

第一章 非线性振动初步

第一节 无阻尼单摆的自由振荡

一、小角度无阻尼单摆 椭圆点

单摆，一个由摆线 l 连着的重量为 mg 的摆锤所组成的力学系统，是力学教科书中通常都要进行讨论的一个简单的动力学模型。其实我们将会看到，它具有非常复杂的动力学行为，是一个复杂系统。

我们研究一个理想的单摆，即忽略摆线 l 的质量，认为整个系统的质量都集中在摆锤上，是一个具有集中参数的数学摆。如图 1-1 所示。因为如果把摆线与摆锤的质量一起计算，单摆就是一个具有分布参数的摆，与此相应的数学模型是偏微分方程，处理起来很复杂。理想单摆的数学表达是常微分方程，研究起来就要容易得多了。

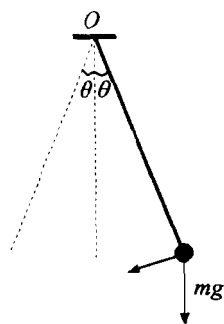


图 1-1 数学摆

首先忽略一切阻尼，例如忽略摆锤在运动中受到的空气阻力、摆线与悬挂点之间的摩擦力等等。由牛顿第二运动定律，摆锤质量为 m 的单摆的运动方程为

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta, \quad (1-1-1)$$

式中 θ 为摆角, g 为重力加速度. 将等式右边的项移到左边 并以 ml 相除 则有

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0.$$

设 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, 它是以单位时间的弧度为单位的角频率, 则式 (1-1-1) 可写为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0. \quad (1-1-2)$$

由于正弦函数是非线性的, 因此这是一个二阶非线性微分方程. 用级数展开正弦函数 得

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \quad (1-1-3)$$

如果 x 很小 则可以忽略三次以上的高次项 即 $\sin x \approx x$. 这就是说 当单摆的摆角很小时 式 (1-1-2) 变为线性微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (1-1-4)$$

方程 (1-1-4) 的解可以通过如下的代换解获得:

$$\theta = e^{\lambda t}.$$

式中 λ 为待定常数. 将其代入方程 (1-1-4) 并消去因子 $e^{\lambda t}$ 后 得特征方程

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (1-1-5)$$

方程 (1-1-5) 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0.$$

由此得到方程 (1-1-4) 的通解为

$$\theta(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (1-1-6)$$

式中 C_1, C_2 为复常数.

由于描述单摆振动的 $\theta(t)$ 应为实函数 所以常数 C_1, C_2 必须

满足条件

$$C_1^* e^{-i\omega_0 t} + C_2^* e^{i\omega_0 t} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t},$$

于是得条件

$$C_1 = C_2^*, \quad C_2 = C_1^*.$$

将满足这种条件的系数 C_1, C_2 写成指数形式:

$$C_1 = \frac{P}{2} e^{i\varphi}, \quad C_2 = \frac{P}{2} e^{-i\varphi},$$

其中 P 为它们的模, φ 为幅角 则式 (1-1-6) 写成如下形式:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{P}{2} (e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}) \\ &= P \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (1-1-7)$$

式 (1-1-7) 是一个振幅为 P 角频率为 ω_0 的简谐振动表示式, 表明单摆在摆角很小时的摆动为简谐振荡, 其振动波形可以用正弦曲线来表示. 由 ω_0 的定义可知 它只与摆线 l 的长度有关 而与摆锤的质量 m 无关, 它被称为单摆的固有角频率. 实际上 简谐振动是一切线性振动系统的共同特征, 它们都以自己的固有角频率作正弦振动. 例如, 线性弹簧上的振子、LC 振荡回路中的电流、微波与光学谐振腔中的电磁场以及电子围绕原子核的运动等等, 都可以近似地用一定固有角频率的简谐振动来描述.

