高等教育自学考试计算机及应用专业(独立本科段)自学辅导丛书

离散数学自学辅导

邵学才　主编
邓米克　蒋强荣　沈彤英　等编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

离散数学具有“内容广泛,理论抽象”的特点。本书前 5 章以简洁的语言讲述了数理逻辑、集合(关系与函数)、代数结构和图论等内容,力求做到深入浅出、易学易懂;第 6 章是复习应试指南,对全书知识进行系统归纳;第 7 章是模拟试题和参考答案。

本书内容厚实,不仅提供了大量的例题和自测练习,而且还详尽地介绍了离散数学自学考试大纲中所规定的课程内容。本书既可作为应试人员的辅导教材,也可作为各类函授大学、成人教育、高等职业教育等离散数学课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学自学辅导/ 邓米克,蒋强荣,沈彤英等编著 . —北京:清华大学出版社,2002
(高等教育自学考试计算机及应用专业(独立本科段)自学辅导丛书/ 邵学才主编)
ISBN 7-302-05700-1

Ⅰ .离… Ⅱ .①邓… ②蒋… ③沈… Ⅲ .离散数学 - 高等教育 - 自学考试 - 自学参考资料 Ⅳ .O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056283 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http:// www .tup .tsinghua .edu .cn
责任编辑: 刘彤
印 刷 者: 北京四季青印刷厂
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开 本: 787×1092 1/ 16 印张: 20 .75 字数: 480 千字
版 次: 2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 7-302-05700-1/ TP · 3360
印 数: 0001～5000
定 价: 31 .00 元

第 1 章　命 题 逻 辑

命题逻辑和谓词逻辑(见第 2 章) 是数理逻辑的基本内容。

数理逻辑是一门用数学方法研究形式逻辑推理理论的学科。所谓数学方法主要是指引进一套符号体系的方法,所以数理逻辑也称作符号逻辑。

日常生活中使用的语言称为自然语言,由于自然语言具有多义性,因此对于严格的逻辑推理,使用自然语言是极不方便的,需要引入一种具有单一、明确含义的形式化语言,这种形式化语言在数理逻辑中称为目标语言。初学者在学习数理逻辑时,应当注意目标语言和自然语言之间的差异。

本章主要介绍命题逻辑的基本内容: 命题和联结词,真值表和逻辑等价,蕴含式和推理理论,命题公式和范式。

按" 离散数学自学考试大纲 "的要求,命题和联结词要求达到" 领会 "层次;命题公式的等价变换和命题公式的形式化描述,范式和主范式,蕴含式和推理理论都要求达到" 简单应用 "层次。关于" 领会 "、" 简单应用 "等层次的解释请参阅本书前言。

1.1　命题和联结词

1.1.1　命题和命题变元

一个具有确定真、假意义的陈述句称为命题。命题可赋一个值,称为真值。真值只取" 真 "和" 假 "两种,分别记作 1(或 T) 和 0(或 F)。例如:

(1) 中华人民共和国的首都是北京。

(2) $3 + 5 < 2$。

(3) 太阳比月亮大。

(4) 雪是黑色的。

(5) 我是个大学生。

这些陈述句都是命题,其中命题(1) 和(3) 的真值为 1(也称为真命题);命题(2) 和(4) 的真值为 0(也称为假命题);命题(5) 的真值则由" 我 "的情况而定,但它必定有一个确定的真值。

但也有一些语句,如某些感叹句、祈使句、疑问句等,往往没有真假之分,这类语句都不是命题。例如:

(1) 明天开会吗?

(2) 全体立正!

(3) 多美妙啊!

(4) 太可爱了!

