断裂力学中的边界数值方法

黎在良 王元汉 李廷芥 著

地震出版社
1996

内　容　简　介

本书系统地叙述了边界配置法和边界元法处理断裂力学问题的理论基础及其在工程中的应用。

本书可供从事机械工程、岩土工程、抗震工程、材料强度、工程力学等方面研究工作的科技人员及高等院校有关专业的师生参考。

断裂力学中的边界数值方法

黎在良　王元汉　李廷芥　著

责任编辑：姚家榴

责任校对：李　珺

*

地震出版社　出版

北京民族学院南路 9 号

中国地质大学轻印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

850×1168　1/32　10.375 印张　279 千字

1996 年 9 月第一版　1996 年 9 月第一次印刷

印数　001—800

ISBN 7-5028-1295-4/O・22

(1725)　定价：16.00 元

序　言

断裂力学在现代材料强度理论中所占据的重要地位是众所周知的事实。它在结构、机械、岩土、抗震等工程领域已得到越来越广泛的应用。但是，只有极少数断裂力学问题存在解析解，绝大多数工程实际中所遇到的断裂力学问题都要借助于数值分析的方法才能得到解决。由于裂纹尖端附近应力场存在奇异性，以致直接用常规数值方法分析断裂力学问题的效果往往较差，因此需要结合断裂力学的特点发展更有效的方法。

物理问题的数值分析方法，或称数值解法，可分为区域型和边界型两大类。目前，最通用的、有效的区域型解法是有限元法，另一种常用的区域型解法是有限差分法。区域型解法，特别是有限元法，经过几十年的发展已在工程界确立了它的地位。区域型解法在输入数据的准备上很费事，在整个区域内网格的划分也很麻烦。然而，边界型解法最近得到迅速发展，已受到学术界和工程界广泛的重视。边界型解法的优点是显而易见的。与区域型解法相比较，边界型解法需要处理的空间维数少了一维，使得输入数据的准备上大为简化，网格的划分和重新调整更为方便，最后形成的代数方程组的规模也小得多，因此能够大大缩短计算时间。边界元法中作为权函数的基本解能严格满足问题的微分方程，基本解的奇异性使最后形成的代数方程组的系数矩阵中对角线和近对角线元素的值远大于其他元素的值。上述特点使边界元法的计算精度大大提高，特别适用于处理场量变化梯度很大的问题，例如裂纹问题。边界元法在解决三维空间和无界域中含裂纹的问题

时具有特殊的优点，这对工程实际是非常重要的。另外，边界配置法实际上是一种半解析的数值方法，其所包含的近似亦只在表面。在各种边界配置法具体实施时，针对问题的特点，采用精心挑选的权函数和试函数能使计算精度大大超过其他纯数值分析方法。实际上，对于不存在解析解的断裂力学问题，由边界配置法得到的数值解常被当作衡量其他数值方法所得结果准确程度的“精确解”。但应指出，对裂纹的几何形状有一定的限制，而且目前尚不能处理三维空间中的裂纹问题，是其不足之处。

近十几年来，本书的作者在断裂力学的边界数值方法这一科研领域做了大量的工作，本书相当部分的内容取自于他们研究的最新成果。相信本书将有助于我国广大科技工作者及高等院校有关专业师生学习、研究和在工程实际中应用断裂力学中的边界配置法和边界元法。

中国科学院院士

1995.10.27

目　　录

绪　　篇

第一篇　断裂力学中的边界配置方法

第二篇 断裂力学中的边界元方法

绪　篇

第一章　理论基础与方法概述

§1-1　数值方法

一、加权残值法概述[1,2]

科学研究和工程实际中的许多问题往往归结为在一定边值条件下求解其控制微分方程或微分方程组的问题。最理想的方法是用解析法求得问题的封闭解，但这通常限于一些十分简单和非常特殊的情况。对于许多问题，人们不得不用数值法求其近似解。常用的数值方法有：有限差分法、有限单元法、边界单元法、区域或边界配置法等。这些方法虽然各不相同，但都可看作加权残值法的特殊情况。现对加权残值法的基本概念作一简单的介绍。

