概率统计简明教程

骆振华 编著

厦门大学出版社

内 容 提 要

本书分两篇。第一篇基础概率，包含随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、随机向量、随机过程简介等五章；第二篇数理统计，分为统计评估、假设检验、方差分析与正交试验、相关分析与预测、抽样方法与质量管理等五章。书中按章节配有适量习题，书后附有习题解答。本书的特点是突出应用。读者只要具有初等微积分的知识就可阅读本书。书中内容复盖面宽、方法分门别类、含有一些新近发展的成果。叙述清楚，辅以例子说明，便于自学。

本书可作为理工科和农林经济类大专院校教材和教学参考，也可供科技人员和管理人员自学进修和作为手册使用。

概率统计简明教程

骆振华　编著

*

厦门大学出版社出版发行

福建省新华书店经销

莆田市印刷厂印刷

开本 787×1092　1/16　14 印张　340 千字

1990 年 10 月 第 1 版　1990 年 10 月 第 1 次印刷

印数 1—3000 册

ISBN 7—5615—0356—3

O·25　定价：4.00 元

前　　言

今天是数学家帕斯卡(Pascal)于 1654 年 10 月 28 日给费马(Fermat)书写第一封信的 336 周年纪念日。在该信中,他首次提出概率(Probability)的概念。随着社会的进步,处理不确定现象的概率统计方法已成为人们认识世界的必不可少的工具,概率统计也成为大中专院校有关学科的必读课程。

国内外许多从事概率统计教学的学者体会到,科技工程人员及管理决策者在学习概率统计中遇到的困难是由于其入门过于严格、深奥和复杂,并积极探讨着重于实用的写法。I. N. Gibra 教授指出:"It seems that this difficulty is due to a rigorous, sophisticated and over complicated approach to the subject"。W. C. Guenther 教授也主张"The book will appeal to those who believe that probability is useful。"本书就是基于这个动机,在初等微积分基础上,突出应用,简明而全面地介绍概率统计的基本概念和方法。

本书的正式出版,应衷心感谢许多国内外学者和友人的帮助和鼓励。特别应提到的是 Robert S. P. Yien 、T. C. Sun 、C. S. Houh、P. L. Chow、T. C. Liang、C. J. Rhee 、C. McGibbon、A. L. Lin、C. T. Yang、J. T. Chu、S. M. Wu 教授和 L. W. Wu 先生、L. L. Sai 小姐、Marilyn & Dave Bartel 一家,他们在我访美学习期间给予很多帮助;作者的老师厉则治教授、杨玉钦付教授认真审阅和修改了书稿;付教授李茂青、讲师孙见荆和何宗炯等在教学中对本书提过宝贵意见;陈鹤汀付教授为本书的选材和出版给予很大帮助。在此一并表示感谢。并借此机会向所引用的参考文献的原作者致谢。

由于水平有限,书中错误和不当之处,欢迎批评指正。

作者
1990.10.28 于厦门大学

序

概率统计是研究自然界和人类社会中随机现象的数量规律的一门学科。早在十七世纪初期，著名物理学家伽利略就把物理测量的误差看成是随机量并估计它们的发生可能性。与此同时，在保险行业中也提出利用患病率、死亡率、灾害统计建立保险的一般理论。这些都是概率统计的萌芽。现代意义的概率论是与十七世纪中期的帕斯卡、费尔马和惠更斯对随机博奕的研究紧密相关的，而数理统计则是由贝努利关于大数定理的证明而蓬勃发展的。十八世纪对该学科有重大贡献的有：德谟斐尔研究了正态分布；拉普拉斯系统研究了概率论的基础，并证明了中心极限定理的一种形式，同时发展了概率论在实际问题中的应用，特别是观察和测量误差分析的应用；高斯建立了更广泛意义下的正态律，并创立处理实验数据的"最小二乘法"；泊松证明了更一般的大数定律，并首次把概率论用于射击问题。从十九世纪以来，在概率统计方面有卓越成就的除了维纳、费勒、杜博、费谢尔、奈曼、克拉美外，要称许苏联的彼德堡数学学派。其中特别应提及的是：布涅柯夫斯基出版了第一本概率论的俄文教科书，并做了统计和人口调查的独创研究；他的学生切比雪夫扩大并概括了大数定律，并在概率论中引进矩的方法；切比雪夫的两个学生马尔柯夫和李雅普诺夫分别创立了马尔柯夫随机过程和条件广泛的中心极限定理及特征函数法。苏联数学家对本学科的近代突出贡献，在概率论和随机过程方面的还有伯恩斯坦、辛欣、柯尔莫哥洛夫、斯卢兹基、浦加切夫等，而在数理统计方面则有罗曼诺夫斯基和斯尔米诺夫。

