普通高等教育"十五"国家级规划教材

(高职高专教育)

高 等 数 学

第二版

主编　李心灿

副主编　徐　兵　蔡燧林

编委(按姓氏笔画为序)

计慕然　刘浩荣　刘　晓

吴　满　杨万禄　张魁元

金桂堂　龚冬保　谢　鹏

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。内容包括函数，极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，无穷级数，常微分方程。节末有习题，章末有复习题，书末附有习题答案和五个附录：本书中出现的数学家简介，简单不定积分表，二阶、三阶行列式简介，常用的初等数学公式，检测题。随教材赠送教师电子教案。

本书是充分汲取高等职业学校、高等专科学校和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面的经验、教训，结合我国的教学实际编写而成的，它既适合高职高专院校使用，也适用于成人高校的专科及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 李心灿主编. —2版. —北京：高等教育出版社，2003.4
ISBN 7-04-012402-5

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第014089号

责任编辑 薛春玲　封面设计 杨立新　责任绘图 杜晓丹
版式设计 马静如　责任校对 朱惠芳　责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http: www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http: www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷			
		版　　次	1999年5月第1版
开　　本	787×1092　1 16		年　月第　版
印　　张	28.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	690 000	定　　价	29.40元

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19 号),提出了“力争经过 5 年的努力,编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用 2 至 3 年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用 2 至 3 年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神,有关院校和出版社从 2000 年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，也是教育部高职高专规划教材。编者是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》、《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，充分汲取高等职业学校、高等专科学校和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的经验、教训以及我国的教学实际而编写的。它既适合高职高专院校使用，也适用于成人高校的专科及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

在编写中我们努力体现下述特点：

1. 按照教学基本要求，充分考虑高职高专教育的特点和当前的教学实际，以“必需”“够用”为度(书中用小五号字排版和标有 * 号的内容，例题、习题不作为基本要求)。

2. 重点突出，难点分散，注重几何直观与物理解释，重视培养学生的几何想像能力、抽象概括能力、逻辑推理能力和应用数学的意识、兴趣、能力。

3. 为了便于自学，对基本概念、基本理论、基本方法作了深入浅出的介绍，配备了较多的例题和习题，重视培养学生的运算能力。

4. 在附录中编入了与本书有关的十多位数学家的简介。这不但可以使读者了解这些数学家的生平、业绩、治学态度、治学方法、品德、风采，向他们学习；而且把定理、公式与名人、轶事联系起来，往往使人印象深刻，甚至终身难忘。

5. 为了辅导学生学习，编写了一本与教材配套的学习辅导书。该书按照教材章节对应编写，每章紧扣教学基本要求和主教材，都分为五个部分：教学基本要求；重点；应明确的几个问题；思考题分析；范例解析。其目的是使“无疑者须教有疑，有疑者却要无疑。”帮助学生理出知识框架和脉络，领会思想，掌握精髓，培养学生分析问题、解决问题的能力，使教学辅导用书能成为学生不见面的辅导老师。

6. 为了便于教师用多媒体进行讲课，还配有一张教师讲课使用的电子教案。

本书由北京航空航天大学、浙江大学、西安交通大学、同济大学、天津大学、吉林大学、华南理工大学、华中科技大学、北方交通大学、北京西城经济科学大学，共 10 所大学的 12 位数学教师组成的编委会合作编写的，全书由李心灿任主编，徐兵、蔡燧林任副主编，其中第一、二章由张魁元执笔，第三章由计慕然执笔，第四章由吴满执笔，第五、六章由金桂堂执笔，第七章由徐兵、刘晓执笔，第八章由杨万禄执笔，第九章由龚冬保、徐兵执笔，第十章由徐兵执笔，第十一章由刘浩荣执笔，附录由李心灿，徐兵编写，书中的图大部分皆由谢鹏用计算机绘制，最后由正副主编修改、统稿、定稿。

本书的编写和出版，自始至终得到了高等教育出版社有关领导及高职高专分社张思挚副社

长的重视，并给予了大力支持和帮助。在此一并致以诚挚的谢意。

由于我们水平所限，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正。

编者

2002 年 12 月

目 录

第一章　函　　数

初等数学研究的主要是常量及其运算,而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的依赖关系.函数正是这种依赖关系的体现.函数是高等数学中最重要的基本概念,也是高等数学主要的研究对象.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数的性质,分析初等函数的结构.