(5) 请进来。

为了便于对命题作一般性的讨论,常用大写的英文字母表示任意命题,并称为命题变元。由于命题变元表示任意命题,所以它的真值尚没有被确定,只有当命题变元用一个具体的命题"替代"后,它才有确定的真值。例如,用 P 表示任意命题,则 P 是命题变元,P 没有确定的真值。当 P 用具体的命题,如:"中华人民共和国首都是北京"替代后,P 就表示命题:中华人民共和国首都是北京。这时 P 有确定的真值 1,并称 P 为命题常量。用一个具体命题"替代"命题变元,也称为对命题变元进行指派。

1.1.2 命题联结词

在自然语言中,常用"并且"、"或者"等联结词把简单语句联结起来,从而可表达更复杂的含义。在数理逻辑中也有命题的联结词,但它具有严格的定义,并且被符号化。

1.否定

定义 1.1.1 设 P 为命题,P 的否定也是一个命题,记作 $\neg P$。当 P 的真值为 1 时,$\neg P$ 的真值为 0;当 P 的真值为 0 时,$\neg P$ 的真值为 1。

命题 P 与其否定 $\neg P$ 的关系如表 1.1 所示。

表 1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

例如

P:2 是个偶数。

$\neg P$:2 不是偶数。

又如

Q:教室里都是大学生。

$\neg Q$:教室里不都是大学生。

请注意,$\neg Q$ 不能理解为:教室里都不是大学生。

2.合取

定义 1.1.2 设 P、Q 是命题,P 和 Q 的合取也是命题,记作 $P \wedge Q$。当且仅当 P、Q 的真值同时为 1 时,$P \wedge Q$ 的真值为 1;其他情况下,$P \wedge Q$ 的真值为 0。

联结词"合取"的定义如表 1.2 所示。

表 1.2

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如

P:王胜是个男人。

Q:王胜是个运动员。

上述命题的合取为

$P \wedge Q$:王胜是个男人并且是运动员。即 $P \wedge Q$:王胜是个男运动员。

显然,只有当"王胜是个男人"和"王胜是个运动员"都为真时,"王胜是个男运动员"才为真。其他情况此命题为假。

联结词"合取"与自然语言中的"并且"、"和"、"与"的意义相似,但也不完全相同。

例如,张静和张绍昆是好朋友。这里的"和"就不是"合取"的意义,实际上它只是一个命题。

又如设

P:我去上海探亲。

Q:教室里有一块黑板。

上述命题的合取是:

$P \wedge Q$:我去上海探亲和教室里有一块黑板。

在自然语言中,上述命题是没有意义的,因为 P 和 Q 没有什么联系。但在数理逻辑中,只要 $P \wedge Q$ 有确定的真值,就把 $P \wedge Q$ 视为命题。

3 .析取

定义 1 .1 .3　设 P、Q 是命题,P 和 Q 的析取也是命题,记作 $P \vee Q$。当且仅当 P 和 Q 的真值同时为 0 时,$P \vee Q$ 的真值才为 0;其他情况下,$P \vee Q$ 的真值都为 1。

联结词" 析取 "的定义如表 1 .3 所示。

表　1 .3

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例如

P:张恩是跳远冠军。

Q:张恩是百米跑冠军。

上述命题的析取为:

$P \vee Q$:张恩是跳远冠军或百米跑冠军。

显然,只有当" 张恩是跳远冠军 "和" 张恩是百米跑冠军 "都为假时," 张恩是跳远冠军或百米跑冠军 "才是假的,其他情况它都是真的。

同样,析取的概念和自然语言中的" 或 "也不完全相同。例如,设命题

R:今晚 9 点,北京电视 1 台播放电视剧" 贫嘴张大民的幸福生活 "或转播足球比赛。

如果令

P:今晚 9 点,北京电视 1 台播放电视剧" 贫嘴张大民的幸福生活 "。

Q:今晚 9 点,北京电视 1 台转播足球比赛。

那么命题 R 不能表示为 $P \vee Q$。因为由析取的定义可知,当 P 和 Q 的真值都为 1 时,$P \vee Q$ 的真值也为 1。但在这个例子中,当 P 和 Q 的真值都为 1 时,实际上是不可能的,因为在同一时刻,北京电视 1 台不可能既播放电视剧又转播足球比赛。所以当 P 和 Q 的真值都为 1 时,R 的真值为 0。