式 (1-1-7) 是以振动的时间波形来描述系统的振荡状态, 这是一种最常用的表示振动的方法, 但不是唯一的方法. 例如 我们可以对方程 (1-1-4) 进行一次积分 并为简单起见 选择时间标度使 $\omega_0 = 1$ 则有

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \theta^2 = E, \quad (1-1-8)$$

式中 E 为积分常数 由初始条件决定. 如果把 θ 和 $\dot{\theta}$ 看作两个变量 则方程 (1-1-8) 是一个圆周方程. 在以 θ 和 $\dot{\theta}$ 为轴的直角坐标系平面上 方程 (1-1-8) 是一个半径为 $\sqrt{2E}$ 的圆 振动过程以一个代表点沿圆周转动来表示 如图 1-2 所示.

如果我们不采用 $\omega_0=1$ 那么方程 (1-1-8) 应该变成

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 = E, \quad (1-1-9)$$

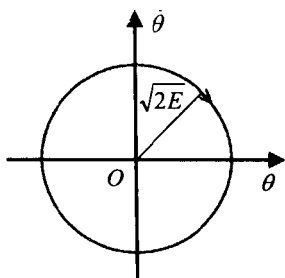


图 1-2 小摆角单摆的相图

于是，我们得到一个椭圆表达式。所以在以 θ 和 $\dot{\theta}$ 为轴坐标的平面上方程 (1-1-9) 表示了一个椭圆。

以 θ 和 $\dot{\theta}$ 为轴坐标定义的平面称为相平面；“相”的英文是 phase，意为状态，因此相图即为状态图。在相平面上表示系统运动状态的方法称为相平面法。相图上的每一个点表示了系统在某一时刻的状态（摆角与角速度）系统的运动状态则用

相图上的点的移动来表示，点的运动轨迹称为轨线。还可以形象地认为相空间内的相点可以想像成一种流体中的质点相点的运动构成一种相流，因此相轨线是不会相交的。相流可以用平常处理流体运动的连续性方程去描述。用相空间里的轨线来表示系统的运动状态的方法是法国大数学家庞加莱（Poincaré）于 19 世纪末提出来的，现在已成为广泛使用的一种描述系统运动状态的方法今后我们将经常使用。

因为方程 (1-1-8) 左边的第一项可看作系统的动能 $K = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2$ 。

而第二项则为系统的势能 $V = \frac{1}{2} \theta^2$ ，因此方程 (1-1-8) 或方程 (1-1-9) 又可写为

$$K + V = E.$$

可见积分常数 E 是系统的总能量。在运动过程中 K 和 V 两者都是随时间变化的，而系统的总能量 E 保持不变。当 $K=V=0$ 时 $E=0$ 有 $\theta=\dot{\theta}=0$ 这时摆处于静止状态称为静止平衡。当 $E>0$ 时，由于系统的总能量保持不变，摆的运动状态就用确定的周

期描述。可见 不同的能量 E 相应于半径不同的圆，它构成一族充满整个平面的同心圆（或椭圆）。显然 同一个圆周（或椭圆）上的各点能量相同，所以它们又被称为等能轨道。显然 坐标原点 $\theta=\dot{\theta}=0$ 是轨道在能量 $E \rightarrow 0$ 时的点 因为围绕该点的轨线是椭圆 所以人们常将被椭圆轨线围绕的静止平衡点称为“椭圆点”。以后我们可以看到，椭圆点在说明系统的运动行为时具有重要意义。

二、任意角度无阻尼单摆 双曲点

上面讨论了单摆在小角度摆动时的运动状态，一般来说 我们不应将单摆的摆角作任何限制，即单摆的摆角应该可以取任意数值。特别地，如果设想单摆的摆线是刚性的，则摆角可以超过 90° ，接近或达到 180° 使单摆达到倒立状态 甚至可以超过 180° 使单摆以一定的角速度旋转起来。本小节就是讨论在任意摆角下单摆的运动规律。