§1.1　预备知识

一、实数集

随着社会的发展,人类逐步加深对数的认识.正整数首先被人类所认识,全体正整数构成的数集记为 $N_+ = \{1, 2, \cdots\}$.为了使减法运算能够顺利进行,数的范围扩大到了整数,整数集 $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.为了除法运算的顺利进行,数的范围扩大到了有理数,有理数集 $Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in Z, q \neq 0\}$.即一个数是有理数,当且仅当它可以写成分数.

如果用十进制小数来表示有理数,则有理数被写成有穷的,或者是无限循环的小数.如 $\frac{1}{2} = 0.5$, $-\frac{1}{4} = -0.25$, $\frac{4}{3} = 1.\dot{3}$.反之,有穷小数或无限循环小数都可以化成分数.

具有原点,正方向和长度单位的直线称为数轴.任何一个有理数都恰有数轴上的一个点与其对应.这种与有理数对应的点称为有理点.有理点在数轴上是处处稠密的,即在任意的两个有理点之间,仍有有理点.这是因为,对于任何不相等的两个有理数 a 和 b,均有有理数 $\frac{a+b}{2}$ 介于其间.虽然有理数在数轴上处处稠密,但有理点却并未充满整个数轴.如圆周率 π,边长为 1 的正方形的对角线长度 2,当它们被表示成十进制小数时,都不是有穷的或无限循环的.经计算 $\pi = 3.141\,592\,6\cdots$, $2 = 1.414\,213\,5\cdots$.这种无限不循环小数称为无理数.无理数在数轴上对应的点叫做无理点.

有理数与无理数统称为实数,实数集记为 R.本书如无特殊声明,总是在 R 上讨论问题.实数的全体充满了整个数轴,即实数不但是稠密的,而且是连续的.实数与数轴上的点形成了一一对应关系.实数系统可表示为:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\text{(无限不循环小数)}.\end{cases}$$

二、实数的绝对值

实数的绝对值是数学里经常用到的概念.下面介绍实数绝对值的定义及一些性质.

实数 x 的绝对值,记为$|x|$,它是这样一个非负实数

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如,$|3.78|=3.78$,$|-8|=8$,$|0|=0$.

$|x|$的几何意义为数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质:

(1) 对于任意的 $x\in R$,有$|x|\geq 0$.当且仅当 $x=0$ 时,才有$|x|=0$.

(2) 对于任意的 $x\in R$,有$|-x|=|x|$.

(3) 对于任意的 $x\in R$,有$|x|=\sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x\in R$,有$-|x|\leq x\leq |x|$.

(5) 设 $a>0$,则$|x|<a$ 的充分必要条件是$-a<x<a$.

(6) 设 $a\geq 0$,则$|x|\leq a$ 的充分必要条件是$-a\leq x\leq a$.

(7) 设 $a\geq 0$,则$|x|>a$ 的充分必要条件是$x<-a$或者$x>a$.

(8) 设 $a\geq 0$,则$|x|\geq a$ 的充分必要条件是$x\leq -a$或者$x\geq a$.

它们的几何解释是很直观的.例如性质(5),在数轴上$|x|<a$ 表示所有与原点距离小于 a 的点 x 构成的点集,$-a<x<a$ 表示所有位于点$-a$ 和点 a 之间的点 x 构成的点集,它们表示同一个点集.性质(6)—(8)可做类似的解释.

由性质(5)可以推得不等式$|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的,其中 A 为实数,a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值,有以下的结论:

对任意的 $x,y\in R$,恒有

(1) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (三角不等式).

(2) $|x-y|\geq||x|-|y||\geq|x|-|y|$.

(3) $|xy|=|x||y|$.

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

下面仅就结论(1)进行证明.

