

全国高职、高专教育高等数学系列教材

概率统计学习辅导

主 编 刘书田

副主编 胡显佑 高旅端

编著者 高旅端 林洁梅

北京 大学 出版 社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习辅导/高旅端,林洁梅编著.-北京:北京大学出版社,2001.5

ISBN 7-301-04797-5

. 概... . 高... 林... . 概率论-高等学校:技术学校-教学参考资料 数理统计-高等学校:技术学校-教学参考资料 .021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77994 号

书 名: 概率统计学习辅导

著作责任者: 高旅端 林洁梅 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-04797-5/O · 499

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京大学印刷厂

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

850×1168 32开本 6.125印张 150千字

2001年5月第1版 2001年5月第1次印刷

印 数: 0001—8000册

定 价: 10.00元

内 容 简 介

本书是全国高等职业、高等专科学校教育高等数学系列教材之一“概率统计”的学习辅导书。本书是根据主教材的九章内容即随机事件及其概率、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析而编写的学习辅导书，与教材相辅相成，同步使用。每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题、自测题参考答案与解答四部分内容编写。教学要求指明学生应掌握和理解的知识要点；内容提要是把重点内容和容易混淆的概念给出提示；解题指导是通过典型例题的解法教会学生数学思维方法，揭示出解题规律，并通过典型例题中的点评与说明，指出初学者易犯的错误，使学生加深对课堂上所讲内容的理解，以加强基础训练和提高学生的解题能力；自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，可供学生检测对基础知识理解程度和解题能力，每章后附有自测题的参考解答供读者参考。

本书可作为高等职业、高等专科学校学生学习“概率统计”课的辅导教材或学习参考书，对自考学生和数学爱好者本书也是一本较好的自学用书。

高职、高专教育高等数学系列
教材出版委员会

主任：刘 林

副主任：关淑娟

委员(以姓氏笔画为序)：

刘 林	刘书田	刘雪梅	田培源
关淑娟	林洁梅	周惠芳	胡显佑
赵佳因	侯明华	高旅端	

前 言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部颁布的高等职业教育高等数学教学大纲,为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材.本套书包括教材三个分册:《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》,并编有配套辅导教材三个分册:《高等数学学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》,总共6分册.

编写本套系列教材的宗旨是:以提高高等职业教育教学质量为指导思想,以培养高素质应用型人才为总目标,力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此,我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求,在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用.本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣教学大纲,慎重选择教材内容.既考虑到高等数学本学科的科学性,又能针对高职班学生的接收能力和理解程度,适当选取教材内容的深度和广度;既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义,以使教学内容形象、直观,便于学生理解和掌握,并达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同.辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导,自测题,自测题参考答案与解答四部分内容编写.教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概

念给出提示;解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律.教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨.教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示.辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正.

编 者

2001年1月于北京

全国高职、高专教育高等数学系列教材

高等数学(上、下册)	刘书田等编著
高等数学学习辅导	刘书田等编著
线性代数	胡显佑等编著
线性代数学习辅导	胡显佑等编著
概率统计	高旅端等编著
概率统计学习辅导	高旅端等编著

目 录

第一章 随机事件及其概率.....	(1)
一、教学要求	(1)
二、内容提要与解题指导	(3)
(一) 事件的关系与运算	(3)
(二) 利用古典概型计算事件的概率	(5)
(三) 计算事件概率的基本手段	(7)
(四) 全概率公式与贝叶斯公式	(9)
(五) 事件的独立性及有关的概率计算	(11)
(六) 利用伯努利概型计算事件的概率	(13)
三、自测题	(14)
(一) 单项选择题	(14)
(二) 填空题	(16)
(三) 其他类型题	(16)
四、自测题参考答案与解答	(18)
(一) 单项选择题	(18)
(二) 填空题	(19)
(三) 其他类型题	(20)
第二章 随机变量	(24)
一、教学要求	(24)
二、内容提要与解题指导	(26)
(一) 计算离散型随机变量的概率	(26)
(二) 计算连续型随机变量的概率	(29)
(三) 求随机变量的分布函数	(32)
(四) 求随机变量函数的概率密度	(33)