通常把本例命题 R 中的" 或 "称为" 排斥或 ",把表示析取的" 或 "称为" 兼并或 "。

4 .排斥析取

定义 1 .1 .4　设 P、Q 是命题,P 和 Q 的排斥析取也是命题,记作 $P \overline{\vee} Q$。当且仅当 P 和 Q 的真值不相同时,$P \overline{\vee} Q$ 的真值才为 1;其他情况下,$P \overline{\vee} Q$ 的真值为 0。

联结词" 排斥析取 "的定义如表 1 .4 所示。

表　1 .4

P	Q	$P \overline{\vee} Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

例如,下列命题中的" 或 "都是" 排斥或 ":

我在家看电视或去剧场看戏。

选小王或小李中的一人去上海出差。

有些教科书没有给出排斥析取的定义,此时可用 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 来替代 $P \overline{\vee} Q$。

5 .条件

定义 1 .1 .5 设 P、Q是命题,P对于 Q的条件命题记作 $P \quad Q$。当且仅当 P的真值为 1 且 Q的真值为 0 时,$P \quad Q$的真值才为 0;其他情况,$P \quad Q$的真值都为 1。

条件命题的定义如表 1 .5 所示。

条件命题 $P \quad Q$,可读作“ 若 P则 Q”。并称 P为前件,Q为后件。

表 1 .5

P	Q	$P \quad Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例如

P:我考上大学。

Q:我努力学习。

$P \quad Q$:如果我考上大学,那么我努力学习。

又如

P:今天下雨。

Q:我坐公共汽车去上班。

$P \quad Q$:如果今天下雨,那么我坐公共汽车去上班。

条件命题 $P \quad Q$可以用“ 若 P则 Q”来描述,但当前件 P为假时,这个命题往往无法判断真假,在数理逻辑中规定,当前件 P为假时,$P \quad Q$为真。

很多书中,把 $P \quad Q$称为“ P蕴含 Q”。但本书没有采用这种说法,在本书中“ 蕴含 ”将另有含义。

6 .双条件

定义 1 .1 .6 设 P、Q是命题,其双条件命题记作 $P \rightleftarrows Q$,读作“ P当且仅当 Q”,当 P和 Q的真值相同时,$P \rightleftarrows Q$的真值为 1;当 P和 Q的真值不相同时,$P \rightleftarrows Q$的真值为 0。

双条件命题的定义如表 1 .6 所示。

表 1 .6

P	Q	$P \rightleftarrows Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例如

P:三角形是正三角形。

Q:三角形中三条边相等。

$P \rightleftarrows Q$:三角形是正三角形当且仅当三角形中三条边相等。

命题联结词可以把一些简单的命题组合成复杂的命题。通常把不含任何联结词的命题称为原子命题,由原子命题和联结词组成的命题称为复合命题。例如,P, Q, R都是原子命题,则 $P \vee \neg Q$, $\neg P \quad Q$, $P \rightleftarrows (Q \vee R)$, $(P \quad Q) \wedge R$等都是复合命题。

同样,由命题变元和联结词组成的复杂的命题变元称为“ 命题公式 ”或“ 合式公式 ”,命题公式中的命题变元(如 P、Q、R等) 称为命题公式的分量。

由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串并不都是命题公式,如$\neg \vee P \quad \wedge$就不是命题公式,所以有如下定义。

定义 1 .1 .7 命题逻辑中的命题公式(或称合式公式) 规定为:

(1) 命题变元和命题常量是命题公式。

(2) 如果 A是命题公式,则$(\neg A)$是命题公式。

(3) 如果 A和 B是命题公式,则$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \overline{\vee} B)$, $(A \quad B)$, $(A \rightleftarrows B)$是命

题公式。

(4) 只有有限次使用上面 3 条规则得到的字符串才是命题公式。

通常把命题公式的最外层括号省略,并规定联结词的优先级为: $\neg$; $\wedge$, $\vee$, $\overline{\vee}$; , $\rightleftarrows$。

1.1.3 重点和难点分析

本节的重点是:充分理解命题联结词的定义,能熟练地把复合命题符号化。

本节的难点是:正确地把复合命题符号化。

例 1.1 说明下列语句中哪些是命题?