加权残值法（method of weighted residuals）是一种直接从微分方程得到近似解的数学方法。这种方法的特点是，先假设一个试函数作为微分方程的近似解。在这个近似解中有已确定的试函数项，也有待定的系数。将试函数代入微分方程，一般并不能满足，而出现残值。设法消除这些残值，可以确定待定系数，从而确定问题的近似解。

不失一般性，以 Laplace 方程为例来说明加权残值法的基本概念，并给出本书将涉及的边界配置法和边界元法的理论基础。

在本书中，以黑体字表示矢量。设待求函数 u（$\boldsymbol{x}$）在域 Ω 中满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1.1-1}$$

式中，∇^2 为 Laplace 微分算子，$f(x)$ 为已知函数。在 Ω 的边界 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 上，有

$$\text{本质边界条件：} u=\bar{u}, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma_1, \tag{1.1-2a}$$

$$\text{自然边界条件：} q=\frac{\partial u}{\partial n}=\bar{q}, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma_2, \tag{1.1-2b}$$

式中，$\partial u/\partial n$ 为边界上的法向导数。值得提出的是，为了使问题有唯一解，Γ_1 不能为零，即 Γ 上一定有一部分的边界条件是本质边界条件。一般情况下，由（1.1-1）和（1.1-2）式组成的定解问题求解 $u(\boldsymbol{x})$ 很困难，因而转求 $u(\boldsymbol{x})$ 的近似解 $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$，$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$ 称为试函数。将 $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$ 表达成

$$\tilde{u}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n}c^{(j)}N^{(j)}(\boldsymbol{x}), \tag{1.1-3}$$

式中，$N^{(j)}(\boldsymbol{x})$ 为域 $\boldsymbol{\Omega}$ 中给定的 n 个独立的已知函数，$c^{(j)}$ 为待定系数。将（1.1-3）式代入（1.1-1）和（1.1-2）式的左边，因为 $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$ 只是近似解，于是分别出现域内的残值 R，边界上的残值 R_1 和 R_2：

$$R=\nabla^2\tilde{u}-f, \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{1.1-4}$$

$$R_1=\tilde{u}-\bar{u}, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma_1, \tag{1.1-5a}$$

$$R_2=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}-\bar{q}, \qquad \boldsymbol{x}\in\Gamma_2. \tag{1.1-5b}$$

若 R，R_1 和 R_2 全为零，则 $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$ 为精确解，但在一般情况下，R，R_1 和 R_2 不全为零。现求在某种意义下使得这些残值尽可能小的近似解 $\tilde{u}(\boldsymbol{x})$。

设 $w(\boldsymbol{x})$ 为某种"权函数"，将 w 乘以 $\nabla^2\tilde{u}$ 后在 Ω 上积分，利用 Gauss 公式，得

$$\int_\Omega w\nabla^2\tilde{u}\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_k}\mathrm{d}\Omega. \tag{1.1-6}$$

对（1.1-6）式的右边的体积分再一次利用 Gauss 公式，有

$$\int_\Omega\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_k}\mathrm{d}\Omega=\int_\Gamma\tilde{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Omega\tilde{u}\nabla^2w\mathrm{d}\Omega, \tag{1.1-7}$$

于是（1.1-6）式可表达为

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \tilde{u} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{u} \nabla^2 w \mathrm{d}\Omega. \quad (1.1\text{-}8)$$

将（1.1-8）式改写成

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \nabla^2 w \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} w \nabla^2 \tilde{u} \mathrm{d}\Omega \approx -\int_{\Gamma_1} w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \bar{q} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega} w f \mathrm{d}\Omega, \quad (1.1\text{-}9)$$

或

$$\int_{\Omega} w (\nabla^2 \tilde{u} - f) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} (\tilde{u} - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} w \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} - \bar{q} \right) \mathrm{d}\Gamma \approx 0. \quad (1.1\text{-}10)$$