首先，我们注意摆角增大对单摆的振动周期的影响。由式 (1-1-7) 可见 小角度单摆的振动周期为 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 由于摆长 l 与 g 没有变化 因此小角度单摆的振动周期是常数 与摆角 θ 是无关的。但是在摆角不是很小的情况下 单摆的振动周期还与摆角无关吗？当年伽利略在观察比萨教堂中的吊灯的摆动时发现 长度一定的摆 其摆动周期不因摆角而变化 因此可以用来精确计时。惠更斯就是利用了伽利略的这个观察结果发明了摆钟。那么，单摆的振动周期到底是否与摆角有关呢？我们可以看一下表 1-1 所列的实验数据。

表 1-1 单摆的振动周期与摆角的关系

θ	0°	5°	10°	20°	30°	45°
$\frac{T}{T_0}$	1.000 0	1.000 5	1.001 9	1.007 7	1.017 4	1.036 9

表 1-1 中, T_0 是在零摆角极限下的周期. 由表 1-1 可见 单摆的振动周期是随摆角的增加而增加的, 在摆角为 45° 时 单摆的振动周期 T 约比周期 T_0 增加了 3.7% 实际上 即便在摆角很小 ($\theta < 5^\circ$) 的情况下 摆的周期增大效应就已存在. 事实上 如果我们计及 $\sin\theta$ 展开式中的高次项, 即考虑非线性项时, 周期与摆角无关的结论就不成立了. 伽利略所得出的单摆等时性规则只不过是一种近似 这是由于当时的时间计量精度不高所造成的.

单摆的周期与摆角的关系的定性图像如下: 由于非线性的影响 只要单摆的摆角大于零 单摆的周期 T 就大于零摆角极限下的周期 T_0 . 只是在摆角小于 90° 时 周期 T 随摆角增加的幅度不大 而当摆角超过 90° 时 周期 T 随摆角增大而很快增长; 当 $\theta \rightarrow 180^\circ$ 时 摆的周期 $T \rightarrow \infty$, 这是非线性项的影响越来越大的缘故. 振动周期的倒数是振动频率, 因此在振动周期随摆角增加而增加的同时 振动频率将越来越慢. 而且在摆角增加的同时 振动波形也由原正弦形状逐渐变成矩形形状 从简谐振动变成了张弛振动.

在数学上, 单摆的周期与其摆角的关系可以采用如下的方法求得.

将方程 1-1-2 乘以 $\frac{d\theta}{dt}$, 并对 t 积分 得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = E + 2\omega_0^2 \cos\theta, \quad (1-1-10)$$

式中 E 为积分常数. 在最大角位移 $\theta = \theta_0$ 处 角速度 $\frac{d\theta}{dt} = 0$, 因此求得积分常数 E 为

$$E = -2\omega_0^2 \cos\theta_0.$$

因此 由式 (1-1-10) 得

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 [2(\cos\theta - \cos\theta_0)]^{\frac{1}{2}}. \quad (1-1-11)$$

对式 1-1-11 积分 得

$$\omega_0 t = \int \frac{d\theta}{[2(\cos\theta - \cos\theta_0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (1-1-12)$$

设 $t=0$ 时 $\theta=0$ 并设振动周期为 T 则在 $t=\frac{T}{4}$ 时应有 $\theta=\theta_0$.

再运用半角公式, 得

$$\frac{1}{4}\omega_0 T = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{2\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1-1-13)$$

将 θ 表示成 ϕ 的函数 并写成

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \phi,$$

则应有

$$-1 < \sin \phi < 1.$$

由此可得

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \phi d\phi.$$

因而 可将式 (1-1-13) 变为

$$\frac{\pi}{2} \frac{T}{T_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\left(1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \phi\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1-1-14)$$

式中 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. 最后 可以计算出

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \cdots \right]. \quad (1-1-15)$$

忽略高次项, 得单摆的周期近似地为

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{4}\right) \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right]. \quad (1-1-16)$$

与小角度时的情况不同, 在任意摆角时我们很难给出相平面 $(\theta, \dot{\theta})$ 上单摆轨线的数学表达式. 为了寻求任意摆角时单摆在相平面上的轨线形状, 我们考察相平面上两个特殊点 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 和

