

分 析 力 学

西南交通大学 邱秉权 编

中 国 铁 道 出 版 社

1 9 9 8 年 · 北 京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书较系统地介绍了分析力学的基本原理、基本方法和基本应用。内容主要有：基本概念、虚位移原理、达兰贝尔原理、完整系统动力学方程、哈密顿正则方程、力学的变分原理、正则变换和哈密顿——雅科毕方程、非完整系统的动力学方程及动力学中凯恩方法等。本书可作为研究生和本科生的教材，也可供有关科研和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/邱秉权编. - 北京: 中国铁道出版社, 1998. 8
ISBN 7-113-03035-1

. 分... . 邱... . 分析(化学) . 03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16510 号

书 名: 分析力学

著作责任者: 西南交通大学 邱秉权 编

出版·发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市宣武区右安门西街 8 号)

责 任 编 辑: 程东海

封 面 设 计: 李艳阳

印 刷: 中国铁道出版社印刷厂

开 本: 78× 1092 1/32 印张: 12.5 字数: 312 千

版 本: 1998 年 8 月第 1 版 1998 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 0001—2000 册

书 号: ISBN 7-113-03035-1/O · 56

定 价: 17.40 元

版权所有 盗印必究

凡购买铁道版的图书, 如有缺页、倒页、脱页者, 请与本社发行部调换。

前 言

本教材是在 1985 年编写的讲义基础上修订而成。它可用于有关研究生(班)、力学班学生以及本科高年级学生作为《分析力学》必修课或选修课教材或参考书。在使用时,根据不同对象的要求,内容也应有所不同。

作为分析力学教材,为了系统性,把目前通用的多学时《理论力学》教材中已有的虚位移原理、达兰贝尔原理、第二类拉格朗日方程等内容仍编入其中。在使用时,可根据实际情况进行取舍。为了避免重复,对有些内容,如微振动理论、高等动力学、运动稳定性等内容不再编入,因为这将在有关课程中讲述。所要用到的有关数学知识,也较详尽地编入本书。

从内容安排上,力求从简到难、由浅入深、循序渐进。因分析力学涉及面很广,内容颇为深奥,为使学生能在较短时间内,对它有一较为全面的了解,本书着重阐述基本理论,并通过众多例题帮助读者对原理的理解和应用。

凯恩方法是近几年中提出的新方法,现将它作为一章编列在后。此章内容主要取材于吴镇教授的《分析力学》。

在编写过程中舒仲周教授以及黄安基教授、徐昭鑫教授、张宝珍副教授、高淑英教授等对编写提纲提出了不少指导性意见,在此深表谢意。

编 者

目 录

绪 言	1
第一章 基本概念	2
§ 1—1 约束、约束方程及其分类	2
§ 1—2 自由度与广义坐标	5
§ 1—3 实位移、可能位移与虚位移	7
小 结	12
习 题	13
第二章 虚位移原理和达兰贝尔原理	15
§ 2—1 理想约束	15
§ 2—2 虚位移原理	17
§ 2—3 虚位移原理的解析形式、广义力	22
§ 2—4 保守系统的平衡条件	25
§ 2—5 达兰贝尔原理	29
§ 2—6 动力学普遍方程	31
小 结	33
习 题	35
第三章 完整系统的动力学方程——第二类拉格朗日方程	41
§ 3—1 第二类拉格朗日方程	41
§ 3—2 保守系统中的第二类拉格朗日方程	45
§ 3—3 拉格朗日方程的首次积分	47
§ 3—4 碰撞问题中的拉格朗日方程	51
小 结	53
习 题	55
第四章 哈密顿正则方程	60
§ 4—1 勒襄德变换	60
§ 4—2 哈密顿正则方程	62
§ 4—3 相 空 间	66
§ 4—4 哈密顿正则方程的首次积分	68
§ 4—5 罗斯方法	71
§ 4—6 泊松括号与泊松定理	73
小 结	77
习 题	79
第五章 力学的变分原理	84
§ 5—1 概 述	84

§ 5—2	变分法概述	84
§ 5—3	高斯最小约束原理	90
§ 5—4	哈密顿原理	94
小 结		102
习 题		102
第六章	正则变换和哈密顿——雅科毕方程.....	106
§ 6—1	正则变换.....	106
§ 6—2	哈密顿—雅科毕方程.....	114
§ 6—3	分离变量法.....	120
小 结		125
习 题		127
第七章	非完整系统的动力学方程.....	130
§ 7—1	概 述.....	130
§ 7—2	第一类拉格朗日方程.....	131
§ 7—3	罗斯方程.....	139
§ 7—4	阿沛尔方程.....	145
小 结		153
习 题		156
第八章	动力学中的凯恩方法.....	163
§ 8—1	引 言.....	163
§ 8—2	偏速度和偏角速度.....	163
§ 8—3	凯恩方程.....	170
§ 8—4	广义主动力.....	171
§ 8—5	广义惯性力.....	172
§ 8—6	凯恩方程应用举例.....	173
小 结		178
习 题		179
部分习题参考答案		185
主要参考文献		195