(五) 有关无穷限奇异积分的计算	(34)
三、自测题	(35)
(一) 单项选择题	(35)
(二) 填空题	(40)
(三) 其他类型题	(41)
四、自测题参考答案与解答	(43)
(一) 单项选择题	(43)
(二) 填空题	(45)
(三) 其他类型题	(48)
第三章 随机向量	(52)
一、教学要求	(52)
二、内容提要与解题指导	(54)
(一) 确定离散型随机向量 (X, Y) 的概率分布	(54)
(二) 确定连续型随机向量 (X, Y) 的概率分布	(57)
(三) 确定随机向量 (X, Y) 的边缘分布	(59)
(四) 判断随机向量 (X, Y) 中 X, Y 的相互独立性	(61)
三、自测题	(63)
(一) 单项选择题	(63)
(二) 填空题	(64)
(三) 其他类型题	(65)
四、自测题参考答案与解答	(66)
(一) 单项选择题	(66)
(二) 填空题	(67)
(三) 其他类型题	(69)
第四章 随机变量的数字特征	(74)
一、教学要求	(74)
二、内容提要与解题指导	(76)
(一) 计算离散型随机变量 X 的期望	(76)
(二) 计算连续型随机变量 X 的期望	(79)

(三) 计算随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的期望	(81)
(四) 计算随机变量 X 的方差	(83)
(五) 利用期望和方差的性质计算随机变量的期望和方差	(85)
(六) 计算随机变量 X 和 Y 的协方差	(86)
三、自测题	(87)
(一) 单项选择题	(87)
(二) 填空题	(90)
(三) 其他类型题	(92)
四、自测题参考答案与解答	(94)
(一) 单项选择题	(94)
(二) 填空题	(98)
(三) 其他类型题	(104)
第五章 大数定律和中心极限定理	(109)
一、教学要求	(109)
二、内容提要与解题指导	(110)
三、自测题	(111)
(一) 单项选择题	(111)
(二) 填空题	(112)
(三) 其他类型题	(112)
四、自测题参考答案与解答	(113)
(一) 单项选择题	(113)
(二) 填空题	(114)
(三) 其他类型题	(116)
第六章 抽样分布	(118)
一、教学要求	(118)
二、内容提要与解题指导	(118)
三、自测题	(121)
(一) 单项选择题	(121)
(二) 填空题	(122)

(三) 其他类型题	(123)
四、自测题参考答案与解答	(123)
(一) 单项选择题	(123)
(二) 填空题	(124)
(三) 其他类型题	(125)
第七章 参数估计	(127)
一、教学要求	(127)
二、内容提要与解题指导	(129)
(一) 极大似然估计	(129)
(二) 无偏性和有效性	(132)
(三) 正态总体期望和方差的区间估计	(135)
三、自测题	(135)
(一) 单项选择题	(135)
(二) 填空题	(137)
(三) 其他类型题	(138)
四、自测题参考答案与解答	(139)
(一) 单项选择题	(139)
(二) 填空题	(141)
(三) 其他类型题	(142)
第八章 假设检验	(146)
一、教学要求	(146)
二、内容提要与解题指导	(147)
(一) 正态总体期望和方差的假设检验	(147)
(二) 总体分布的假设检验	(148)
三、自测题	(149)
(一) 单项选择题	(149)
(二) 填空题	(150)
(三) 其他类型题	(151)
四、自测题参考答案与解答	(152)

(一) 单项选择题	(152)
(二) 填空题	(152)
(三) 其他类型题	(153)
第九章 回归分析	(156)
一、教学要求	(156)
二、内容提要与解题指导	(157)
三、自测题	(157)
(一) 单项选择题	(157)
(二) 填空题	(158)
(三) 其他类型题	(158)
四、自测题参考答案与解答	(158)
(一) 单项选择题	(158)
(二) 填空题	(158)
(三) 其他类型题	(159)
附表	(161)
附表 1 函数 $\frac{x^k}{k!} e^{-x}$ 数值表	(161)
附表 2 函数 $(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 数值表	(164)
附表 3 t 分布表 $P\{t(n) > t(n)\} =$	(166)
附表 4 χ^2 分布表 $P\{\chi^2(n) > \chi^2(n)\} =$	(168)
附表 5 F 分布表 $P\{F(n_1, n_2) > F(n_1, n_2)\} =$	(171)

第一章 随机事件及其概率

一、教学要求

本章内容是概率论的基础知识,有许多基本概念和计算公式.