证 由性质(4),有 $-|x| \le x \le |x|$ 及 $-|y| \le y \le |y|$,从而有

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|.$$

再根据性质(6),由于 $|x|+|y| \ge 0$(相当于性质(6)中 $a \ge 0$),得

$$|x+y| \le |x|+|y|.$$

三、区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集,包括四种有限区间和五种无限区间,它们的名称、记号和定义如下:

闭区间 $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$

开区间 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

半开区间 $(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$

无限区间 $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$

$[a, +\infty) = \{x \mid a \le x\}$

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}$

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

其中 a, b 为确定的实数,分别称为区间的左端点和右端点.闭区间 $[a, b]$,半开区间 $[a, b)$ 及 $(a, b]$,开区间 (a, b) 为有限区间.有限区间的左、右端点之间的距离 $b - a$ 称为区间长度.$+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作"正无穷大"与"负无穷大",它们不表示任何数,仅仅是记号.

区间在数轴上可如图 1.1 表示.

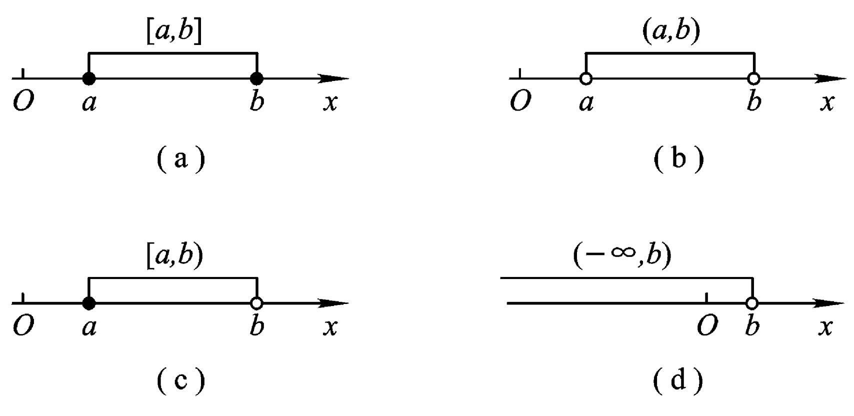

图 1.1

邻域是高等数学中经常用到的概念.称实数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.由邻域的定义知

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

表示分别以 $a - \delta, a + \delta$ 为左、右端点的开区间,区间长度为 2δ,见图 1.2

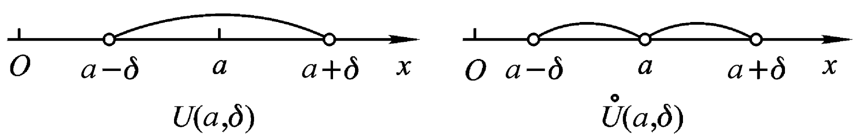

图 1.2

在 $U(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 得到的实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 显然,去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是两个开区间 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 的并,即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$,见图 1.2.

习题 1.1

1. 用区间表示下列范围:

(1) $x\leq 0$;　(2) $-1\leq x<2$;　(3) $|x-2|<\varepsilon$;　(4) $U(a,\delta)$.

§1.2　函数及其表示法

一、变量与常量

在观察自然现象或研究实际问题时,我们经常遇到各种各样的量. 如果一个量在某过程中是变化的,即可以取不同的数值,则称这种量为变量;如果一个量在某过程中保持不变,总取同一值,则称这种量为常量. 本书中变量通常用 $x, y, t, \cdots$ 表示,常量通常用 $a, b, c, \cdots$ 表示.

例如,一列从天津直达北京的旅客快车在行驶过程中,列车的速度、列车距北京的距离及列车中的燃油重量都是变量,而列车中的旅客数和车厢节数是常量. 在列车抵达北京站,旅客下车的过程中,列车的速度,列车距北京站的距离都是常量,而列车上的旅客数则是个变量. 可见常量与变量都是对某一过程而言的.

为了讨论问题的方便,常量可以看成是特殊的变量.

二、函数的概念

在同一个过程中,往往有几个变量同时存在,变量与变量之间的依赖关系正是高等数学研究的主要问题. 本章只讨论两个变量的情况. 先看下面的例子.

例 1　自由落体运动. 设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的依赖关系由下式给定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度,假定物体着地时刻为 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时,由上式就可以确定相应的 s 值.