绪 言

以牛顿运动定律为基础建立起来解决力学问题的科学体系称为矢量力学或牛顿力学, 此方法有时称为牛顿方法。它涉及的量如力、速度、加速度等多半是矢量, 其中力和动量是两个基本的量。然而对于一个众多质点(或刚体)受有众多约束的质点系来说, 势必求解一个含有众多未知约束力的联立方程组, 于是牛顿方法就显得不很方便。因此, 从 18 世纪末、19 世纪初, 随着工业革命的迅速发展, 多约束少自由度的复杂机器不断涌现, 迫切需要寻求一种解决此类问题的更为有效的方法, 于是分析力学就应运而生了。

分析力学是以拉格朗日(Lagrange 1736—1813)和哈密顿(Hamilton 1805—1865)等所建立的变分原理为基础, 将力学的基本定律表示为分析数学的形式, 通过分析方法来解决任意力学体系运动问题。它所涉及的量是标量, 其中力学函数(或势函数)和动能为两个基本的量。

由此看来, 矢量力学和分析力学只是同一个力学领域中应用不同的数学描述而已。以后将会看到, 对于自由质点或比较简单的工程问题, 两种方法无优劣之分, 有时, 后者反而显得麻烦一些。但是, 对于许多复杂的力学问题, 分析力学就显示出其优越性。原因是分析力学所注重的不是力和加速度, 而是具有更广泛意义的能量。同时, 由于分析力学方法对于坐标的选择和坐标变换都是完全自由的, 故可以适当选取坐标——广义坐标作为描写机械运动的独立变量。由于在方程中巧妙地消去了“理想约束”, 减少了在方程中的未知量数目, 从而简化了数学运算, 提高了解题效率。

分析力学由于是从能量观点来研究力学问题, 故它具有更广泛的应用价值。许多新兴学科, 如量子力学、相对论力学、电动力学、连续介质力学、天体力学、统计力学……等等都可以用到分析力学的理论和方法。

第一章 基本概念

§ 1—1 约束、约束方程及其分类

谈到物体的运动,首先必须指出运动是相对于哪一个物体而言的,该物体称为参照物。与其固结的坐标系称为参考坐标系(简称参考系)。凡惯性定律适用的参考系称为惯性参考系。物体相对于不同的参考系有不同的运动。物体相对于惯性参考系的运动称为绝对运动。如假设把固结于地球上的坐标系近似视为惯性参考系(研究地球表面上物体的运动)。此后,如无特别说明,运动均指绝对运动。

由有限个质点或无穷多个质点(相对而言)所组成的系统称为质点系。其中任一质点 m_i ,它在空间的位置可以由矢径 r_i 来决定,也可以由矢径 r_i 的三个直角坐标 x_i, y_i, z_i 来决定(图 1—1)。若组成质点系的各个质点之位置和速度不受限制,即每一个质点均可在空间占有任意位置和具有任意速度,则称此质点系为自由质点系统,简称自由系统。若由 n 个质点所组成的自由系统,要完全确定整个系统的位置就需要有 $3n$ 个坐标。

图 1—1

事实上,绝大多数质点系其各个质点及其之间的位置和速度有某种联系,它们各自不能自由运动,则称此系统为非自由质点系统,简称非自由系统。对非自由系统各个质点的位置和速度所加的几何学或运动学限制称为约束。其数学方程式称为约束方程。

根据约束的性质和约束方程式的形式,约束可以按不同的方法进行分类。

1. 几何约束和运动约束

如果约束只限制质点或质点系在空间的位置,则称为几何约束,其约束方程可表示为质点坐标的函数。

例如,由摆长为 l 的无重直杆所组成的球摆(图 1—2)。摆锤被限制在半径为 l 的球面上运动,其约束方程为

图 1—2

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \tag{1}$$

在式(1)中仅为坐标的函数,故为几何约束。写成一般形式,则

$$f_\alpha(x_i, y_i, z_i) = 0 \tag{1—1}$$
$$\alpha = 1, 2 \dots k$$

如果除了限制质点的位置以外,还限制质点的速度,则称此种约束为运动约束或微分约束(当约束方程中的各项遍乘以 dt 后)。其约束方程中既包含质点的坐标,还包含质点的速度的投影或坐标的微分。