将（1.1-10）式的近似号换成等号，并将（1.1-4）和（1.1-5）式代入（1.1-10）式的左边，得

$$\int_{\Omega} R w \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1} R_1 \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} R_2 w \mathrm{d}\Gamma = 0. \quad (1.1\text{-}11)$$

（1.1-11）式给出残值 R，R_1 和 R_2 以权函数 W 分布于域 Ω 及其边界 Γ 上的关系。可以选择 n 个相互独立的权函数 $w^{(j)}$（$\boldsymbol{x}$），$j=1$，2，…，n，由（1.1-10）式得到 n 个求解 $c^{(j)}$ 的线性代数方程组，从而得到问题在（1.1-11）式意义下的近似解。

（1.1-10）式（或（1.1-11）式）称为加权残值法的原始形式。加权残值法还可用其他形式来表示。将（1.1-7）式改写成

$$\int_{\Omega} \tilde{u} \nabla^2 w \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} \mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_1} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2} \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k} \mathrm{d}\Omega. \quad (1.1\text{-}12)$$

（1.1-12）式的右边与（1.1-9）式的右边近似相等，即

$$\int_{\Omega}\frac{\partial w}{\partial x_k}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_k}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}wf\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_2}w\bar{q}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_1}(\bar{u}-\tilde{u})\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\approx 0. \tag{1.1-13}$$

（1.1-13）式称为加权残值法的弱形式。

由（1.1-8）式，有

$$\int_{\Omega}\tilde{u}\nabla^2 w\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}w\nabla^2\tilde{u}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-$$

$$\int_{\Gamma_1}\tilde{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_2}\tilde{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma=0.$$

利用（1.1-4）和（1.1-5）式，可将上式改写为

$$\int_{\Omega}\tilde{u}\nabla^2 w\mathrm{d}\Omega-\int_{\Omega}wf\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1}w\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2}w\bar{q}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}\bar{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_2}\tilde{u}\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma\approx 0. \tag{1.1-14}$$

（1.1-14）式称为加权残值法的逆形式。

上述加权残值法的三种形式构成各种数值解法的理论基础。从每一种形式出发，不同的权函数的选取，或不同的试函数的选取，将形成特殊的数值解法。

二、有限元法和边界元法

令权函数等于试函数，在区域的离散单元中用多项式作试函数,令多项式的系数为单元边界或内部有限个节点处的场量值,则从加权残值法的弱形式（1.1-13）式出发得到有限元法的基本公式。若权函数取问题的基本解，则加权残值法的逆形式（1.1-14）式变成一个边界积分方程，这个边界积分方程可用边界元法来求数值解，边界元法中的试函数与有限元中所用的试函数相同。有限元法和边界元法中，试函数是在单元中按插值理论的概念以一定的步骤系统地推导出来的，因此也称为插值函数。按插值理论，多项式插值函数的阶数取决于单元中节点的数目。

三、边界配置法

若选择严格满足微分方程（1.1-11）的试函数，则加权残值法的原始形式（1.1-11）给出一个边界积分方程：

$$\int_{\Gamma_1} R_1 \frac{\partial w}{\partial n} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_2} R_2 w \mathrm{d}\Gamma = 0. \qquad (1.1\text{-}15)$$

（1.1-15）式也可写为

$$\int_{\Gamma} R_B w_B \mathrm{d}\Gamma = 0, \qquad (1.1\text{-}16)$$

式中，$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$；残值 R_B 在 Γ_1 上为 R_1，在 Γ_2 上为 R_2；权函数 w_B 在 Γ_1 上为 $\partial w/\partial n$，在 Γ_2 上为 $-w$。边界积分方程（1.1-16）可用边界配置法求数值解。

值得注意的是，满足微分方程的试函数的形式是很多的。试函数选取的好坏，对计算工作量和结果的精确度影响很大。要选取较好的试函数，必须对问题解的特点有较多的了解，例如，微分方程的通解与特解的形式，问题的对称性，解的渐近性与奇异性，边界条件的特点等。应选取尽可能反映这些特点的比较接近真实解的试函数，以得到较理想的计算结果。