在我国，虽然本学科的研究起步较晚，但由于大家的共同努力，已经取得可喜的长足进展，涌现大量的优秀成果，并在科学研究、工程技术、军事、经济、管理、工农业生产、交通运输、商业和通信等部门都有重要的应用，是广大科技人员和管理人员分析、解决实际问题的重要工具。

本书是学习概率统计的入门书。该书的特点首先是把预备知识建立在微积分的基础上，具有广泛读者的适用性；其次在内容上有较宽的复盖面，既有经典的基本知识，又有新近的研究成果，使教材具有一定先进性，并突出和侧重了本学科的应用性；另外，在结构上层次分明，条理清楚，对每一概念的引进都有其实际背景，不同领域的应用例子和习题，富有启发性，在叙述上能把方法与应用两者有机结合起来，利于提高读者分析问题和解决问题的能力，便于自学。

本书可作为大中专院校理工科的经济类各有关专业的教材和教学参考书，也可作为科研管理各部门有关人员的进修和应用手册。

本书作者长期从事于概率统计的教学与研究。书中的内容曾在厦门大学计算机与系统科学系用为概率统计教程的教材讲授多次，也曾在其他大专院校和管理干部专科班、进修班讲授过，受到各方面的欢迎。因此，这本书正式出版，我非常高兴为它写序并向读者推荐这本书。

厉则治

1990 年秋于厦门大学

目　　录

第一篇　基础概率

第一章　随机事件及事件的概率 ………………………… (1)

§1.1　随机事件及事件的运算与关系 ………………………… (1)
习题1 ………………………… (3)
§1.2　事件的概率及其性质 ………………………… (4)
习题2 ………………………… (9)
§1.3　条件概率、乘法公式与独立性 ………………………… (10)
习题3 ………………………… (17)
§1.4　全概率公式、贝叶斯公式与伯努利公式 ………………………… (17)
习题4 ………………………… (20)

第二章　随机变量及概率分布 ………………………… (21)

§2.1　随机变量 ………………………… (21)
§2.2　离散型随机变量的分布列 ………………………… (21)
习题5 ………………………… (24)
§2.3　连续型随机变量的概率密度函数 ………………………… (24)
§2.4　分布函数及其主要性质 ………………………… (27)
习题6 ………………………… (29)
§2.5　随机变量函数及其分布 ………………………… (30)
习题7 ………………………… (33)

第三章　随机变量的数字特征 ………………………… (35)

§3.1　随机变量的数学期望(平均值) ………………………… (35)
习题8 ………………………… (39)
§3.2　随机变量的方差、原点矩与中心矩 ………………………… (40)
习题9 ………………………… (45)

第四章　随机向量 ………………………… (46)

§4.1　随机向量的联合分布、边沿分布与独立性 ………………………… (46)
习题10 ………………………… (53)
§4.2　多元随机变量函数的概率分布 ………………………… (53)
习题11 ………………………… (58)

§4.3　随机向量的数字特征 …………………………………………………… (59)
习题 12 ……………………………………………………………………… (63)
§4.4　条件分布与条件数学期望 ……………………………………………… (64)
习题 13 ……………………………………………………………………… (68)
§4.5　特征函数 ………………………………………………………………… (68)
习题 14 ……………………………………………………………………… (73)
§4.6　大数定律与中心极限定理 ……………………………………………… (73)
习题 15 ……………………………………………………………………… (76)

第五章　随机过程简介 …………………………………………………… (78)

§5.1　随机过程及其典型分解 ………………………………………………… (78)
§5.2　线性变换及随机过程的微积分 ………………………………………… (82)
§5.3　几类重要的随机过程 …………………………………………………… (85)
习题 16 ……………………………………………………………………… (94)

第二篇　数理统计

第六章　统计评估的基本方法 …………………………………………… (95)

§6.1　总体、样本与统计量 …………………………………………………… (95)
§6.2　总体参数的点估计 ……………………………………………………… (98)
§6.3　总体参数的区间估计 …………………………………………………… (101)
§6.4　总体分布的近似求法 …………………………………………………… (105)
习题 17 ……………………………………………………………………… (108)

第七章　假设检验的统计推断原理 ……………………………………… (110)