(1) 我是京剧演员。

(2) 天气多好啊!

(3) $5 > 3$

(4) 计算机有空吗?

(5) 我去杭州出差。

解 其中(1),(3),(5) 是命题。

例 1.2 求下列命题的真值。

(1) 如果 2 是奇数,则 $2 + 2 \neq 4$。

(2) 如果 2 是奇数,则 $2 + 2 = 4$。

(3) 太阳从东方升起当且仅当 2 是素数。

解 如果令

P:2 是奇数。

Q: $2 + 2 = 4$。

(1) 题设即为 $P \quad Q$,由于命题 P 的真值为 0,由条件命题的定义可知, $P \quad Q$ 的真值为 1。

(2) 题设条件为 $P \quad \neg Q$,同样由于命题 P 的真值为 0,所以 $P \quad \neg Q$ 的真值为 1。

(3) 如果令

P:太阳从东方升起。

Q:2 是素数。

题设命题即为 $P \rightleftarrows Q$,由于 P 和 Q 的真值都为 1,所以 $P \rightleftarrows Q$ 的真值为 1。

例 1.3 将下列命题符号化。

(1) 梁冠华虽然胖,但他是位优秀的表演艺术家。

(2) 如果我有钱,那么我到上海去探亲。

(3) 如果不下雪,我去看足球比赛,否则我不去看足球比赛。

(4) 如果不下雪,我去看足球比赛,否则我在家看电视。

(5) 我坐公共汽车去上班,当且仅当下雨或者刮大风。

解 (1) 如果令

P:梁冠华很胖。

Q:梁冠华是优秀的表演艺术家。

则题设命题可符号化为: $P \wedge Q$。

(2) 如果令

P:我有钱。

Q:我到上海探亲。

则题设命题可符号化为:$P \quad Q$。

(3) 如果令

P:不下雪。

Q:我去看足球比赛。

则题设命题可符号化为:$P \rightleftarrows Q$。

(4) 如果令

P:不下雪。

Q:我去看足球比赛。

R:我在家看电视。

由于命题“如果不下雪,我去看足球比赛,否则我在家看电视。”可同义地改述为:“如果不下雪,我去看足球比赛,否则我不去看足球比赛。”和“如果下雪,我在家看电视,否则我不在家看电视”。所以题设命题符号化为:$(P \rightleftarrows Q) \land (\neg P \rightleftarrows R)$。

(5) 如果令

P:我坐公共汽车去上班。

Q:下雨。

R:刮大风。

则题设命题符号化为:$P \rightleftarrows (Q \lor R)$。

例 1.4 如果 P, Q, R 的意义如下:

P:小李是研究生。

Q:小李获得奖学金。

R:小李放声歌唱。

请用日常语言叙述以下命题:

(1) $P \land (Q \quad R)$

(2) $P \land (\neg Q \quad \neg R)$

(3) $\neg P \land \neg Q \land R$

解 (1) 小李是研究生,如果他获得奖学金,那么他放声歌唱。

(2) 小李是研究生,如果他没有获得奖学金,那么他不放声歌唱。

(3) 小李不是研究生,也没有获得奖学金,但他放声歌唱。

1.1.4 自测练习

1.指出下列语句中哪些是命题?

(1) 老虎是动物。

(2) 请勿喧哗!

(3) 有些实数是有理数。

(4) 素数都是奇数。

(5) 太不可思议了!

