示.如下面的例 10.

例 10 如图 1.10 所示的图形,在 O 与 A 之间引一条平行于 y 轴的直线 MN,试将 MN 左边阴影部分的面积 S 表示为 x 的函数.

解 当直线 MN 位于区间[0,1]内时,即 $x\in[0,1]$时.

$$S=\frac{1}{2}x^2.$$

当直线 MN 位于区间[1,2]内时,即 $x\in[1,2]$时,

$$\begin{aligned}S&=\triangle OBC\text{ 面积}+\text{矩形 }BCNM\text{ 的面积}\\&=\frac{1}{2}+(x-1)=x-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以面积 S 为

$$S=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & \text{当 } x\in[0,1]\text{ 时},\\ x-\frac{1}{2}, & \text{当 } x\in(1,2]\text{ 时}.\end{cases}$$

这是在定义域内不同区间上用不同式子表示的一个函数,这种形式的函数,称为<u>分段函数</u>.要注意它是用两个式子表示的函数,而不是两个函数.

Ⅴ. 反函数

设函数 f 定义在数集 A,其值域为数集 B 如果对于数集 B 中每一个数 y,数集 A 中都有唯一的一个数 x,,使 $f(x)=y$.记由 y 对应于 x 的规则为 ϕ,则称 ϕ 为 f 的<u>反函数</u>,也常称 $x=\phi(y)$是 $y=f(x)$的反函数,二者的图形是相同的.习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示.因此,也可说 $y=\phi(x)$是 $y=f(x)$的反函数,但这时二者的图形是对称于直线 $y=x$.

求反函数的步骤一般是这样:从 $y=f(x)$中解出 x,得 $x=\phi(y)$,再将 x,y 分别换为 y,x.即 $y=\phi(x)$就是 $y=f(x)$的反函数.

例 11 求 $y=3x-5$ 的反函数.

解 解出 x,得
$$x=\frac{1}{3}(y+5),$$
将 x, y 分别换为 y, x,得
$$y=\frac{1}{3}(x+5).$$
所以,$y=3x-5$ 的反函数为 $y=\frac{1}{3}(x+5)$.

还有许多反函数的例子.如 $y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数;$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数,等等.

习题

求 9—12 题的定义域.

9. $y=\quad 3-x$.　　10. $y=\quad 4-x^2+\frac{1}{x-1}$.

11. $y=\ln(1-x)+\quad x+2$.　　12. $y=\lg\sin x$.

在 13—14 题中,$f(x)$与 $\varphi(x)$是否相同,为什么?

13. $f(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\quad x^2$.

14. $f(x)=\lg(x^2)$与 $\varphi(x)=2\lg x$.

15. 圆柱体内接于高为 h,底半径为 r 的圆锥体内,设圆柱体高为 x,试将圆柱体的底半径 y 和体积 V 分别表示为 x 的函数.

16. 将半径为 R,中心角为 α 的扇形做成一个无底的圆锥体,试将这圆锥体体积 V 表示为 α 的函数.

17. 设
$$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ x^2, & x<0.\end{cases}$$
求 $f(0), f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right)$.

18. 设 $f(x)=\frac{x+1}{x+5}$.求 $f(1), f(3), f\left(\frac{1}{x}\right), f\left(\frac{x+1}{x+5}\right)$.

19. 设 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$ 求 $H(x-1), H(x)-H(x-1)$.

20. 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$.求 $f(x), f(x-1)$.

§3. 初 等 函 数

Ⅰ. 基本初等函数及其图形

幂函数 $y=x^a$(a 为任何实数);指数函数 $y=a^x$($a>0$,且 $a\neq1$);对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$);三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x, y=\sec x, y=\csc x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\operatorname{arctg} x$ 等五类函数统称为基本初等函数.

下面我们把基本初等函数的图形列出来,以便查用.

(1) 幂函数 $y=x^{a}$(a 为任何实数).

当 $a>0$ 时(讨论 $x\geq 0$ 的情形),所有图形都通过点(0,0)及点(1,1),在 $0<a<1$ 的情况下图形向上凸起,在 $a>1$ 的情况下,图形向下凸起;当 $a<0$ 时(讨论 $x>0$ 的情形),所有图形都通过点(1,1),且当图形上的点远离原点时,图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近(图 1.11).