§7.1　检验的两类错误及检验步骤 …………………………………………… (110)
§7.2　单个总体的参数假设检验 ……………………………………………… (111)
§7.3　两个总体的参数假设检验 ……………………………………………… (115)
§7.4　单个总体的非参数假设检验 …………………………………………… (117)
§7.5　两个总体的非参数假设检验 …………………………………………… (122)
§7.6　多于两个总体的非参数假设检验 ……………………………………… (125)
习题 18 ……………………………………………………………………… (129)

第八章　方差分析与正交试验 …………………………………………… (131)

§8.1　一个因素的方差分析 …………………………………………………… (131)
§8.2　二个因素的方差分析 …………………………………………………… (134)
§8.3　正交试验 ………………………………………………………………… (137)

§8.4　三次设计 …………………………………………………… (144)
§　习题 19 …………………………………………………… (146)

第九章　相关分析与预测 …………………………………………… (149)

§9.1　一元线性回归与预测 ……………………………………… (149)
§9.2　简单曲线回归 ……………………………………………… (155)
§9.3　正交多项式回归与分段回归 ……………………………… (158)
§9.4　曲线拟合的磨光法 ………………………………………… (163)
§9.5　多元线性回归分析 ………………………………………… (165)
§9.6　岭回归 ……………………………………………………… (169)
§9.7　逐步回归分析 ……………………………………………… (171)
习题 20 ………………………………………………………… (175)

第十章　抽样方法与质量管理 ………………………………………… (177)

§10.1　抽样误差与抽样数目的确定 …………………………… (177)
§10.2　几种常见的抽样方法 …………………………………… (178)
§10.3　全面质量管理 …………………………………………… (180)
§10.4　计量、计件、计点工序控制 ……………………………… (184)
习题 21 ………………………………………………………… (191)
附表 1　泊松分布数值表 ……………………………………… (194)
附表 2　正态分布函数的数值表 ……………………………… (195)
附表 3　N(0,1)的临界值 ……………………………………… (196)
附表 4　t 分布的临界值 ……………………………………… (196)
附表 5　χ^2 分布的临界值 ……………………………………… (197)
附表 6　F 分布的临界值 ……………………………………… (198)
附表 7　K 分布的临界值 ……………………………………… (201)
附表 8　秩相关系数的临界值 ………………………………… (201)
附表 9　相关系数的临界值 …………………………………… (201)
附表 10　符号检验的临界值 ………………………………… (202)
附表 11　秩和检验的临界值 ………………………………… (202)
附表 12　方差齐性的临界值 ………………………………… (203)
附表 13　正交表 ……………………………………………… (204)
附表 14　正交多项式表（n＝2～12） ……………………… (205)

习题解答 ……………………………………………………… (206)

参考文献 ……………………………………………………… (212)

第一篇 基础概率

第一章 随机事件及事件的概率

§1.1 随机事件及事件的运算与关系

一、随机事件

世界上变化万千的现象，大致可分为必然现象和偶然现象两类。必然现象是指在一定条件下肯定发生或肯定不发生的现象，是事先可以预言的确定性现象。例如，在标准大气压下，“水加热至99.975℃会沸腾”是必然现象。同样，在标准大气压下，“水加热至50℃不会沸腾”，也是必然现象。偶然现象是指在一定条件下既可能发生又可能不发生的现象，是事先无法确切预言的不确定性现象，也称为随机现象。例如，在通常条件下，生产的废品率，射击的命中率，物品的使用寿命，年降雨量，地震的震期、震中和震级，及至生育时“生男生女”，抽票时“中与不中”等等，都是事先无法确定的随机现象。它具有极其广阔的现实背景。

表面上看来，随机现象的发生与否带有偶然性，但正如恩格斯指出的，“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐藏着的规律支配的。而问题只是在于发现这些规律。”人们通过对随机现象进行大量、重复的观测，可以发现随机现象存在着统计规律性，它是事物本身内在的一种属性，从而使人们能对随机现象的变化情势作出科学的判断。这种以随机现象作为直接研究对象的数学学科就是概率统计。

今后为叙述方便计，我们称在一定条件组下既可能发生也可能不发生的事件为随机事件。随机事件可以理解为对随机现象进行试验或观测(统称为随机试验，记为 E：*Experiment*)时所显示的一种结果，简称为事件，并用大写英文字母 A，B，C，… 表示。例如，A=“从一批产品中任取一件恰为废品”；B=“打靶一次恰中10环”等等就是随机事件的表示方法。

类似地，在一定条件组下，必然发生与必然不发生的事件分别称为必然事件与不可能事件，记为 Ω 与 $\varnothing$。例如，“从一批产品中任取一件不是正品就是非正品”，就是个必然事件；而 $\varnothing$=“从0，1，…9十个数字中任取一个数，这个数大于10”是个不可能事件。