例 2　从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0(元),按铁路部门的规定,1.1 米以下的儿童免票,身高超过 1.1 米但不足 1.4 米的儿童购买半价票,身高为 1.4 米或超过 1.4 米者购买全票.试写出从甲地到乙地票价 q 作为身高 s 的函数的表达式.

解　依题意,q(单位:元)作为 s(单位:m)的依赖关系,可以表示为如下形式

$$q=\begin{cases}0, & 0<s<1.1,\\ \frac{1}{2}q_0, & 1.1\leq s<1.4,\\ q_0, & s\geq 1.4.\end{cases}$$

上面两个例子均表达了两个变量之间的依赖关系,每个依赖关系对应一个法则,根据各自的法则,当其中一个变量在某一数集内任取一值时,另一变量就有确定值与之对应.两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系.

定义　设 x 和 y 是两个变量,X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集.如果对任何的 $x\in X$,变量 y 按照一定的规则 f,有惟一确定的实数值与之对应,则称规则 f 是定义在 X 上的函数,也称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x).$$

称 X 为该函数的定义域;称 x 为自变量,称 y 为因变量.

当自变量 x 取数值 $x_0\in X$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$,或 $y|_{x=x_0}$.当 x 取遍 X 的各个数值时,对应的变量 y 取值的全体组成的数集称作这个函数的值域.

在函数的定义中自变量 x 与因变量 y 的对应规则,也可以改用其它字母,如 F,φ,f_1,f_2 等.如果两个函数的定义域相同,并且对应规则也相同(从而值域也相同),那么它们不论用什么记号,均表示同一个函数.

在实际问题中,函数的定义域是由实际意义确定的.如例 1 中的定义域为 $[0,T]$,例 2 中的定义域为 $(0,+\infty)$.在研究由公式表达的函数时,我们约定:函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集.例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$,函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 3　求函数 $y=\frac{x+1}{x+3}$ 的定义域.

解　当分母 $x+3\neq 0$ 时,此函数才有意义.所以函数的定义域为 $x\neq -3$ 的全体实数,用区间表示为 $(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

例 4　求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解　要使函数 y 有定义,必须使

$$16-x^2\geq 0,$$
$$\sin x>0$$
成立,即
$$-4\leq x\leq 4,$$
$$2n\pi<x<(2n+1)\pi\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$
这个不等式组的解为
$$-4\leq x<-\pi \text{或} 0<x<\pi,$$
所以函数的定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

例 5　求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=3, x=x_0+1, x=x_0+h$ 各点的函数值.

解　$f(3)=3^2-3\times 3+5=5$.

$f(x_0+1)=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5=x_0^2-x_0+3$,

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5=x_0^2+2hx_0+h^2-3x_0-3h+5$$
$$=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).$$

例 6　设有函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$,问它们是否为同一个函数?

解　当 $x\neq -1$ 时,函数值 $f(x)=g(x)$,但是 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$在 $x=-1$ 点无定义,其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.由于 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同,所以它们不是同一个函数.

在函数的定义中,要求对每一个 $x\in X$,都有惟一的 y 值与其对应.而在有的场合,如变量 x 与 y 由方程 $x^2+y^2=1$ 确定了它们之间的关系 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,任取 $x\in(-1,1)$, y 就有两个值与其对应,因此这就不符合前面的函数定义了,但是为了表述上的方便,我们将这种多个 y 值与一个x对应的关系称为多值函数.相应地,前面定义中的函数可称为单值函数.多值函数通常将其分成几个单值函数(或称单值分支)来讨论,如 $x^2+y^2=1$ 可以分成两个单值分支:$y=\sqrt{1-x^2}$和 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

以后凡没有特别说明,本书讨论的函数都是指单值函数.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X.在平面直角坐标系 Oxy 中,对于任意的 $x\in X$,通过函数 $y=f(x)$都可确定一个点 $M(x,y)$,当 x 取遍定义域 X 中的所有值时,点 $M(x,y)$描出的图形称为函数 $y=f(x)$的图形.一个函数的图形通常是一条曲线,见图 1.3.因此,又称函数 $y=f(x)$的图形为曲线 $y=f(x)$.