例如,半径为 r 的车轮在直线轨道上作纯滚动(图 1—3),其一个约束方程为

由接触点 A 处速度为零, 即

$$y_c - r = 0 \tag{2}$$

即可得到另一个约束方程, 即

$$v_A = 0$$

$$x_c - r \theta = 0 \tag{3}$$

或

$$dx_c - r d\theta = 0 \tag{4}$$

显然式(2)为几何约束方程。式(3)或式(4)为运动约束方程或微分约束方程。式(4)对时间 t 进行积分后为

$$x_c - r \theta = 0(\text{常数}) \tag{3}$$

图 1—3

实际上变为几何约束, 故此类约束也可称为可积分的微分约束。

又如, 质量均为 m 的质点 m_1 、 m_2 , 由长为 l 的无重直杆相连, 在一固定的平面上运动(图 1—4)。设杆的中点 C 的速度只可以沿着杆的方向, 则系统的约束方程为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_1 - y_2} \tag{6}$$

显然, 式(5)为几何约束方程, 式(6)为运动约束方程。进一步可以证明, 它是一个不可积分微分约束方程。对于运动约束方程写成一般形式, 则为

$$f_\beta(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 \tag{1-2}$$

$$\beta = 1, 2, \dots, r$$

顺便指出, 如何判别一个微分约束方程是否可积分呢? 现简单说明如下。

由于在实际问题中, 运动约束方程中往往只含有速度的一次项, 即所谓的线性运动约束(本书只讨论此类运动约束类型)。设以 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 来描述系统的运动, 其线性运动约束方程可表为

$$a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_n q_n + a_0 = 0$$

或写成微分形式

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \dots + a_n dq_n + a_0 dt = 0$$

式中, $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为系数, 一般说来它们是 q 和 t 的函数。

从上式可以看到, 它是微分多项式, 如果它的系数 a 满足下面条件:

$$\frac{a_i}{q_j} = \frac{a_j}{q_i}, \frac{a_0}{q_i} = \frac{a_i}{t}, i, j = 1, 2, \dots, n$$

那么上述微分多项式为某一函数 $F(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$ 的全微分, 故可以积分之, 此称为可积分运动约束, 否则为不可积分运动约束。其证明请参阅有关著作。

2. 定常约束和非定常约束

若所讨论的约束不随时间而变时, 则称为定常约束, 又称稳定约束。即在它们的约束方程中不显含时间 t, 所以又称不含时约束。以上所讨论的约束类型均为定常约束, 其一般形式如式(1—2)。

如果约束是随时间而变的, 则称为非定常约束, 又称非稳定约束。即在它们的约束方程中一定会显含时间 t, 所以又称含时约束。

例如,一摆长为 l 的单摆,在铅垂面内摆动(图 1—5),假设其悬挂点 o 以匀速 v 沿水平线运动,则摆锤 A 的约束方程为

$$(x-vt)^2+y^2-l^2=0 \tag{7}$$

上式中显含时间 t , 故为非定常约束。

非定常的几何约束方程的一般形式表示为

$$f_{\alpha}(x_i,y_i,z_i;t)=0,\alpha=1,2,\dots,k \tag{1—3}$$

非定常的运动约束方程的一般形式表示为

$$f_{\beta}(x_i,y_i,z_i;\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i;t)=0,\beta=1,2,\dots,r \tag{1—4}$$

对于运动约束,今后只限于讨论约束方程为质点速度的线性函数情形,即

$$\sum_{i=1}^n(a_{\beta i}\dot{x}_i+b_{\beta i}\dot{y}_i+c_{\beta i}\dot{z}_i)+d_{\beta 0}=0 \tag{1—5}$$

$$\beta=1,2,\dots,r$$

图 1—5

或表示为微分形式,即

$$\sum_{i=1}^n(a_{\beta i}dx_i+b_{\beta i}dy_i+c_{\beta i}dz_i)+d_{\beta 0}dt=0 \tag{1—6}$$

$$\beta=1,2,\dots,r$$

式中, $a_{\beta i}$ 、 $b_{\beta i}$ 、 $c_{\beta i}$ 、 $d_{\beta 0}$ 均为 x_i 、 y_i 、 z_i 和 t 的函数,同时还假定 $a_{\beta i}$ 、 $b_{\beta i}$ 、 $c_{\beta i}$ 不同时为零。