如同把常数看成变数的特殊情况一样，我们也把必然事件与不可能事件看成是随机事件的特殊情况。随机事件有时可能很复杂，为了把事件理解清楚，人们时常把在一定研究范围中随机试验的可能结果分解成若干个不可能再分解的简单事件，称为基本事件。有了基本事件的概念，随机事件便可由基本事件复合而成。

一般而言，把一随机试验 E 的所有基本事件全体记为 Ω，称为基本事件空间或样本空间；

而基本事件称为 Ω 的样本点或点，记为 ω. 于是用集合论的语言来说，必然事件就是 Ω，不可能事件 $\varnothing$ 就是关于 Ω 的空集，而试验中的任一随机事件 A 就是 Ω 的子集，且 A 发生意味着 A 所含的某一基本事件发生。以打靶为例作一试验，令 ω_i =“打中第 i 环”表示基本事件，则

$$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{10}\}.$$

记事件 B =“打中奇数环”，则 $B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$。

二、事件之间的运算与关系

事物是相互联系的。通过对事件之间的相互关系的分析，有助于对所论事件的认识。为了便于理解，我们下面以“从分别标有数字 0,1,…,9 的十张纸片中任取一张”的试验为例。这时，ω_i =“抽到数字 i”($i=0,1,\cdots,9$)就是该试验的十个基本事件。事件间有如下关系和运算：

1. 包含　若事件 B 发生，事件 A 也一定发生，则称 A 包含 B，或 B 含于 A。记为 $A\supset B$ 或 $B\subset A$。例如记 B =“抽到 2 或 4”，A =“抽到偶数”，则 $B\subset A$。事实上，通过基本事件表示，$B=\{\omega_2,\omega_4\}$，而 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\ \omega_8\}$。由于 B 中的元素全部包含在 A 中，故 $B\subset A$。

2. 等价　若 $A\supset B$ 且同时 $B\supset A$，则称 A 与 B 等价。记作 $A=B$。例如 A =“抽到偶数”，B =“抽到的数字是 2 或 4 或 6 或 8”，显然在这试验中，偶数就是 2,4,6,8 中的一个，故 A 与 B 等价，是同一事物的不同表述。

3. 相加　C 表示“事件 A 或事件 B 至少有一个发生”的事件，称 C 为 A 与 B 的和或并，记为 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$. 例如记 A =“抽到大于 5 的奇数”，B =“抽到大于 6 的偶数”，C =“抽到不小于 7 的数字”，则 $C=A\cup B$。事实上，$A=\{\omega_7,\omega_9\}$，$B=\{\omega_8\}$，而 $C=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$，故 C 的元素是 A 与 B 的元素的总和，即事件 C 发生意味着 A 或 B 至少发生一个。

应该注意在进行相加运算时，如果 A 与 B 含有相同的元素，则在其和 $A\cup B$ 中只算一个。例如 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，元素“2”是共有的，则 $A\cup B=\{1,2,3\}$。且有 $A\cup A=A$。可见集合与数的运算是不同的。

4. 相乘　C 表示“事件 A 与事件 B 都发生”的事件，称为 A 与 B 的积或交。记为 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$. 例如 A =“抽到偶数”，B =“抽到大于 6 的数”，C =抽到不小于 8 的偶数”，则 $C=A\cap B$。事实上，$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}$，$B=\{\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$，$C=\{\omega_8\}$，故 C 中的元素是 A 与 B 中共同有的元素，即 $C=A\cap B$。

显然，$A\cap A=A$。

5. 相减　C 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为 A 与 B 之差。记为 $C=A\backslash B$ 或 $C=A-B$。例如 A =“抽到偶数”，B =“抽到小于 5 的数”，C =“大于 5 的偶数”，则 $C=A\backslash B$。事实上，$A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6,\omega_8\}$，$B=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，$C=\{\omega_6,\omega_8\}$，故 C 中的元素是 A 中扣除 B 中的相同的元素所剩下的元素，即 $C=A\backslash B$。

6. 互斥　事件 A 与事件 B 不能都发生，则称 A 与 B 互斥或互不相容，记作 $A\cap B=\varnothing$。例如 A =“抽到大于 4 的偶数”，B =“抽到奇数”，则 $A\cap B=\varnothing$。事实上，$A=\{\omega_6,\omega_8\}$，$B=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_7,\omega_9\}$，两者没有共同的元素，故 $A\cap B=\varnothing$。