1. 随机事件的概念是最基本的概念. 随机事件是随机试验样本空间中的部分基本事件所组成的集合, 要会用基本事件表示随机事件.

2. 在事件间的关系和运算中, 应着重掌握和事件、积事件及对立事件. 对于用数学符号表示的事件, 要知道它的具体意义是什么; 另一方面, 对一个具体事件, 要会用数学符号表示. 在此基础上, 要学会使用事件间的关系与运算表示比较复杂的事件.

3. 事件的概率也是最基本的概念. 要了解概率的统计定义和公理化定义. 由概率的公理化定义和概率的性质记住以下公式:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0,$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}),$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

当 A, B 互不相容时,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. 古典概型具有两个性质: 试验的基本事件的数目有限, 每个基本事件发生的可能性相同. 此时, 事件 A 的概率计算公式为

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{中基本事件的总数}} = \frac{m}{n}.$$

要求掌握简单的古典概型的概率计算.

5. 条件概率是个基本的概念, 因为乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式都与条件概率有关. 条件概率的定义也就是计算公式:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (P(A) > 0).$$

6. 乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0),$$

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (P(B) > 0).$$

当条件概率容易求出时,可使用乘法公式计算积事件的概率.

7. 使用全概率公式

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots \\ + P(A|B_n)P(B_n)$$

时的关键问题是确定完备事件组 B_1, B_2, \dots, B_n , 此外, $P(A|B_i)$ 和 $P(B_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 容易求得. 为此, 要弄清完备事件组的概念, 并善于确定完备事件组.

完备事件组 B_1, B_2, \dots, B_n 是事件 A 发生的各种可能原因. 如果在进行试验时事件 A 已经发生, 要求在这条件下各种原因分别出现的概率时则使用贝叶斯公式

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \quad (P(A) > 0, P(B_i) > 0) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

当 $n = 2$ 时, 完备事件组 B_1, B_2 互为对立事件, 可记为 B, \bar{B} . 这是一种常见的情况.

8. 独立性是重要的基本概念. 当事件相互独立时, 许多概率的计算可以大大简化.

若事件 A 与 B 相互独立, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B);$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B);$$

$$P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B});$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}).$$

9. 伯努利概型是对 n 次重复独立试验而言的, 要求每次试验的可能结果只有两个: 事件 A 发生或者不发生. 设每次试验中事

件 A 发生的概率为 p , 则在 n 次重复独立试验中, 事件 A 发生 k 次的概率为

$$P\{A \text{ 发生 } k \text{ 次}\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

伯努利概型有较多的应用.

本章的重点是:

- (1) 事件间的关系与运算;
- (2) 概率的主要性质与计算;
- (3) 事件的独立性与概率的计算;
- (4) 伯努利概型.

本章的难点是:

- (1) 古典概型;
- (2) 概率的主要性质与计算;
- (3) 全概率公式和贝叶斯公式;
- (4) 事件的独立性与概率的计算.

二、内容提要与解题指导

(一) 事件的关系与运算

事件间的关系与运算是本章的重点.

首先, 要弄清事件间的关系与运算的含义. 例如, 关于事件 A 及其对立事件 \bar{A} , 如果设 $A = \{\text{两件产品都是正品}\}$, 则 $\bar{A} = \{\text{两件产品不都是正品}\}$ 或 $\bar{A} = \{\text{两件产品中至少有一件是次品}\}$, 而不要误认为 $\bar{A} = \{\text{两件产品都是次品}\}$.

在使用事件间的关系与运算表示其他事件时, 经常使用以下三种方法: 第一种方法是根据事件间的关系与运算的定义; 第二种方法是画图; 第三种方法是先写出原事件的对立事件, 利用对立事件的对立事件就是原事件来表示原事件, 这常用于原事件的对立事件容易写出时.

注意, 一个事件用其他事件表示时, 表示方法可能不惟一.

例 1 设 A, B, C 表示 3 个事件, 使用 A, B, C 表示事件 $D =$ “3 个事件中至少有一个发生”.