($\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0$) 附近的情况。($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$) 实际上是相图坐标系的原点, 它附近的轨线形状就是前面小摆角时讨论过的情况, 即由式 (1-1-9) 表示的椭圆。因此, 我们这里只寻找点 ($\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0$) 附近的轨线方程。

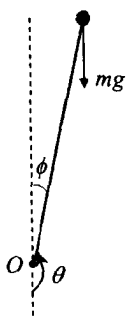


图 1-3 摆角达到接近倒立的单摆

考虑到 $\theta = \pm\pi$ 是摆锤处于倒立的状态 因此可以取对铅垂的偏角 ϕ 来表示单摆在 $\theta = \pm\pi$ 附近的摆角 如图 1-3 所示 $\phi = \pi - \theta$ 即 $\theta = \pi - \phi$ 。将 $\theta = \pi - \phi$ 代入单摆方程 (1-1-2) 有

$$\frac{d^2}{dt^2}(\pi - \phi) + \omega_0^2 \sin(\pi - \phi) = 0,$$

经简单运算后得

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \omega_0^2 \sin\phi = 0.$$

由于 ϕ 也是很小的角度 可以利用 $\sin x \approx x$ 于是得

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \omega_0^2 \phi = 0. \quad (1-1-17)$$

对式 (1-1-17) 积分 得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \phi^2 = E, \quad (1-1-18)$$

式中, E 为积分常数。在数学上, 式 (1-1-18) 是一个双曲线方程, 也就是说, 在摆锤处于倒立点附近, 相轨线是由 E 值确定的一条双曲线 不同的 E 值给出双曲线族。当 $E = 0$ 时 有

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \omega_0 \phi,$$

这是交点在 ($\phi = 0, \dot{\phi} = 0$) 处的两条相交的直线 它们是双曲线的渐近线 如图 1-4 所示。变换回 ($\theta, \dot{\theta}$) 坐标平面时, 交点 $\phi = 0, \dot{\phi} = 0$ 为相图上的 ($\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0$)。由此可见 坐标点 ($\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0$) 是双曲线两条渐近线的相交点, 因此该点常称为双曲奇点。双曲点是

在讨论系统的运动行为时另一个具有重要意义的特殊点。

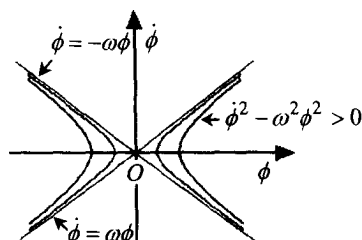


图 1-4 单摆倒立附近的相轨线

三、无阻尼单摆的相图与势能曲线

由于无法推导完整的相轨线方程，我们只能从小摆角和大摆角两种特殊情况推断无阻尼单摆的完整相图。我们已经知道在坐标系的原点 ($\theta=0, \dot{\theta}=0$) 附近 即低能量、小角度情况下 单摆的相轨线为近似椭圆形的闭合轨道。当摆角增大时 单摆的能量 E 提高，轨线逐渐扩展开来，在横坐标的两个方向上轨线逐渐呈现出尖角状 当能量 E 再提高时 单摆接近到倒立状态 那种尖角状的轨线形状发展成双曲线形，于是我们得到如图 1-5(a) 所示的单摆在任意摆角下相平面上的轨线。

现在讨论任意摆角下单摆相轨线的特征。为此 先看一下它的势能曲线。关于单摆的势能，可以从基本方程 1-1-2) 获得。若取 $\omega_0=1$ 对方程 1-1-2 积分 得

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta = E. \quad (1-1-19)$$

其中，左边第一项我们已在方程 1-1-8) 中见到过 它是单摆的动能 K 等式右边的积分常数 E 应是单摆的总能量，所以这是一个能量方程，左边的第二项是势能 V 。于是 我们有

$$V(\theta) = -\cos\theta, \quad (1-1-20)$$

所以 单摆的势能曲线 $V(\theta)$ 是以余弦函数分布的 如图 1-5(b) 所示.