7. 对立　若事件 A 与 B 互斥；且在每次试验中不是 A 发生就是 B 发生，即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 B 是 A 的对立事件，记为 $B\triangleq\overline{A}=\Omega\backslash A$。例如 A =“抽到大于 5 的数”，B =“抽到不

大于 5 的数”，则 $B=\overline{A}$。显然对立是相互的性质，当 $B=\overline{A}$，则 $A=\overline{B}$。且由之可得

$$A\backslash B = A\cap\overline{B} \tag{1.1}$$

8. 完备　若在随机试验 E 中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个，即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 构成一个事件完备组。特别当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 又是两两互斥的，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是两两互斥的事件完备组。例如，记 $A_1=$“抽到 0”，$A_2=$“抽到奇数”，$A_3=$“抽到偶数”，则 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 构成一个两两互斥的完备组。

事件间的运算和相互关系可通过下面 Venn 图表示。方框表示基本事件空间 Ω，见图 1.1。

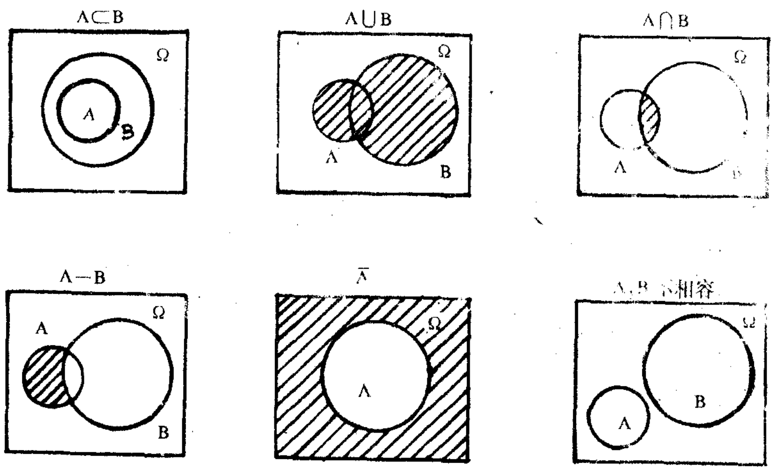

图 1.1　事件之间关系的 Venn 图

事件的和及积的运算有时要推广到无限多个事件的情形。例如，考虑一个射手不断射击直到击中目标为止，记 $A=$“击中目标”，$A_i=$“第 i 次击中目标”，则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。事件还有一般集合的运算公式：

$$(\bigcup_i A_i)B = \bigcup_i A_iB;\quad \overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}. \tag{1.2}$$

习　题　1

1、投篮球三次，若 A_i 表示第 i 次投中的事件，问下列事件如何表示：(1)投中一球；(2)至少投中二个球；(3)三个都投中；(4)三个都没有投中。

2、设 A、B、C 表示三个事件，试将下列事件用 A、B、C 表示出来：

(1) A 出现，而 B、C 不出现；

(2) A、B 都出现，而 C 不出现；

(3) 所有三个事件都出现；

(4) 三个事件中至少一个出现；

(5) 三个事件都不出现；

(6) 不多于一个事件出现；

(7) 不多于二个事件出现；

(8) 三个事件中至少二个出现。

3、下面两式表示 A、B 之间有什么包含关系？

(1) $A\cap B=A$；　　(2) $A\cup B=A$

4、设 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，求下列事件：

(1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，　　(2) $\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$

5、A、B、C 三事件互不相容与 $ABC=\varnothing$（空集）是否是一回事？为什么？

§1.2 事件的概率及其性质

一、概率的三种基本模式

随机事件的发生虽带有偶然性，但在大量、重复的观测中，其出现的频率存在着稳定的趋势，即频率随着试验次数的增加围绕某一个常数作微小的摆动，这个常数表示了该事件发生的可能性大小。事件 A 在一次试验中发生的可能性大小称为事件 A 的概率（*Probobility*），记为 $P(A)$。它是随机现象内在规律性的体现，是人们认识随机现象的基本方法。下面我们从几个角度来理解这个概念。

(i)统计概率　设在同一条件组下关于事件 A 作 n 次重复试验，其中事件 A 发生 m 次，则事件 A 发生的频率（*frequency*）是

$$f_n(A)=\frac{A\text{ 出现的次数}}{\text{总的试验次数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.3}$$

当 n 足够大，则 A 发生的频率就称 A 的统计概率，即

$$P(A)\approx f_n(A)=m/n. \tag{1.4}$$

例 1　作抛掷一枚结构均匀的硬币的试验，记 A 为"出正面"的事件。历史上有知名的统计学家对此做过统计：

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	频率 m/n
A. De Morgan	2048	1061	0.5181
C. De Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