应该认识到,这些约束方程必须在求解运动微分方程以前就能够写出来,即约束方程本身不受被约束物体运动的影响。

3. 双面约束和单面约束

在任何时刻质点始终都不能脱离约束,称为双面约束,又称为固执约束或不可解约束,其约束方程式以等式表示。如前面已提到的由刚性直杆的球摆约束,为双面约束。

质点所受约束在某一方向上存在,而在另一方向上不存在,即质点可能脱离约束,称此为单面约束,又称为非固执约束或可解约束,其约束方程式以不等式表示。

如球摆用一细绳作摆长(图 1—6),当绳拉紧时(即受力时,图 1—6a),则约束方程为等式,

即

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

图 1—6

当绳松弛时(即不受力时,图 1—6b),则约束方程为不等式,即

$$x^2+y^2+z^2-l^2<0$$

两式合并,则为

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0$$

又如一质点在半径为 r 的球面上, 则约束方程也为不等式, 即

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 \geq 0$$

故单面约束方程的一般形式表示为

$$f(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0 \quad (1-7)$$

4. 完整约束和非完整约束

几何约束和可积分的微分(运动)约束统称为完整约束, 如式(1)、式(2)、式(3)和式(7)等。不可积分的微分(运动)约束称为非完整约束, 如式(6)。

所有约束均为完整约束的质点系称为完整系统。只要存在有一个或一个以上的非完整约束的质点系称为非完整系统。

§ 1—2 自由度与广义坐标

一个自由质点在空间的位置, 需用三个独立坐标来确定。由 n 个质点(以后凡不另说明均设为 n 个质点)组成的自由质点系, 则需要有 $3n$ 个独立坐标才能完全确定。

对于非自由系统来说, 由于受到一些约束的限制, 系中各质点的位置坐标将满足一定的约束条件而不是完全独立的。设一非自由系统, 受有 k 个完整约束, 则 $3n$ 个坐标需满足 k 个约束方程, 只有 $3n - k$ 个坐标是独立的, 而其余 k 个坐标则是这些独立坐标的给定函数。这样, 要确定系统的位置只需要 $3n - k$ 个独立坐标就足够了。确定一个具有完整约束质点系的位置所需要的独立坐标的个数称为该质点系的自由度数, 简称自由度。用 N 来表示, 即 $N = 3n - k$ 。

例如, 一个自由质点在空间有 3 个自由度。若将它约束在一个平面上, 则有 2 个自由度。假如此质点再用一根刚性杆与平面上某一固定点相连, 则此质点只有一个自由度了。

又如, 双锤摆(图 1—7)在铅垂平面内摆动, 则摆锤 A 和 B 的四个坐标 x_A, y_A, x_B, y_B 要满足下面两个约束方程:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= l_1^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= l_2^2 \end{aligned}$$

因此, 只有两个坐标是独立的, 故此系统只有两个自由度。

又如, 平面曲柄连杆机构(图 1—8)。A、B 两点四个坐标 x_A, y_A, x_B, y_B 要满足下面三个约束方程式:

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= r^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= l^2 \\ y_B &= 0 \end{aligned}$$

因此, 只有一个坐标是独立的, 故此系统只有一个自由度。

独立坐标可以任意选择, 不过, 在一般情形下, 用直角坐标表示其独立坐标并不总是很方便的。有时还会破坏独立坐标的唯一性。例如, 图 1—7 所示双锤摆选取 x_A, x_B (或 y_A, y_B , 或其它)作为独立坐标, 则对应于这组坐标各有上、下(或左、右, 或其它)两个不同的可能位置。显然以它们为独立坐标是不适宜了。如选用 φ 和 θ 为独立坐标, 则很方便且唯一地确定质点系的位置。各质点的直角坐标可表示为 φ 和 θ 的单值、连续函数, 即

图 1—7

$$\begin{aligned}x_A &= l_1 \sin \varphi \\y_A &= l_1 \cos \varphi \\x_B &= l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta \\y_B &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta\end{aligned}$$

又如图 1—8 所示的曲柄连杆机构, 如选 φ 为独立坐标, 则也很方便且唯一地确定系统的位置, 各质点的直角坐标可表示为 φ 的单值、连续函数, 即

$$\begin{aligned}x_A &= r \cos \varphi \\y_A &= r \sin \varphi \\x_B &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \\y_B &= 0\end{aligned}$$

唯一地确定质点系位置的独立变量称为广义坐标。例如上述双锤摆中的角 φ 和 θ 是广义坐标。曲柄连杆机构中的角 φ 也是广义坐标。此处, 其“广义”二字有两种含义, 一是, 它们是独立坐标, 以区别于其它一般(非独立)坐标; 二