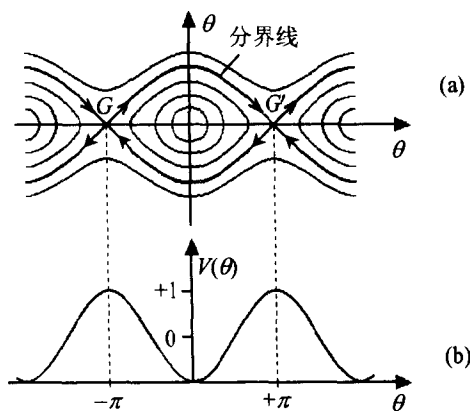


图 1-5 单摆的相轨线及势能曲线

我们可以由势能曲线来讨论相图上的一些特殊点的性质. 由 $\frac{dV}{d\theta}=0$ 可以获得单摆的两个平衡点, 即 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 与 $(\theta=\pm\pi, \dot{\theta}=0)$. 平衡点有稳定的与不稳定的之分. 在 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 平衡点附近 当 $\theta < 0$ 时, $\frac{dV}{d\theta} < 0$; 当 $\theta > 0$ 时, $\frac{dV}{d\theta} > 0$, 可知平衡点 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 是极小点 当系统离开该平衡点时 恢复力总是指向 $\theta=0$, 所以这是一个稳定平衡点. 从相图上看 与 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 平衡点相应的是单摆的静止状态. 在 $(\theta=0, \dot{\theta}=0)$ 平衡点附近的相轨线是椭圆, 该平衡点称为椭圆点, 因而椭圆点意味着是稳定平衡点.

再看另一个平衡点 $(\theta=\pm\pi, \dot{\theta}=0)$ 它相应于单摆的倒立状态. 由图 1-5(b) 所示的势能曲线可见, 这里是势能的极大点. 在该平衡点附近 例如在 $\theta=+\pi$ 附近 当 $\theta < +\pi$ 时, $\frac{dV}{d\theta} > 0$; 当 $\theta > +\pi$ 时, $\frac{dV}{d\theta} < 0$. 当系统离开该平衡点时 恢复力总是指向背离 $\theta=$

$+\pi$ 的方向, 所以这是不稳定的平衡点. 对于 $\theta = -\pi$ 可以作同样的讨论, 它也是不稳定的平衡点. 如果受到一个无限小力的推动, 系统就不会回复到 $(\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0)$ 的状态, 而是趋向于 $(\theta = \mp\pi, \dot{\theta} = 0)$. 从相图上看, $(\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0)$ 是双曲点. 由此可知双曲点是不稳定的平衡点. 该点也常形象地称为“鞍点”. 鞍点是不稳定的平衡点.

平衡点 $(\theta = -\pi, \dot{\theta} = 0)$ 和 $(\theta = +\pi, \dot{\theta} = 0)$ 都是单摆的倒立点, 都是相图上的双曲点. 在图 1-5(a) 上分别标为 G 点和 G' 点. 由 G 点到 G' 点或由 G' 点到 G 点的两条联结线被称为分界线 (separatrix). 由图 1-5(a) 可见, 所有的闭合轨道曲线都被限制在由分界线划定的范围之内.

实际上, 相图上的 G 点和 G' 点对应于势能曲线在 $\theta = \pm\pi$ 时的两个极大点. 因此, 只要摆角 θ 陷于一 $\pi < \theta < \pi$ 的势谷内, 单摆能量 E 不超过势能的两个极大值, 相轨线都是一些闭合回线, 单摆都作周期振动. 当摆角超过 $|\pm\pi|$ 进入到中心势谷左、右两侧的诸势谷时, 单摆能量 E 将超过势能曲线上的极大值, 轨线就不再闭合, 这时单摆作向左或向右方向的旋转运动, 而不再作周期振动了.