可见 $A=$"出正面"的频率 $f_n(A)$ 当 n 较大时都围绕在数值 1/2 周围摆动。这个数不因人因地而异。可见，1/2 是反映硬币这个被观测对象的内在的属性，度量了事件 A 在一次观测时出现的可能性大小，即 $f_n(A)\approx P(A)=1/2$

(ii)古典概率　古典概率是一类简单而常见的随机现象的模型，这种模型在概率统计形成的早年时期就出现了。古典概率假定：

(1)试验结果的基本事件总数是有限的；

(2)每个基本事件发生的可能性是相等的.

若试验 E 划分为 n 个等可能的基本事件，其中事件 A 包含了 k 个基本事件，则 A 在此试验中发生的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数目}}{\Omega\text{中所有基本事件总数}}=\frac{k}{n} \tag{1.5}$$

称为古典概率。

例 2　一盒螺丝钉有 10 个，其中有 2 个次品。求：(i)从中任取 1 个恰为次品的概率；(ii)从中任取 3 个，其中恰有一个次品的概率。

解　(i)记 $A=$"任取一件恰为次品"。把取到每个产品视为一个基本事件，故

$$P(A)=2/10=0.2;$$

(ii)记 $B=$"取到二个正品一个次品"。由于，从 10 个产品中所取出的是这三个或那三个是等可能的，因此应把从 10 个螺丝钉中抽出 3 个的每种取法当做一个基本事件，故基本事件的总数是组合数 $C_{10}^3=120$。而所求事件 A 含有"二个正品一个次品"，这个次品可从 2 个次品中任取一个，共有 $C_2^1=2$ 种取法；而另外二个正品则从 8 个正品中任意取出，共有 $C_8^2=28$ 种取法。于是 A 所包含的基本事件总数有 $C_2^1C_8^2=2\times 28=56$，故

$$P(B)=56/120=0.467$$

(iii)几何概率　在古典概率定义中，基本事件的总数是有限的。有时，我们应该考虑可能结果是无限的情形。

设联系于随机试验的样本空间是用一个区域 D 来表示的，D 中的每一个点对应一个基本事件。这些基本事件的等可能性用 D 中的点具有"均匀分布"来描述。随机事件 A 就是包含在 D 中的一个小区域。我们用 $|D|$ 与 $|A|$ 表示区域 D 与 A 的量度大小（比如长度、面积或体积）。于是在试验中，事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=|A|/|D| \tag{1.6}$$

并称为几何概率。此中约定不可能事件 $\varnothing$ 的概率为零。

例 3　（约会问题），甲乙两人约定于中午十二时到一时在某地相会，规定先到者等待 20

分钟后便可离开约会地点，试求两人会面的概率。

解 设 x、y 分别表示甲、乙到达的时刻（单位：分钟），则数对 (x,y) 所构成的正方形区域 D

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60;0\leqslant y\leqslant 60\}$$

就是两人所有可能到达时刻的组合，点 (x,y) 对应着一个等可能的基本事件。

记 A 是"两人会面"的事件，其充分必要条件是 $|x-y|\leqslant 20$，即

$$A=\{(x,y)\mid(x,y)\in D;|x-y|\leqslant 20\}.$$

它所确定的区域是图 1.2 中的带斜线的部分，故

$$P(A)=\frac{|A|}{|D|}=\frac{(60)^2-(40)^2}{(60)^2}=\frac{5}{9}$$

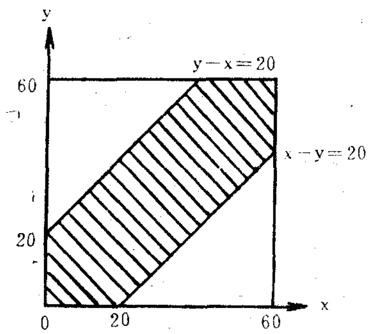

图 1.2 例 3 示意图

从上述三种模式所定义的概率都说明概率是个度量，随机事件在一次试验中出现的可能性大小的数值，记为 p. 这个数值永远满足 $0\leqslant p\leqslant 1$。当数值 $p=P(A)$ 比较大，则说明 A 出现的可能性较大；当数值 $p=P(A)$ 比较小，则说明 A 出现的可能性比较小。实用中，人们称发生的概率较小的事件为小概率事件，并认为小概率事件在一次观测中不至于发生，从而对随机现象做出判断。例如，"晴天下雨"的事件有可能发生，但发生的概率很小。于是如果今天是晴天，人们就认为今天不至于下雨而作不带雨具出门的判断。这就是利用概率认识随机现象的基本思路。