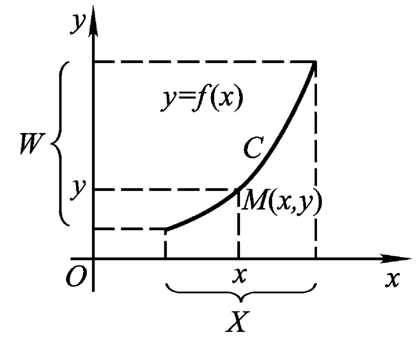

图 1.3

三、函数的表示法

在函数的定义中,并没有规定用什么方法来表示函数.为了能很好地研究函数关系,就应该采用适当的方法把它表示出来.函数的表示法通常有三种:表格法、图示法和公式法.

(1) 表格法　表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出,这样函数关系就用表格表示出来.例如,大家熟悉的对数表、开方表、三角函数表和统计表格等都是用表格法来

表示函数的.

表格法表示函数的优点是使用方便,可以直接得到函数值,缺点是数据不全,不能查出函数的任意值,当表很大时变量变化的全面情况不易从表上看清楚,不便于进行运算和分析.

(2) 图示法　函数 $y=f(x)$的图形(见图 1.3)直观地表达了自变量 x 与因变量 y 之间的关系.图示法的主要优点是直观性强,函数的主要特性在图上都一目了然.例如,因变量的增减情况及因变量增减的快慢等都可以通过曲线的升、降及陡、缓表示出来.

例 7　某河道的一个断面如图 1.4 所示,在断面 $0xy$ 上,离岸边距离为 x 处的深度为 y. x, y 之间的函数关系由图 1.4 表示,函数的定义域为$[0, b]$.

图示法的缺点是不便于作理论上的分析、推导和运算.

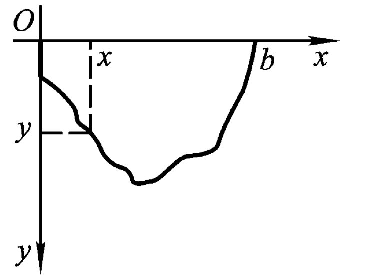

图 1.4

(3) 公式法　用数学公式表示自变量和因变量之间的对应关系,是函数的公式表示法.如例 1,例 2 都是用公式法表达函数.用公式法表达函数的优点是简明准确,便于理论分析,缺点是不够直观,并且有些实际问题(如例 7)中遇到的函数关系,很难甚至不能用公式法表示.

函数的三种表示法各有优点和缺点,针对不同的问题可以采用不同的表示法,有时为了把函数关系表达清楚,往往同时使用两种以上的表示法.本书一般采用公式法表示函数,为了直观,经常辅之以图示法(即画出函数的图形).

用公式法表示函数,通常用一个公式就可以,如 $y=\sin x$, $s=\frac{1}{2}gt^2$ 等.但有一些函数,当自变量在不同的范围内取值时,对应法则不能用同一个公式表达,而要用两个或两个以上的公式来表示,这类函数称为分段函数(如例 2).下面再举两个分段函数的例子.

例 8　旅客携带行李乘飞机旅行时,行李的重量不超过 20 千克时不收费用,若超过 20 千克,每超过 1 千克收运费 a 元,建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解　因为,当 $0\leq x\leq 20$ 时,运费 $y=0$;而当 $x>20$ 时,只有超过的部分 $x-20$ 按每千克收运费 a 元,此时 $y=a(x-20)$.于是函数 y 可以写成:

$$y=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq 20,\\ a(x-20), & x>20.\end{cases}$$

这样便建立了行李重量 x 与行李运费之间的函数关系.

例 9　设

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x\leq 1,\\ 2x, & 1<x\leq 2.\end{cases}$$

$f(x)$的定义域是$[0,2]$.当 $x\in[0,1]$时, $f(x)=x^2$;当 $x\in(1,2]$时, $f(x)=2x$,见图 1.5.由于$\frac{1}{2}$,$1\in[0,1]$,因此 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $f(1)=1^2=1$;而$\frac{3}{2}\in(1,2]$,因此 $f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{3}{2}=3$.