然而, 图 1-5(a) 中的横坐标 θ 是以 2π 为周期的摆角. $\theta = \pm\pi$ 实际上对应着单摆的同一个倒立位置. 当我们将相图上的 $G(+\pi)$ 点与 $G'(-\pi)$ 点重叠到一起时, 就相当于把相平面卷缩成为一个柱面. 所有的相轨线都将呈现在这样一个柱面上, 如图 1-6 所示. 反过来说, 平面

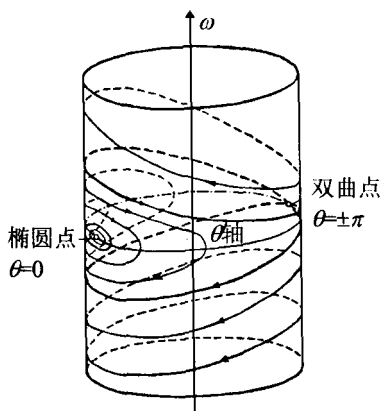


图 1-6 柱面上的单摆相轨线

上的相轨线是柱面上的相轨线的展开图。

第二节 阻尼振子

一、阻尼单摆 不动点

前面讨论的无阻尼单摆实际上是不存在的，在一个真实的力学系统中 阻尼总是存在的。一个很小的阻尼，即使在短时间之内可以将其忽略，但在进行足够长时间的观察过程中，阻尼就不能不计了 单摆的摆动最终会因阻尼而停止下来。

在小阻尼条件下，可以认为单摆所受到的阻尼力与摆的速度成正比。因此，当在单摆的运动方程中加进了阻尼力项后，可以写为

$$m\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0, \quad (1-2-1)$$

式中第二项就是摆受到的阻尼力， γ 为阻尼系数 在小阻尼条件下， γ 可视为常数。取 $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ ， β 为无量纲阻尼系数 如果摆角很小 满足 $\sin x \approx x$ 则式 (1-2-1) 变为

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \quad (1-2-2)$$

方程 (1-2-2) 为一齐次方程 设其解具有形式

$$\theta = e^{\lambda t}.$$

式中 λ 为待定常数。将其代入方程 (1-2-2) 后 得特征方程

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (1-2-3)$$

方程 (1-2-3) 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

设单摆是小阻尼的 这时上式根号下的值是负的 取

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

于是特征方程 (1-2-3) 的根可写为

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega. \quad (1-2-4)$$

经如此代换以后 方程 (1-2-2) 的通解为

$$\begin{aligned} \theta &= C_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta-i\omega)t} \\ &= e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

注意到上式中括号内的形式与式 (1-1-6) 相同 所以可以将括号内的部分表示为与式 (1-1-7) 相同的形式. 这样 在小阻尼条件下阻尼单摆的解可写成如下形式:

$$\theta = P e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (1-2-5)$$

由式 (1-2-5) 可知 与无阻尼单摆相比 阻尼单摆是幅度随时间作指数衰减的周期振荡 而且振动频率 $\omega (\neq \omega_0)$ 因阻尼而减小.

为了给出在相平面上的图像, 取 (1-2-5) 式的微分 得

$$\dot{\theta} = -P e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (1-2-6)$$

并将相平面坐标 $(\theta, \dot{\theta})$ 变量按下式变换为平面坐标 (u, v) 变量:

$$\begin{aligned} u &= \omega \theta = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = \rho \cos \phi, \\ v &= \dot{\theta} + \beta \theta = -A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) = -\rho \sin \phi, \end{aligned}$$

式中 $A = \omega P$, $\rho = A e^{-\beta t}$ 为 (u, v) 相平面上轨线的矢径, $\phi = \omega t + \varphi$ 为轨线的辐角. 由于 $\beta > 0$ 说明单摆轨线的矢径 ρ 随时间 t 作指数缩短.