图 1—8

是, 它们可以是线量, 也可以是角量, 甚至于其它的几何量或物理量。对于同一系统, 广义坐标可能有多种选择。但不管如何选取, 同一组内的各广义坐标首先应彼此独立的; 其次组与组之间广义坐标有何关系呢? 从数学上来说, 它们必须要满足一定的条件。如对于由 n 个质点组成的自由系统, 有 $N(= 3n)$ 个变量 $x_1、x_2、\dots、x_N$; 另用任何其它 N 个变量 $q_1、q_2、\dots、q_N$ 来表示为

$$x_i = f_i(q_1、q_2、\dots、q_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{1—8}$$

由于是自由系统, 所以 N 个 x_i 之间必须不能有任何关系存在, 因此这 N 个函数 f_i 之间是相互独立的, 也不能存在任何关系。在数学上则要求其雅科毕行列式不为零(其证明请参阅有关专著), 即

$$\frac{(x_1、x_2、\dots、x_N)}{(q_1、q_2、\dots、q_N)} = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{q_1} & \frac{x_2}{q_1} & \cdots & \frac{x_N}{q_1} \\ \frac{x_1}{q_2} & \frac{x_2}{q_2} & \cdots & \frac{x_N}{q_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{x_1}{q_N} & \frac{x_2}{q_N} & \cdots & \frac{x_N}{q_N} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1—9}$$

上式即是 N 个广义坐标 $q_1、q_2、\dots、q_N$ 不存在任何关系的充要条件。

例如, 一自由质点 m 在空间的直角坐标表示为 $x、y、z$; 也可以用圆柱坐标 $\rho、\theta、z$ 来表示(图 1—9a), 则

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta \\y &= \rho \sin \theta \\z &= z\end{aligned} \tag{1}$$

显然

$$\frac{(x、y、z)}{(\rho、\theta、z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

除非 $\rho = 0$ (即原点), 其它各处雅科毕行列式都不为零, 故 $\rho、\theta、z$ 是各自独立的。

若用球坐标 r, θ, φ 来表示, 如图 1—9(b) 所示。它们之间的关系为

图 1—9

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2)$$

通过计算其雅科毕行列式知, r, θ, φ 也是各自独立的。故一个自由质点的 x, y, z 或 ρ, θ, φ 或 r, θ, φ 都可以作为广义坐标。

如果是非自由系统中有含时的几何约束, 那么广义坐标的个数仍然是 $N = 3n - k$, 其中 k 是几何约束个数和含时的几何约束的个数的总和。

对于非完整系统, 若该系统受有 k 个完整约束和 r 个非完整约束, 则广义坐标的个数仍为

$$m = 3n - k$$

式中, m 表示广义坐标个数。但是由于存在有 r 个非完整约束, 故其自由度变为

$$N = m - r = 3n - k - r$$

由此可见, 对于非完整系统, 广义坐标数与系统的自由度不相等, 其原因将在以后讨论。

总之, 对于由 n 个质点所组成的质点系, 若是自由系统, 则它的自由度 $N = 3n$, N 为最大; 若是完整系统, 由于受有 k 个完整约束, 故自由度变为 $N = 3n - k$, N 减少了。若是非完整系统, 由于受有 k 个完整约束和 r 个非完整约束, 故自由度变为 $N = 3n - k - r$, N 更少了。可见, 一个非自由系统, 其约束越多(无论是完整或非完整约束), 则自由度越少。因此所选的独立变量越少, 相应的独立方程式数目也将越少。这比用 $3n$ 个直角坐标和 k 个约束方程求解方便得多。这样, 有了约束不但不增加求解动力学问题的困难, 反而有利于解题, 这是分析力学的一大优点所在。

§ 1—3 实位移、可能位移与虚位移

当一个非自由系统在某一初始条件下运动, 其内各质点的矢径 $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 既满足动力学微分方程和初始条件, 又满足所有约束方程, 称此种运动为真实运动, 意为实际上发生的运动。在真实运动中各质点所产生的位移称为实位移。设一完整系统, 其约束方程为

$$f_\alpha(r_1, r_2, \dots, r_n; t) = 0, \alpha = 1, 2, \dots, k$$

或

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n; t) &= 0 \\ \alpha &= 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

为了书写简便, 我们改用 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}$ 代表 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$,

y_n, z_n (注: 以下将无一固定用法, 视方便而用), 这样上式可改写为

$$f_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) = 0, \alpha = 1, 2, \dots, k \tag{1}$$