(6) 我考试得满分。

(7) 明天开会吗?

(8) 保定市在河北省内。

2 .判断下列命题的真值。

(1) 如果 $1+1=2$,则 $2+2=4$。

(2) 如果 $1+1=2$,则 $2+2\neq 4$。

(3) 如果 3 是偶数,则 5 是奇数。

(4) 如果 5 是偶数,则 $2+3=8$。

3 .写出下列命题的否定。

(1) 上海是个大城市。

(2) 每个奇数都是素数。

(3) 我吃面包或面条。

(4) 我爱游泳,也爱跑步。

4 .设

P:我酷爱体育运动。

Q:我身体健康。

R:我很快乐。

请将下列命题符号化。

(1) 虽然我身体不健康,但我很快乐。

(2) 如果我身体健康,那么我很快乐。

(3) 我身体健康,当且仅当我酷爱体育运动。

5 .请将下列命题符号化。

(1) 我美丽而又快乐。

(2) 如果我快乐,那么天就下雨。

(3) 电灯不亮,原因仅有两个:灯泡坏了或开关发生故障。

(4) 仅当你去,我才留下。

6 .如果令

P:今天下雪。

Q:今天刮大风。

R:我去看越剧。

S:我在家看电视。

请用日常语言叙述下列命题:

(1) $P \wedge \neg Q$

(2) $(\neg P \wedge \neg Q) \quad R$

(3) $(\neg P \rightleftarrows R) \wedge (P \rightleftarrows S)$

(4) $S \quad (P \wedge Q)$

1.1.5 自测练习答案

1.(1),(3),(4),(6),(8)是命题。

2.(1)真值为1。

(2)真值为0。

(3)真值为1。

(4)真值为1。

3.(1)上海不是个大城市。

(2)并非每个奇数都是素数。

(3)我不吃面包和面条。

(4)我不爱游泳或跑步。

4.(1) $\neg Q \wedge R$

(2) $Q \quad R$

(3) $P \rightleftarrows Q$

5.(1)如果令

P:我美丽。

Q:我快乐。

那么命题"我美丽而又快乐"符号化为:$P \wedge Q$。

(2)如果令

P:我快乐。

Q:下雨。

那么命题"如果我快乐,那么就下雨"符号化为:$P \quad Q$。

(3)如果令

P:电灯不亮。

Q:灯泡坏了。

R:开关发生故障。

那么命题"电灯不亮,原因仅有两个:灯泡坏了或开关发生故障"符号化为:$P \rightleftarrows (Q \vee R)$。

6.(1)今天下雪但没刮大风。

(2)如果今天不下雪也不刮大风,那么我去看越剧。

(3)如果今天不下雪,那么我去看越剧,否则我在家看电视。

(4)如果我在家看电视,那么今天下雪并且刮大风。

1.2 真值表和逻辑等价

1.2.1 命题公式的真值表

定义1.2.1 设P为命题公式,$P_1, P_2, \cdots, P_n$为出现在P中的所有命题变元(即P的

分量),对 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 指定一组真值称为对命题公式 P 的一种指派。若指定的一种指派,使命题公式 P 的真值为 1,则称这组真值为成真指派;若指定的一种指派,使命题公式 P 的真值为 0,则称这组真值为成假指派。

例如,在命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 中,若对分量 P, Q, R 分别取真值为:1,0,1,则命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 的真值为1,所以1,0,1是成真指派。若对分量 P, Q, R 分别取真值为:0,1,1,则命题公式 $P \wedge (Q \quad R)$ 的真值为 0,所以 0,1,1 是成假指派。

定义 1.2.2 在命题公式中,将各分量的所有可能的指派以及由此确定的命题公式的真值汇列成表,称为命题公式的真值表。

例如,$\neg P \vee Q$ 的真值表如表 1.7 所示。

又如,$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ 的真值表如表 1.8 所示。

表 1.7

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

表 1.8

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0

再如,$\neg P \wedge (Q \quad R)$ 的真值表如表 1.9 所示。

表 1.9

P	Q	R	$\neg P$	$Q \quad R$	$\neg P \wedge (Q \quad R)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0