由于相平面 (u, v) 不含时间 所以需要将 ρ 的表示式中的 t 消去. 利用 $\phi = \omega t + \varphi$ 得

$$t = \frac{1}{\omega} (\phi - \varphi),$$

代入 ρ 的表示式 并取 $C = A e^{\frac{\beta \varphi}{\omega}}$ 得

$$\rho = C e^{-\frac{\beta \phi}{\omega}}. \quad (1-2-7)$$

式 (1-2-7) 表明 与无阻尼单摆不同 阻尼单摆的轨线的矢径 ρ 是随转角 ϕ 的增加而缩短的. 所以在 (u, v) 平面上阻尼单摆的相轨线是向内旋转的对数螺旋线族 如图 1-7 所示. 如果变换回 $(\theta, \dot{\theta})$ 平面, 相轨道也是与此类似的对数螺旋线族. 由此可见 阻尼使图

1-2所示的单摆的椭圆形轨道破裂，无论阻尼是如何微小，阻尼都会将线性系统的闭合相轨线完全破坏掉。

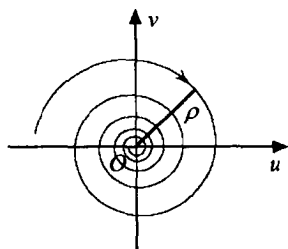


图 1-7 小阻尼单摆的相轨线

阻尼单摆的相轨线的矢径 ρ 作对数衰减的原因是系统的能量耗散。由于能量耗散 无论初始时刻从相平面上的哪一点出发 在经过若干次旋转之后，最终都会趋向于坐标原点。因此 人们形象地称原点 O 为“吸引子” 它把相空间里的点吸引过来。这是最简单的一类吸引子，称为零维吸引子，因为数学上几何点的维数为零，代表点运动到原点 O 相应于单摆静止下来 所以原点 O 又称不动点。

将阻尼对闭合相轨线的破坏结果扩大到任意摆角的阻尼单摆上 就可以画出任意摆角下的阻尼单摆相图 如图 1-8 所示。中心部分 坐标原点附近 的轨线与小摆角的线性情况相似 相轨线是向内旋转的对数螺旋线。其次，我们注意一下鞍点和分界线上的情况。由图 1-8 可见 鞍点的位置仍在 $\pm\pi$ 处 整个相平面被通过两个鞍点 G 与 G' 的轨线分隔成了三个不同的区域。假如单摆从倒立开始往下摆，由于阻尼引起的能量耗散，它不可能摆动到原有的高度。这样 从一个鞍点 例如 G 点 出发的轨线因能量耗散而向内卷缩 因而到不了另一个鞍点 G' 原有的分界线也被破坏了。从相流观点来看 所有中间区域 没有阴影线 内的相点都会流向坐标原点。原点是该区域的不动点 也是该区域的吸引子 这个中间区域也被叫做原点吸引子的吸引域。另外两个区域（有阴影线

的上、下两个区域)也有相应的吸引子,它们分别处在该图的左(-2π)、右(2π)两侧.

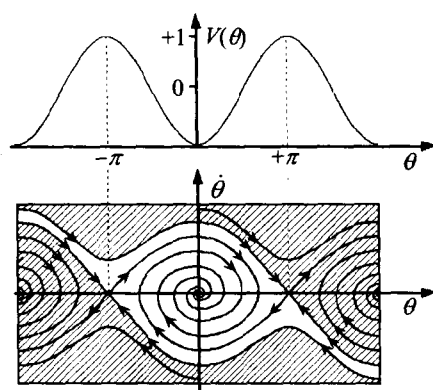


图 1-8 阻尼单摆的扩展相图

二、无驱杜芬方程

通常,把含有立方项恢复力的非线性振子称为杜芬(duffing)振子.例如,如果考虑受驱单摆方程中的弱非线性,即摆角不大时取 $\sin\theta$ 的级数展开式的前两项 $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$,就是一种特殊形式的杜芬振子.这时的单摆方程变为软弹簧杜芬方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = F \cos \omega t, \quad (1-2-8)$$

式中 ω 为小摆角下的自振频率.方程(1-2-8)称为软弹簧杜芬方程的原因是方程中的恢复力 $\left(x - \frac{x^3}{6} \right)$ 比线性弹簧振子方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

中的线性恢复力(x)还要小.