当 t 到 $t + dt$, 质点所产生的无穷小实位移用 dr_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示, 其直角坐标形式表示为 dx_i ($i = 1, 2, \dots, 3n$), 也应满足约束方程式 (1), 即

$$f_{\alpha}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_{3n} + dx_{3n}; t + dt) = 0 \tag{2}$$

将上式按台劳级数展开得

$$\begin{aligned} & f_{\alpha}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_{3n} + dx_{3n}; t + dt) \\ &= f_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_{3n}; t) + \frac{f_{\alpha}}{x_1} dx_1 + \frac{f_{\alpha}}{x_2} dx_2 + \dots + \frac{f_{\alpha}}{x_{3n}} dx_{3n} \\ &+ \frac{f_{\alpha}}{t} dt + \text{高阶项} = 0 \end{aligned}$$

在上式中略去高阶项, 并应用式 (1), 得到实位移应满足的方程为

$$\frac{f_{\alpha}}{x_1} dx_1 + \frac{f_{\alpha}}{x_2} dx_2 + \dots + \frac{f_{\alpha}}{x_{3n}} dx_{3n} + \frac{f_{\alpha}}{t} dt = 0$$

把它缩写为

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{x_i} dx_i + \frac{f_{\alpha}}{t} dt = 0, \alpha = 1, 2, \dots, k \tag{1-10}$$

它也可以由约束方程 (1) 直接求微分而得到。对于定常约束情况, f_{α} 不显含时间 t , 故有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{x_i} dx_i = 0, \alpha = 1, 2, \dots, k \tag{1-11}$$

凡是只满足约束方程的无穷小的位移是约束所允许的位移称为可能位移。由于它只要求满足约束条件, 不一定要满足动力学方程和初始条件, 故它可能有好几个或无数多个。显然实位移因其满足约束条件, 所以也是可能位移。它是许多可能位移中的一个, 又因为实位移又要满足动力学微分方程和初始条件, 所以它只有一个。不难得出, 可能位移也应满足方程 (1-10) 或 (1-11)。

例如, 一质点 M 被约束在一个半径为 R 固定的球面上运动 (图 1-10), 其约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$t + dt$ 后, 质点应满足

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

或 $rd r = 0$

可见, 满足上述方程的 dr 或 dx 、 dy 、 dz 有无数多个, 它们就是在球面上 M 点 (x 、 y 、 z) 处切平面上的任意矢量 dr (图中画出五个) 这些都是可能位移。而质点 M 的实位移既要满足约束条件又要满足动力学方程和初始条件, 所以它只能在球面 M 点处切平面上并与 M 点真实轨迹相切的那一个位移 (图中用实线表示), 才是实位移。显然它只是可能位移中的一个而已。

图 1-10

任意两个可能位移之差定义为虚位移, 记为 δr_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 或 δx_i ($i = 1, 2, \dots, 3n$), 即

$$\delta r_i = dr_i - dr_i'', i = 1, 2, \dots, n$$

或 $\delta x_i = dx_i - dx_i'', i = 1, 2, \dots, 3n$

式中, dr_i 、 dr_i'' 分别代表两个可能位移。 dx_i 、 dx_i'' 同理。

对于定常约束的情况, 则两个可能位移 dx_i 、 dx_i'' 应分别满足方程式(1—11), 因此有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} dx_i'' = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

两式相减, 并根据虚位移的定义, 得

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} \delta x_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k \quad (1-12)$$

比较式(1—12)和(1—11)可见, 在定常约束情况下, 虚位移就是可能位移。因此实位移也是无数虚位移中的一个。

对于非定常约束的情况, 则两个可能位移 dx_i 、 dx_i'' 应分别满足方程式(1—10), 因此有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} dx_i + \frac{f_{\alpha}}{t} dt = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} dx_i'' + \frac{f_{\alpha}}{t} dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

两相相减, 并根据虚位移的定义, 得

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{f_{\alpha}}{X_i} \delta x_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k$$

上式与式(1—12)完全相同, 比较式(1—12)和式(1—10)可见, δx_i 和 dx_i 所满足的方程不相同。前者是与时间无关, 而后者是与时间有关。在非定常约束情况下, 因约束是随时间而变动, 则其某一时刻的虚位移, 可以把约束在该时刻加以“冻结”而在其约束允许条件下的位移, 即为质点的虚位移。因此, 它不一定是可能位移, 更不一定是实位移了。