解 第一种方法: 使用事件运算的定义知

$$D = A \cup B \cup C.$$

第二种方法: 使用画图法, 图 1 中共有 8 个部分, 分别表示 8 个事件. 事件 D 应当包括 7 个部分, 它们是: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}, \overline{A}B\overline{C}, \overline{A}BC, \overline{A}BC, A\overline{B}\overline{C}, A\overline{B}C, A\overline{B}C, ABC$, 因此

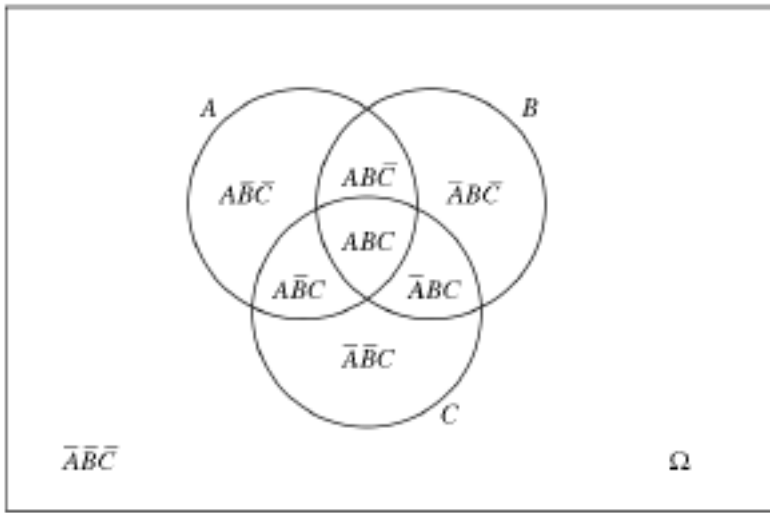


图 1

$$D = \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC.$$

第三种方法: 先写出 D 的对立事件

$$\overline{D} = \text{“3 个事件都不发生”} = \overline{A}\overline{B}\overline{C},$$

而 \overline{D} 的对立事件就是 D , 因此

$$D = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}},$$

使用对偶公式易知

$$\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} = A \cup B \cup C.$$

例 2 袋中有红、白两种颜色的球, 作无放回的抽样试验, 连抽 3 次, 每次抽一球. 设 $A_i =$ “第 i 次抽到红球” ($i = 1, 2, 3$), 试用 A_i 表示下列事件:

- (1) 前两次都抽到红球;
- (2) 至少有一次抽到红球;
- (3) 第二次抽到白球;
- (4) 恰有两次抽到红球;
- (5) 后两次中至多有一次抽到红球.

解 (1) 前两次都抽到红球为 A_1, A_2 同时发生, 即为 $A_1 A_2$.

(2) 至少有一次抽到红球为 A_1, A_2, A_3 至少有一个发生, 即为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

(3) 第二次抽到白球为 \bar{A}_2 .

(4) 恰有两次抽到红球为 A_1, A_2, A_3 中恰有两个发生, 因此为 $\bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3$.

(5) 后两次中至多有一次抽到红球为 A_2, A_3 或者一个发生, 或者从未发生, 即 $\bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_2 A_3 \cup A_2 \bar{A}_3$. 或考虑其对立事件是后两次中均抽到红球, 可表示为 $\overline{A_2 A_3}$, 故后两次中至多有一次抽到红球为 $\overline{A_2 A_3}$.

(二) 利用古典概型计算事件的概率

古典概型是个难点, 对一个试验, 只有具备两个特点, 即试验的基本事件的数目有限和每个基本事件发生的可能性相同, 才是古典概型问题, 才能使用古典概型的计算公式计算事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{中基本事件的总数}} = \frac{m}{n}.$$

使用上述公式的主要工作是计算 m 和 n .

通常, 古典概型所涉及的具体问题各式各样, 计算 m 和 n 的方法没有固定格式, 往往十分灵活, 而且容易把基本事件重复计算或者遗漏计算, 因此容易出差错, 这就是古典概型问题的难度所在. 但可以不把古典概型作为重点内容, 也就是说, 只要会对简单的古典概型问题进行有关概率的计算即可.

在确定一个试验的每个基本事件发生的可能性相同时, 经常根据问题的本身所具有的某种“对称性”, 即利用人们长期积累的