这里我们研究一类特殊的杜芬方程,它与方程(1-2-8)的不同

在于线性恢复力项是负的 即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} - \kappa x + \zeta x^3 = F \cos \omega t. \quad (1-2-9)$$

在实验上 描述方程 (1-2-9) 的振动系统可以用图 1-9 所示的装置来演示. 如图所示 固定在框架上的一块弹性板 其端点受到左、右两块磁铁吸引 而框架则受一正弦驱动力作用. 通过装置在弹性板根部的应变片可以输出反映弹性板振动的信号. 方程中的系数 κ 由磁铁的吸力调整, 在磁铁吸力弱时参数 $\kappa < 0$, 吸力强时参数 $\kappa > 0$.

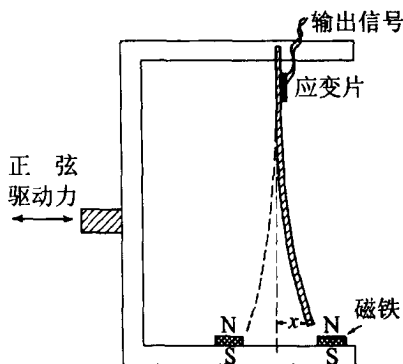


图 1-9 在磁性力作用下的弹性板

我们讨论无驱动力杜芬方程的特性. 设系数 $\zeta=1$ 先考虑 $\gamma=0$ 的无阻尼情况, 则无驱动力作用的杜芬方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \kappa x + x^3 = 0.$$

对上式进行积分 得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\kappa x^2 - \frac{1}{2} x^4 \right) = E, \quad (1-2-10)$$

式中 E 为积分常数. 如果将方程 (1-2-10) 与小摆角单摆方程 (1-1-8) 对比一下 可以发现 该方程也是一个能量方程 第一项为系统的动能 K 第二项则为系统的势能 V ;

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^4 - \kappa x^2 \right), \quad (1-2-11)$$

积分常数 E 则为系统的总能量。

在弱磁铁吸力时 $\kappa < 0$ ，由 $\frac{dV}{dx} = 0$ 可知系统只有一个 $x = 0$ 的平衡点，它相应于势能的最小点，因此是稳定的平衡点。如果参数 $\kappa > 0$ 则系统就有三个平衡点 即 $x = 0$ 与 $x = \pm\sqrt{\kappa}$ 其中 $x = \pm\sqrt{\kappa}$ 的两个平衡点相应于势能的极小点，因此是稳定的平衡点，而 $x = 0$ 的平衡点相应于势能的极大点 是不稳定的平衡点 是鞍点 说明系统的两个势谷为一个势垒所隔开。图 1-10 给出了方程中 $\kappa < 0$ 与 $\kappa > 0$ 两种情况的势能曲线。上述情况说明杜芬方程的解在从参数 $\kappa < 0$ 变到 $\kappa > 0$ 的过程中在 $\kappa = 0$ 处发生了分裂。这种由一个稳定解分裂为两个稳定解与一个不稳定解在数学上称为叉式分岔。关于数学分岔，下面我们将会有更详细一点的介绍。从空间的对称性来分析，杜芬方程的相轨线随着参数 κ 由负变正 其对称性发生了突变，从先前一个振动中心变成两个振动中心，原来对称的轨线现在变为不对称了。这种因参数变化而导致对称性破坏的情况称为对称性破缺 (symmetry breaking)。对称性破缺与分岔在非线性物理中是经常可以遇到的，而且分岔还是一个动力学系统从规则运动走向非规则运动的主要方式之一。

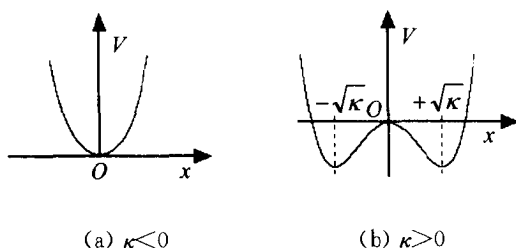


图 1-10 杜芬方程的势能曲线

根据前面单摆的势能曲线与相图间的关系，我们可以很容易