例如, 一质点 M, 在一水平面上作曲线运动(图 1—11a), 水平面若是固定的, 即为定常约束。M 点的实位移是在水平面上, 且在 M 点的切线方位, 其指向也可以确定(dr 用实线表示)。而可能位移是在水平面上, 过 M 点的任意方向上的位移(dr 用虚线表示)。它是无数多个, 虚位移与可能位移一样是在水平面上, 过 M 点的任意方向上的位移(用 δ 表示), 也是无数多个。

图 1—11

水平面若以匀速率 v 上升运动(图 1—11b), 这是非定常约束, 此时 M 点的实位移是从 t 瞬时平面上 M 点到 $t+dt$ 瞬时平面上 M 点(dr 用实线表示), 可能位移是从 t 瞬时平面上 M 点到 $t+dt$ 瞬时平面上任意一点(dr 用虚线表示)。而虚位移仍在 t 瞬时平面上在 M

点任意方向上的位移(用 δ 表示)。

因此,对于虚位移也可定义为:在约束所允许的条件下与时间无关的任意微小的位移。它纯粹是一个几何概念,在数学上即为等时变分。

非自由系统的虚位移,是指在约束允许的条件下,质点系中各质点所具有的、几何相容的一组虚位移。由于质点之间有约束联系着,故各质点的虚位移之间有一定的关系。其中独立的虚位移个数等于质点系的自由度数。其虚位移求法有下面两种。

(1)几何法

我们仅限于讨论定常约束的情形。在此条件下,因为实位移是虚位移中的一个,因此,可以用求实位移的方法求各质点虚位移之间的关系。又由运动学知,质点的实位移与其速度成正比,即 $dr = v \cdot dt$,故可以用求速度的方法来求各质点实位移之间的关系。最后,我们可用求速度的几何法来分析质点系的虚位移。

下面以曲柄连杆机构为例来说明分析质点系的虚位移的几何法。如图 1—12(a)所示,设曲柄 oA 以角速度 ω 转动,由运动学知,曲柄销 A 的速度大小 $v_A = r\omega$ 方向垂直于 oA 。滑块 B 的速度 v_B 方位沿 x 轴。连杆 AB 作平面运动,此瞬时其瞬心为 C ,则 A 、 B 两点速度大小之间的关系为

图 1—12

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi}$$

即

$$v_B = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} v_A$$

用平面运动速度投影法,同样可以求出上述之关系。

因是定常约束,故可借助 A 、 B 两点的速度的关系求得该两点虚位移大小之间的关系。

$$\delta_B = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} \delta_A$$

δ_A 、 δ_B 的方向如图 1—12(b) 所示。

这是一个自由度的质点系,故只有一个独立虚位移,选广义坐标为 φ 其独立变分 $\delta\varphi$ 则 A 点虚位移为 $\delta_A = r \delta\psi$ B 点的虚位移为 $\delta_B = \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} \cdot r \delta\varphi$ 它们在 x 、 y 轴上的分量分别为

$$\delta x_A = -r \sin \varphi \delta\varphi$$

$$\delta y_A = r \cos \varphi \delta\varphi$$

$$\delta x_B = -r \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} \delta\varphi = -r \sin \phi \left[1 + \frac{r \cos \varphi}{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right] \delta\varphi$$

$$\delta y_B = 0$$

(2) 解析法

这是较为普遍的一种方法。先通过两个简单例题说明,再推广到一般情况。

为了便于与几何法比较,仍以曲柄连杆机构为例,将各质点的坐标表示为广义坐标 φ 的函数:

$$\begin{aligned} x_A &= r \cos \varphi & y_A &= r \sin \varphi \\ x_B &= r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} & y_B &= 0 \end{aligned}$$

设曲柄的虚位移用广义坐标 φ 的变分 $\delta\varphi$ 表示, A、B 两点的虚位移在 x、y 轴上的分量可对上述各式求变分得

$$\begin{aligned} \delta x_A &= -r \sin \varphi \delta\varphi \\ \delta y_A &= r \cos \varphi \delta\varphi \\ \delta x_B &= -r \sin \varphi \delta\varphi - \frac{1}{2} \frac{2r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \delta\varphi \\ &= -r \sin \varphi \left[1 + \frac{r \cos \varphi}{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \right] \delta\varphi \\ \delta y_B &= 0 \end{aligned}$$

当 $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\varphi > \frac{\pi}{2}$ 时,上式中负号表示沿 x 轴负向。这与上述几何法所得的结果相同。