二、概率的基本性质

概率作为度量事件发生可能性大小的一种概念，具有如下基本性质：

性质 1 非负性 任何 $A\subset\Omega$，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$. (1.7)

性质 2 规范性 $P(\Omega)=1$. (1.8)

性质 3 可加性 若 $A\subset\Omega$，$B\subset\Omega$，$A\cap B=\varnothing$，

则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{1.9}$$

这些性质不难从概率的定义中得到验证。利用这三个基本性质，还可导出其他一些用来计算复杂事件的概率的若干性质。

性质 4 加法公式 若 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{1.10}$$

证 （归纳法），当 $n=2$ 时，由性质 3 已知命题成立。今设 $n=k$ 时命题成立，即有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k),$$

要证 $n=k+1$ 时命题也成立，即要证

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + P(A_{k+1}).$$

这是容易的。记 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = B$，并注意到 $B \cap A_{k+1} = \varnothing$，于是

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}) = P(B \cup A_{k+1}) \\ &= P(B) + P(A_{k+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) + P(A_{k+1}) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) + P(A_{k+1}) \# \end{aligned}$$

性质 5　对立公式　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.　(1.11)

证　由于 $\overline{A} \cup A = \Omega$，且 $\overline{A} \cap A = \varnothing$，因此　$1 = P(\Omega) = P(\overline{A} \cup A) = P(\overline{A}) + P(A)$

故　$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \#$

性质 6　减法公式　若 $A \subset B$，则 $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.　(1.12)

证　由 $A \subset B$，有 $B = A \cup (B \backslash A)$，而 A 与 $B \backslash A$ 互斥，故由性质 3，

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$$

即

$$P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \#$$

性质 7　零概率公式　若 $P(B)=0$，则称 B 为零概率事件，而称 $\overline{B}$ 为几乎必然事件（由性质 5 即有 $P(\overline{B})=1$。可证：不可能事件是零概率事件，但反之不然。

证　取 $\Omega = A$，于是 $\overline{A} = \varnothing$，故由性质 5，

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0. \tag{1.13}$$

反之不然，例如在(1.6)式的几何概率定义中，取 Ω 与 A 分别为区间 $[0,1]$ 与 $(0,1)$，记 $B = \Omega \backslash A$，则 $P(B)=0$，但 $B \neq \varnothing \#$

性质 8　单调公式　若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.　(1.14)

证　由性质 6　$P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \geqslant 0$ 故

$$P(A) \leqslant P(B) \#$$

性质 9　一般加法公式

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j)$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.15}$$

$n \geqslant 3$ 的情形可用归纳法由读者自证，这里只证二个事件的一般加法公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.16}$$

证　由于 $A+B=A\cup B\overline{A}$，且 A 与 $B\overline{A}$ 互斥，因此

$$P(A \cup B) = P(A \cup B\overline{A}) = P(A) + P(B\overline{A}).$$

另方面，因 $B=BA\cup B\overline{A}$，且 BA 与 $B\overline{A}$ 互斥，于是

$$P(B) = P(BA \cup B\overline{A}) = P(BA) + P(B\overline{A}).$$

以 $P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)$ 代入前一式，则得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)_{\#}$$

概率的上述性质，为我们计算比较复杂事件的概率提供方便。

例 4　某工厂的产品有一级品、二级品、三级品三档，已知在正常生产条件下，出现二级品和三级品的概率分别为 7% 和 3%。今抽查一个产品，求出现非一级品的概率。

解　记 A=“抽查的一个产品为二级品”，

B=“抽查的一个产品为三级品”。

于是所求事件为 $A\cup B$，注意到一个产品不可能同时既是二级品，又是三级品，即事件 A 与 B 是互斥的，所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 7\% + 3\% = 10\%_{\#}$$

例 5　袋中有红、黄、白色球各一个，今从中任取一个，有放回地取三次，试求：

(i)三次都没有取到红球或都没有取到黄球的概率；

(ii)三次取到不全相同颜色球的概率。

解　(i)记 A=“取三次都不是红球”，B=“取三次都不是黄球”，所求为 $P(A\cup B)$，其中事件 A 与 B 不是互斥的。

注意有放回地取三次，每次都有三个球可抽取，因此把三次抽取的综合结果看作一个基本事件，则基本事件总数有 $3^3=27$，而每次没取到红球就意味着取到黄球或白球二者之一，于是 A 所含的基本事件总数是 $2^3=8$，故 $P(A)=8/27$。同理 $P(B)=8/27$。而