易见,在真值表中,命题公式真值的取值数目决定于分量的个数。由两个命题变元组成的命题公式共有 4 种不同的指派;由 3 个命题变元组成的命题公式共有 8 种不同的指派。一般地讲,由 n 个命题变元组成的命题公式共有 2^n 种不同的指派。

定义 1.2.3 在命题公式的真值表中,对于分量的所有不同的指派,命题公式的真值都为 1,则称此命题公式为永真式或重言式。

例如,$\neg P \vee P$ 是永真式。

又如,命题公式$(P \wedge Q) \quad P$的真值表如表 1.10 所示。

由表 1.10 可知,$(P \wedge Q) \quad P$是永真式。

表 1.10

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \quad P$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

定义 1.2.4 在命题公式的真值表中,对于分量的所有不同的指派,命题公式的真值都为 0,则称此命题公式为永假式或矛盾式。

例如,$\neg P \wedge P$是永假式。

又如,命题公式$\neg(Q \quad P) \wedge P$的真值表如表 1.11 所示。

表 1.11

P	Q	$Q \quad P$	$\neg(Q \quad P)$	$\neg(Q \quad P) \wedge P$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

由表 1.11 可知,$\neg(Q \quad P) \wedge P$是永假式。

定义 1.2.5 在命题公式的真值表中,存在着分量的一种指派,使得命题公式的真值为 1,则称此命题公式是可满足式。

例如,$\neg P \vee Q$,$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$,$\neg P \wedge (Q \quad R)$都是可满足式(见表 1.7,表 1.8,表 1.9)。

显然,永真式也是一种可满足式。

1.2.2 逻辑等价

定义 1.2.6 在真值表中,命题公式 A 和 B 在分量的不同指派下,其真值总是相同的,则称这两个命题公式 A 和 B 是逻辑等价的,记作 $A \quad B$。

例如,命题公式 $P \quad Q$和$\neg P \vee Q$的真值表如表 1.12 所示。

表 1.12

P	Q	$P \quad Q$	$\neg P \vee Q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1.13

P	Q	$P \quad Q$	$Q \quad P$	$(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$	$P \rightleftarrows Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由表 1.12 可知,$P \quad Q \quad \neg P \vee Q$。

又如,命题公式 $P \rightleftarrows Q$和$(P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$的真值表如表 1.13 所示。

由表 1 .13 可知, $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$。

下面列出一些常用的逻辑等价式,读者可用真值表验证。

$\neg\neg P \quad P$	(对合律)
$(P \vee Q) \vee R \quad P \vee (Q \vee R)$	(结合律)
$(P \wedge Q) \wedge R \quad P \wedge (Q \wedge R)$	
$P \vee Q \quad Q \vee P$	(交换律)
$P \wedge Q \quad Q \wedge P$	
$P \vee (Q \wedge R) \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	(分配律)
$P \wedge (Q \vee R) \quad (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	
$P \vee (P \wedge Q) \quad P$	(吸收律)
$P \wedge (P \vee Q) \quad P$	
$\neg(P \vee Q) \quad \neg P \wedge \neg Q$	(摩根律)
$\neg(P \wedge Q) \quad \neg P \vee \neg Q$	
$P \vee 0 \quad P$	(同一律)
$P \wedge 1 \quad P$	
$P \vee 1 \quad 1$	(零　律)
$P \wedge 0 \quad 0$	
$P \vee \neg P \quad 1$	(否定律)
$P \wedge \neg P \quad 0$	