从理论上讲，选取试函数应遵循以下原则：试函数基 $\{N^{(j)}\}$ 的元 $N^{(j)}$ 是线性无关的，组成一个完备系列，当 $n\to\infty$ 时可以在任何情况下得到收敛于精确解的计算结果。常用的试函数有：三角级数、幂级数、样条函数、梁振动函数、柱稳定函数、Chebyshev 多项式、Legendre 多项式等。

在试函数确定之后，取不同的权函数，可以得到边界配置法的不同类型的解法。下面将主要介绍本书要用到的边界配点法、最小二乘法，以及它们的组合——最小二乘边界配点法。

1. *边界配点法*

配点法是以 δ 函数作为权函数的加权残值法。

一维 δ 函数有以下性质：

(i) $\delta(x-x_i)=\begin{cases}\infty, & \text{当 } x=x_i, \\ 0, & \text{当 } x\neq x_i;\end{cases}$

(ii) $\int_a^b \delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, 当\ x_i\ 在[a,b]\ 区间, \\ 0, 当\ x_i\ 不在[a,b]\ 区间; \end{cases}$

(iii) $\int_a^b f(x)\delta(x - x_i)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(x_i), 当\ x_i\ 在[a,b]\ 区间, \\ 0, 当\ x_i\ 不在[a,b]\ 区间。 \end{cases}$

二维 δ 函数也有类似的性质：

(i) $\delta(x - x_j)\delta(y - y_j) = \begin{cases} \infty, 当\ x = x_j\ 及\ y = y_j, \\ 0, 当\ x \neq x_j\ 或\ y \neq y_j; \end{cases}$

(ii) $\int_c^d \int_a^b \delta(x - x_j)\delta(y - y_j)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \begin{cases} 1, 当(x_j, y_j)\ 在积分域内, \\ 0, 当(x_j, y_j)\ 不在积分域内; \end{cases}$$

(iii) $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\delta(x - x_j)\delta(y - y_j)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \begin{cases} f(x_j, y_j), 当(x_j, y_j)\ 在积分域内, \\ 0, 当(x_j, y_j)\ 不在积分域内。 \end{cases}$$

因此，对一维问题的边界配点法，有

$$\int_\Gamma Rw\mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma R(x)\delta(x - x_j)\mathrm{d}\Gamma = R(x_j),$$

$$j = 1, 2, \cdots, n; \tag{1.1-17}$$

对二维问题的边界配点法，有

$$\iint_\Gamma Rw\mathrm{d}\Gamma = \iint_\Gamma R(x,y)\delta(x - x_j)\delta(y - y_j)\mathrm{d}\Gamma = R(x_j, y_j),$$

$$j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.1-18}$$

残值 R 应在 n 个配点 x_j(一维) 或(x_j, y_j)(二维) 处为零。令方程(1.1-17) 或(1.1-18) 式右边的残值为零，由联立的线性代数方程组可求出待定系数，于是得到(1.1-3) 式所表示的近似解 $\tilde{u}(x)$。

2. 最小二乘配点法

如果选取的试函数满足域内的微分方程，则残值只在边界 Γ 上存在。边界上残值 R_B 的平方积分式为

$$I(c^{(j)}) = \int_\Gamma R_B^2 \mathrm{d}\Gamma. \tag{1.1-19}$$

为使 $I(c^{(j)})$ 为最小，用求函数极值的条件

$$\frac{\partial I}{\partial c^{(j)}} = 0, \tag{1.1-20}$$

得，

$$\int_{\Gamma} R_B \frac{\partial R_B}{\partial c^{(j)}} \mathrm{d}\Gamma = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.1-21}$$

显然，最小二乘法中权函数为 $\partial R_B/\partial c^{(j)}$。(1.1-21) 式可化为 n 个求 $c^{(j)}$，$j=1, 2, \cdots, n$，的代数方程。