$P(AB)=P$(取三次既不是红球也不是黄球)

$=P$(取三次都是白球)$=1/27$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=8/27+8/27-1/27=5/9.$

(ii)记 $C=$"三次取到不全同颜色球".显然三次不全同颜色的结构比较复杂。而其对立事件 $\overline{C}=$"三次抽取的球的颜色都相同"是比较容易理解的。事实上,$\overline{C}$ 表示:当第一次取到红球(或黄球或白球),则第二次及第三次也要取到红球(或黄球或白球).因此$P(\overline{C})=3/27=1/9$。故由对立公式

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-1/9=8/9_{\#}$$

作为本节的结束,我们给出由统计概率、古典概率和几何概率抽象出来的有关概率(由苏联数学家 А. Н. Колмогоров 定义的)的公理化定义。它是由三元体$(\Omega,\mathscr{F},P)$构成的概率空间定义的,其中 Ω 是样本空间;$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的一些子集(称为事件)组成的 σ 代数,即满足:

(i)$\Omega\in\mathscr{F}$;

(ii)若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(iii)若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}.$$

而 P 定义为 $\mathscr{F}$ 上事件 A 的概率,满足如下条件:

(i)对每一 $A\in\mathscr{F}$,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(ii)$P(\Omega)=1$;

(iii)若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$,且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)。$$

例如做掷一个硬币的试验。令 $\omega_1=$"出正面"、$\omega_2=$"出反面",则 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$;$F=\{\varnothing,\{\omega_1\},\{\omega_2\},\Omega\}$;$P(\varnothing)=0,P(\omega_1)=\frac{1}{2},P(\omega_2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},P(\Omega)=1$。于是$(\Omega,\mathscr{F},P)$,是描述该试验的概率空间。

习　题　2

1、一部四卷的文集,按任意次序插到书架上,问各卷自左向右或自右向左顺序恰为1,2,3,4的概率是多少?

2、从0,1,2,…,9十个数中依序取出四个数排列,问排成的四位数是偶数的概率是多少?

3、两船欲停靠同一码头,设二船独立地到达,而且各自到达时间在一昼夜间是等可能的(即均

匀分布的)，如果此二船在码头的停靠时间分别1及2小时，试求一船要等待空出码头的概率。

4、假定方程 $ax+b=0$ 的系数 a 与 b 分别等可能地取值于 $[1,2]$ 与 $[-1,1]$，求方程的解不小于0.25的概率。

5、从一付扑克牌的13张黑桃中，一张接一张地有放回地抽取3次，求

(1)三张没有同号的概率；

(2)三张同号的概率；

(3)三张中最多只有两张同号的概率。

6、盒中有4个球，其中两个红球，一个黄球，一个白球，今有放回地取三次，求

(1)三个都是红色的概率；

(2)三个颜色都不同的概率；

(3)三个全红或全黄的概率.

§1.3 条件概率、乘法公式与独立性

一、条件概率

在实际问题中，有时会遇到在已知"事件 B 已出现"的附加条件下，求 A 出现的条件概率，记为 $P(A|B)$。一般说来，条件事件 $(A|B)$ 与事件 A 的基本事件空间是有区别的，因此数值 $P(A)$ 与 $P(A|B)$ 一般也是不同的。

例6 某厂两台车床加工同一种零件共100件，其中第一台车床的合格品与次品分别为35件与5件。第二台车床的合格品与次品分别为50件与10件。记事件 A="从该厂产品任取1件恰为次品"，B="取到第一台加工的零件"，试求 $P(A)$ 与 $P(A|B)$。

解 事件 A 是把两台车床加工的零件合在一起考虑的，共有100个零件，其中次品共有15件，故 $P(A)=15/100$。而条件事件 $(A|B)$ 是在"从第一台机床抽到零件"的附加条件下来研究 A 的，因此只须且必须在第一台机床的40个零件中考虑。第一台车床有5件次品，故 $P(A|B)=5/40$，可见，$P(A)$ 与 $P(A|B)$ 一般并不相等。

若 $P(B)\neq 0$，定义条件概率 $P(A|B)$ 的计算公式为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (1.17).$$

这个公式不难用古典概率的情况加以验证。事实上，设随机试验的基本事件空间 Ω 的基本事件总数为 n；事件 B 含 m 个；而 AB 包含 k 个，则

$$P(A|B)=\frac{k}{m}=\frac{k/n}{m/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$