其中“ 1 ”为永真式,“ 0 ”为永假式。

要证明两个命题公式是逻辑等价的, 不仅可以用真值表法, 还可以通过“ 演算 ”来证明。为此先介绍代换规则。

定义 1 .2 .7 设 P 和 Q 都是命题公式, 且 P 是 Q 中的一部分, 则称 P 为 Q 的子式。

定理 1 .2 .1 设命题公式 A 和 B 逻辑等价, 即 $A \quad B$, 如果 A 是命题公式 C 的子式, 在 C 中出现 A 的地方用 B 代换后(不一定每一处) 得到命题公式 D, 则 $C \quad D$。

上述定理称为代换规则。

例如, 证明 $\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad \neg(Q \vee P)$。

证明　利用真值表已证得: $P \quad Q \quad \neg P \vee Q$, 再利用代换规则可得:

$\neg Q \wedge (P \quad Q) \quad \neg Q \wedge (\neg P \vee Q)$	
$(\neg Q \wedge \neg P) \vee (\neg Q \wedge Q)$	(分配律)
$(\neg Q \wedge \neg P) \vee 0$	(否定律)
$\neg Q \wedge \neg P$	(同一律)
$\neg(Q \vee P)$	(摩根律)

又如, 证明 $\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$。

证明　由真值表已证得: $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$, 所以

$$\neg(P \rightleftarrows Q) \quad \neg((P \quad Q) \wedge (Q \quad P))$$

$$\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$$

$\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)$ (摩根律)

$(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P)$ (摩根律)

$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ (对合律)

1.2.3 重点和难点分析

本节重点是:熟练掌握用真值表法和常用逻辑等价式证明更复杂的逻辑等价式。

本节难点是:熟练运用常用公式证明逻辑等价式。

例 1.5 利用真值表证明下列逻辑等价式。

(1) $P \rightleftarrows Q \quad (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

(2) $\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(3) $P \wedge (P \quad Q) \quad P \wedge Q$

证明 (1) $P \rightleftarrows Q$ **和** $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ **的真值表如表** 1.14 **所示。**

表 1.14

P	Q	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \vee P$	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$	$P \rightleftarrows Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

由真值表可知, $P \rightleftarrows Q \quad (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$。

(2) $\neg(P \rightleftarrows Q)$ **和** $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ **的真值表如表** 1.15 **所示。**

表 1.15

P	Q	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$	$\neg(P \rightleftarrows Q)$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

由真值表可知: $\neg(P \rightleftarrows Q) \quad (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

(3) $P \wedge (P \quad Q)$ **和** $P \wedge Q$ **的真值表如表** 1.16 **所示。**

表 1.16

P	Q	$P \quad Q$	$P \wedge (P \quad Q)$	$P \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

由真值表可知: $P \wedge (P \quad Q) \quad P \wedge Q$。

例 1 .6　利用 $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$ **证明下列等价式。**

(1) $P \rightleftarrows Q \quad (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

(2) $P \rightleftarrows Q \quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

(3) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

(4) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \rightleftarrows Q)$

(5) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

证明　(1) **因为** $P \quad Q \quad \neg P \vee Q, Q \quad P \quad \neg Q \vee P$。**所以**

$$P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$$
$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

(2) $P \rightleftarrows Q \quad (P \quad Q) \wedge (Q \quad P)$

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$
$$((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee 0 \vee 0 \vee (Q \wedge P)$$
$$(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

(3) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad \neg ((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q))$　(**见**(1))

$$\neg (\neg P \vee Q) \vee \neg (P \vee \neg Q)$$
$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

(4) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q))$　(**见**(3))

$$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg\neg P \wedge \neg Q)$$
$$(\neg P \rightleftarrows Q) \qquad \text{(见(2))}$$

(5) $\neg (P \rightleftarrows Q) \quad (\neg P \rightleftarrows Q)$　(**见**(4))

$$(\neg\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \qquad \text{(见(1))}$$
$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

例 1 .7　证明下列逻辑等价式。

(1) $((A \wedge B) \quad C) \wedge (B \quad (D \vee C)) \quad (B \wedge (D \quad A)) \quad C$