又如图 1—7 所示的双锤摆,摆锤 A 和 B 有四个坐标,要满足两个约束方程,故系统只有两个自由度。选角 φ 和 θ 为广义坐标,则 A、B 两点坐标可表示为广义坐标的函数,即

$$\begin{aligned} x_A &= l_1 \sin \varphi & y_A &= l_1 \cos \varphi \\ x_B &= l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta & y_B &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta \end{aligned}$$

质点系的虚位移可用广义坐标的独立变分 $\delta\varphi$ $\delta\theta$ 表示,求 A、B 点的虚位移可对上式求变分,得

$$\begin{aligned} \delta x_A &= \frac{x_A}{\varphi} \delta\varphi + \frac{x_A}{\theta} \delta\theta = l_1 \cos \varphi \delta\varphi \\ \delta y_A &= \frac{y_A}{\varphi} \delta\varphi + \frac{y_A}{\theta} \delta\theta = -l_1 \sin \varphi \delta\varphi \\ \delta x_B &= \frac{x_B}{\varphi} \delta\varphi + \frac{x_B}{\theta} \delta\theta = l_1 \cos \varphi \delta\varphi + l_2 \cos \theta \delta\theta \\ \delta y_B &= \frac{y_B}{\varphi} \delta\varphi + \frac{y_B}{\theta} \delta\theta = -l_1 \sin \varphi \delta\varphi - l_2 \sin \theta \delta\theta \end{aligned}$$

通过以上例子看出,几何法较为直观,在少自由度系统中,求解也较为简单,但对多自由度系统中,由于涉及复合运动中复杂的速度矢量之间关系,并不能显示出它的优越性。而解析法,归结为变分方法,它与求微分方法相似,在一般情形下不会发生困难,尤其多自由度系统更显示出其优越性。

现在讨论一般情形。设一非自由系统,受到 k 个完整、双面约束,有 $N = 3n - k$ 个自由度,选 N 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 。则各点直角坐标表示成广义坐标的函数为

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t) \end{aligned} \quad (1-13)$$

或

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t) \\ i = 1, 2, \dots, n$$

质点系的任意虚位移可用广义坐标的 N 个独立变分 $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_N$, 表示。各点的虚位移 δr_i 在坐标轴上的投影可对式(1—13)求变分得到:

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{x_i}{q_1} \delta q_1 + \frac{x_i}{q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{x_i}{q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{x_i}{q_j} \delta q_j \\ \delta y_i &= \frac{y_i}{q_1} \delta q_1 + \frac{y_i}{q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{y_i}{q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{y_i}{q_j} \delta q_j \\ \delta z_i &= \frac{z_i}{q_1} \delta q_1 + \frac{z_i}{q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{z_i}{q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{z_i}{q_j} \delta q_j \end{aligned} \tag{1—14}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

写成矢量形式为

$$\delta r_i = \frac{r_i}{q_1} \delta q_1 + \frac{r_i}{q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{r_i}{q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{r_i}{q_j} \delta q_j \tag{1—15}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

式(1—14)和式(1—15)表明质点系任一质点的虚位移是广义坐标独立变分的线性组合。

小 结

约束、自由度、广义坐标、虚位移是分析力学几个基本概念。

1. 约束及约束方程

对于系统中的质点的位置和速度所加的几何学或运动学的限制称为约束。约束的数学表示式称为约束方程。

2. 约束的类型

(1)几何约束和运动(微分)约束: 约束只限制质点在空间的位置称为几何约束。约束不仅限制质点在空间的位置, 还限制质点的速度称为运动约束。

(2)定常(稳定、不含时)约束和非定常(非稳定、含时)约束: 约束不随时间而变化称为定常约束。约束随时间而变化称为非定常约束。

(3)双面(固执、不可解)约束和单面(非固执、可解)约束: 在任何时刻质点始终不能脱离约束称为双面约束。质点在某一方向上存在而在另一方向上不存在约束称为单面约束。

(4)完整约束和非完整约束: 几何约束和可积分的微分约束称为完整约束。不可积分微分约束称为非完整约束。

(5)完整系统和非完整系统: 所有约束均为完整约束的系统称为完整系统。存在有(那怕只有一个)非完整约束的系统称为非完整系统。

3. 自由度和广义坐标

唯一地确定质点系位置的独立变量称为广义坐标。

对于完整系统, 确定系统位置所需要的独立坐标的个数称为自由度数或自由度。在此情况下, 广义坐标数目等于系统的自由度。

有 n 个质点所组成的由 k 个完整约束的质点系, 其自由度为

$$N = 3n - k$$

对于非完整系统, 确定系统位置所需要的独立坐标变分的个数称为自由度。此时, 广义坐