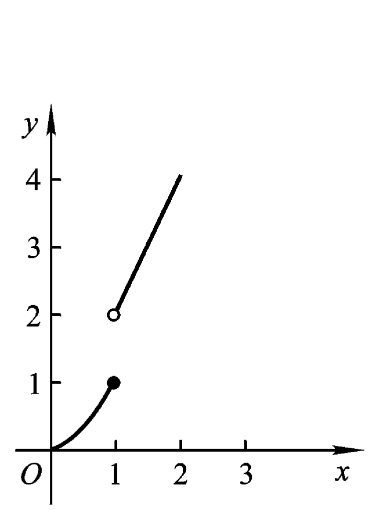

图 1.5

分段函数是公式法表达函数的一种方式.在理论分析和实际应用方面都是很有用的.需要注意的是,分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \quad 3 - x^2$; (2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3}$; (3) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$;

(4) $y = \quad 2 + x + \dfrac{1}{\lg(1 - x)}$; (5) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$; (6) $y = \quad \dfrac{1 + x}{1 - x}$;

(7) $y = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}, \\ x, & \dfrac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$

2. 在下列各题中, $f(x)$和 $g(x)$是否表示同一函数? 为什么?

(1) $f(x) = x, g(x) = \quad x^2$; (2) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$;

(3) $f(x) = \sin x, g(x) = \quad 1 - \cos^2 x$; (4) $f(x) = |\cos x|, g(x) = \quad 1 - \sin^2 x$;

(5) $f(x) = x \ ^3 \ x, g(x) = \ ^3 \ x^4$.

3. 求函数值:

(1) $f(x) = \quad 3 + x^2$,求 $f(4), f(1), f(0), f(-1), f(x_0)$和 $f \ \dfrac{1}{a}$.

(2) $f(x) = 3x + 2$,求 $f(1), f(1 + h)$及$\dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$.

(3) $\phi(t) = t^2$,求 $\phi(2), [\phi(3)]^3, \phi(-1)$.

(4) 设

$$\phi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

求 $\phi(3), \phi(2), \phi(0), \phi(0.5)$及 $\phi(-0.5)$.

4. 有一块边长为 1的正方形铁皮,在它的四角各剪去相等的小正方形,折叠后做成一个无盖的盒子.求这个盒子的容积 V 与被剪去的小正方形边长 x之间的函数关系.

5. 已知一物体与地平面的摩擦系数是 μ,质量是 m.设有一与水平方向成 α角的拉力 F,使物体从静止开始移动(图 1.6),求物体开始移动时拉力 F与角 α之间的函数关系.

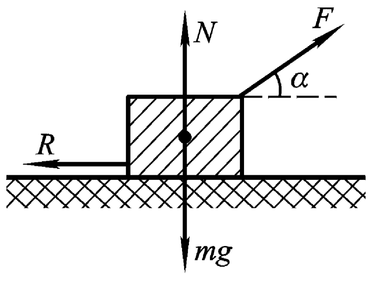

图 1.6

§1.3 函数的几种特性

一、有界性

设函数 $y = f(x)$的定义域为 D,数集 $X \quad D$,如果存在正数 M,使得对于任意的 $x \in X$,都

有不等式

$$|f(x)| \leq M$$

成立,则称 $f(x)$在 X 上有界,如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 X 上无界.

如果 M 为 $f(x)$在 X 上的一个界,则易知比 M 大的任何一个数都是 $f(x)$的界.

函数 $y=f(x)$在 X 上无界也可以这样叙述:对于任意一个给定的正数 M,中总存在 $x_M \in X$ 使得

$$|f(x_M)| > M.$$

当函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有界时,函数 $y=f(x)$的图形恰好位于直线 $y=M$ 和 $y=-M$之间,如图 1.7 所示.例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.这是因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$|\sin x| \leq 1$$

成立,这里取 $M=1$.函数 $y=\sin x$ 的图形位于直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间.