(2) $((A \wedge B \wedge C) \quad D) \wedge (C \quad (A \vee B \vee D)) \quad (C \wedge (A \rightleftarrows B)) \quad D$

证明　(1) **由于左式**

$$((A \wedge B) \quad C) \wedge (B \quad (D \vee C)) \quad (\neg (A \wedge B) \vee C) \wedge (\neg B \vee D \vee C)$$
$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee D \vee C)$$
$$(\neg B \vee C) \vee (\neg A \wedge D)$$
$$\neg B \vee (\neg A \wedge D) \vee C$$
$$\neg\neg (\neg B \vee (\neg A \wedge D)) \vee C$$

$\neg (B \wedge \neg (\neg A \wedge D)) \vee C$

$\neg (B \wedge A \vee \neg D) \vee C$

$\neg (B \wedge (D \quad A)) \vee C$

$(B \wedge (D \quad A)) \quad C$

(2) **左式** $(\neg (A \wedge B \wedge C) \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D)$

$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg C \vee A \vee B \vee D)$

$(\neg C \vee D) \vee ((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B))$

$(\neg C \vee D) \vee \neg (A \rightleftarrows B)$ (**见例** 2(5))

$\neg C \vee \neg (A \rightleftarrows B) \vee D$

$\neg (C \wedge (A \rightleftarrows B)) \vee D$

$(C \wedge (A \rightleftarrows B)) \quad D$

1.2.4 自测练习

1 .**写出下列命题公式的真值表。**

(1) $(P \vee Q) \quad P$

(2) $(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$

(3) $(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$

(4) $(P \quad Q) \wedge (Q \quad R)$

2 .**利用真值表证明下列等价式。**

(1) $P \rightleftarrows Q \quad \neg (P \overline{\vee} Q)$

(2) $P \overline{\vee} Q \quad (P \quad \neg Q) \wedge (\neg Q \quad P)$

3 .**证明下列等价式。**

(1) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad P$

(2) $Q \quad (P \vee (P \wedge Q)) \quad Q \quad P$

(3) $P \quad (P \quad Q) \quad P \quad Q$

(4) $A \quad (B \vee C) \quad (A \wedge \neg B) \quad C$

(5) $(P \quad Q) \vee (P \quad R) \quad P \quad (Q \vee R)$

(6) $\neg (P \rightleftarrows (Q \quad (R \vee P))) \quad \neg P \wedge \neg (Q \wedge \neg R)$

(7) $(P \quad R) \wedge (Q \quad R) \quad (P \vee Q) \quad R$

(8) $(Q \quad P) \wedge (Q \rightleftarrows R) \wedge R \quad P \wedge Q \wedge R$

4 .**证明下列命题公式为永真式。**

(1) $(P \wedge Q \quad P) \wedge (P \vee \neg P)$

(2) $P \quad (P \vee Q)$

(3) $\neg P \quad (P \quad Q)$

(4) $(P \quad (P \vee Q)) \wedge (\neg P \quad (P \quad Q))$

(5) $(P \wedge (P \quad Q)) \quad Q$

(6) $((P \quad Q) \wedge (Q \quad R)) \quad (P \quad R)$

5 .利用真值表证明:

(1) 析取运算满足结合律。

(2) 合取运算满足结合律。

(3) 合取对析取满足分配律。

(4) 析取对合取满足分配律。

(5) 摩根律。

1 .2 .5 自测练习答案

1 .(1) $(P \vee Q) \quad P$ 的真值表如表 1 .17 所示。

表 1 .17

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \quad P$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

(2) $(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$ 的真值表如表 1 .18 所示。

表 1 .18

P	Q	$P \vee Q$	$P \quad Q$	$(P \vee Q) \wedge (P \quad Q)$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

(3) $(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$ 的真值表如表 1 .19 所示。

表 1 .19

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$(P \wedge Q) \rightleftarrows (P \vee Q)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1