(2) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0$,且 $a\neq 1$).

对于任何 x,均有 $a^{x}>0$,对任何 a($a>0$, $a\neq 1$),图形通过点(0,1).当 $a>1$ 时,图形向左逐渐与 x 轴靠近;当 $0<a<1$ 时,图形向右逐渐与 x 轴靠近(图 1.12).

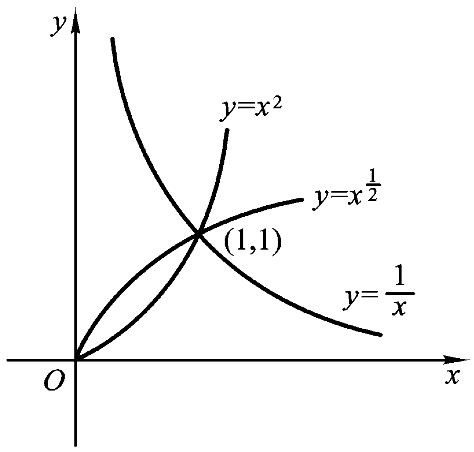

图 1.11

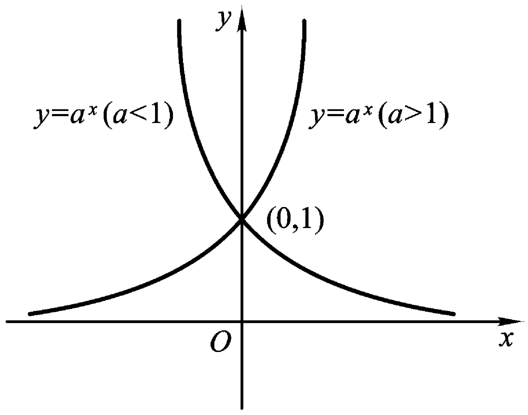

图 1.12

(3) 对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0$,且 $a\neq 1$).

对数函数的定义域为 $x>0$,它的图形与其反函数 $y=a^{x}$ 对称于直线 $y=x$,因而它通过点(1,0)(图 1.13).

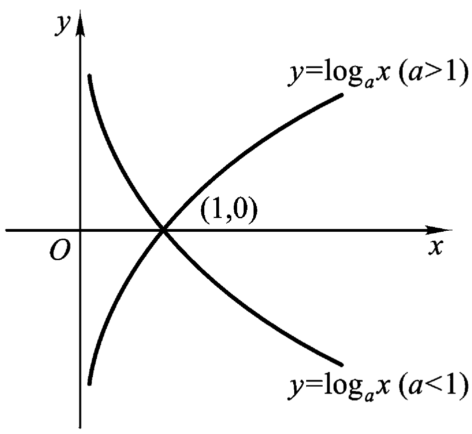

图 1.13

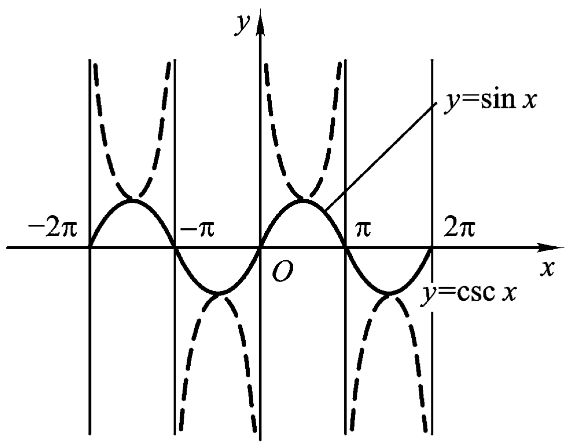

图 1.14

(4) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 均以 2π 为周期, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ 均以 π 为周期(周期定义见后)(图 1.14,1.15,1.16).

(5) 反三角函数.

反三角函数的图形容易由三角函数的图形求得(图 1.17,1.18).

$$y=\arcsin x \quad 它的主值为 -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2},$$

$$y=\arccos x \quad 它的主值为 0\leq y\leq\pi,$$

$$y=\operatorname{arc\,tg} x \quad 它的主值为 -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}.$$