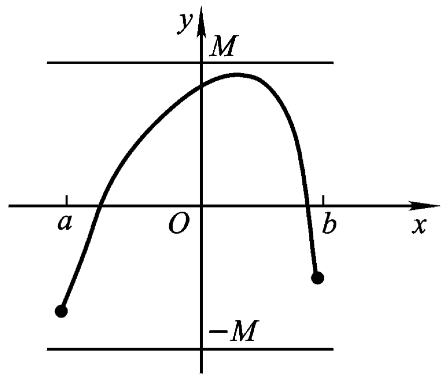

图 1.7

应该注意,函数的有界性,不仅仅要注意函数的特点,还要注意自变量的变化范围 X.例如,函数 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(1,2)$内是有界的.事实上,若取 $M=1$,则对于任何 $x\in(1,2)$都有

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

成立,而 $f(x)=\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内是无界的.

二、单调性

函数 $y=x^3$ 当自变量 x 增大时,函数值也随之增大;反之,函数 $y=-x$ 当自变量 x 增大时,函数值却随之减少.具有这种特性的函数称为单调函数.函数的单调性可用数学语言描述如下:

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义(即 I 是函数 $y=f(x)$的定义域或者是定义域的一部分).如果对于任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,均有

$$f(x_1) \leq f(x_2)\text{(或 } f(x_1) \geq f(x_2)\text{)},$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少).如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,均有

$$f(x_1) < f(x_2)\text{(或 } f(x_1) > f(x_2)\text{)},$$

则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上严格单调增加(或严格单调减少).

严格单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向上升的(见图 1.8);严格单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向下降的(见图 1.9).

在区间 I 上单调增加的或者是单调减少的函数,统称为 I 上的单调函数,或者说其在 I 上是单调的,并称 I 为这个函数的单调区间.单调性是关于函数在所讨论区间上的一个概念,绝不能离开区间谈函数的单调性.

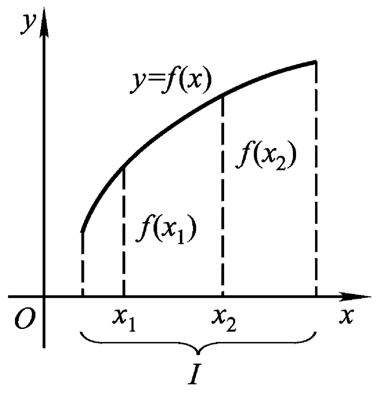

图 1.8

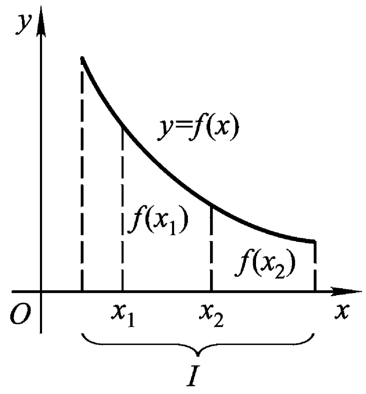

图 1.9

例如,函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的,如图 1.10 所示;函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上是严格单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是严格单调增加的,而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内则不是单调函数,如图 1.11 所示.

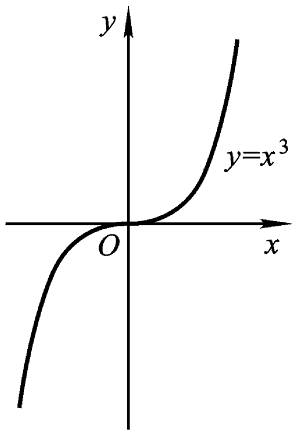

图 1.10

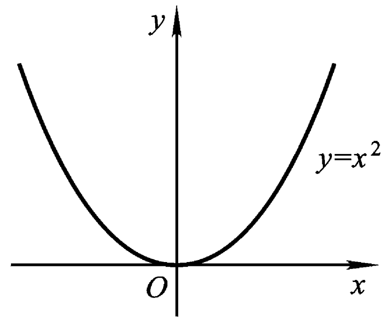

图 1.11

三、奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的,即当 $x\in D$ 时,有 $-x\in D$.如果对于任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.如果对任意的 $x\in D$,均有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的.奇函数的图形是关于坐标原点对称的.

例 1　讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2$;(2) $f(x)=x^3$;(3) $f(x)=x^2+x^3$.

解　(1) 因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,从而知 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$,从而知 $f(x)=x^3$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=x^2-x^3$,而 $f(x)=x^2+x^3$,$-f(x)=-x^2-x^3$,当 $x\neq 0$ 时,$f(-x)\neq$