边界配点法使残值的积分式可用求和的离散形式表示。例如，当在边界上取 m 个配点时 (1.1-19) 式所表示的 $I\ (c^{(j)})$ 可写为

$$I(c^{(j)}) = \sum_{k=1}^{m} R_B^2 \tag{1.1-22}$$

将 (1.1-22) 式代入 (1.1-20) 式，得

$$\sum_{k=1}^{m} R_B \frac{\partial R_B}{\partial c^{(j)}} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.1-23}$$

(1.1-23) 式中，有 n 个待定系数 $c^{(j)}$，总配点个数为 m。为了问题有唯一解，m 的个数应大于至少等于 n。一般取 m 大于 n，此时 (1.1-23) 式是最小二乘加权平均意义下的算式，这种做法可以避免等额配点可能遇到的线性方程组线性相关以至不能求解的情况，另一方面，这种做法也提高了计算精度，得到更满意的结果。

四、边界型数值解法和区域型数值解法的比较

将物理问题的数值解法分为区域型解法和边界型解法两大类。最通用的区域型解法是有限元法，其他区域型解法包括有限差分法，区域配置法等。边界型解法主要是边界元法和边界配置法。

边界型解法的优点是显而易见的。与区域型解法，例如有限元法相比较，边界型解法需要处理的空间维数少了一维，这使得输入数据量大幅度减少，网格划分和重新调整较为方便，最后形成的代数方程组规模也小得多，从而计算时间大大缩短。边界元法所包含的近似只在表面，作为权函数的基本解是严格满足问题的微分方程的，而且基本解的奇异性将使最后形成的代数方程组的系

数矩阵中对角线和近对角线元素的值远大于其他元素的值。这些特点使边界元法计算的精度大大提高，特别适于处理场量变化梯度很大的问题，例如裂纹问题。另一方面，边界元法处理无穷域的问题有特殊的优越性。边界配置法所包含的近似亦只在表面。在各种边界配置法具体实施时，针对问题的特点采用精心挑选的权函数和试函数，使计算的精度大大超过其他数值法。因此，常用边界配置法的结果衡量其他数值方法计算精确度。

§1-2 弹性力学问题的控制方程

考虑一体积为 V 的均匀线弹性体。设 S 为 V 的表面，n_j 为 S 的外法向单位矢量。弹性力学问题的平衡方程为（遵循张量运算中的求和约定）：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} + f_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in V, \tag{1.2-1}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为空间位置矢量；σ_{ij}（$\boldsymbol{x}$）为 $\boldsymbol{x}$ 处的应力张量，它是一个对称张量，即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$；f_i（$\boldsymbol{x}$）为 $\boldsymbol{x}$ 处的体力密度矢量。以 u_i（$\boldsymbol{x}$）表示 $\boldsymbol{x}$ 处质点的位移矢量，应力位移关系遵循 Hooke 定律

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \tag{1.2-2}$$

式中，c_{ijkl}为弹性常数，对各向同性弹性体，它可表达为

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{1.2-3}$$

式中，λ 和 μ 为 Lamé 弹性常数；δ_{ij}为 Kronecker δ：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j。\end{cases} \tag{1.2-4}$$

将（1.2-2）式代入（1.2-1）式，得到以位移表示的平衡方程

$$c_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k(\boldsymbol{x})}{\partial x_l \partial x_j} + f_i(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in V. \tag{1.2-5}$$

设 $S=S_u+S_\sigma$，在表面 S 上的边条件为

$$\sigma_{ij}(x)n_j(x)=\bar{p}_i(x),\quad x\in S_\sigma; \tag{1.2-6a}$$

$$u_i(x)=\bar{u}_i(x),\quad x\in S_u. \tag{1.2-6b}$$

平衡方程（1.2-5）和边条件（1.2-6）构成弹性力学的定解问题。

§1-3 弹性力学的应力或位移函数方法

一、弹性力学平面问题的复变函数方法

1. *应力与位移公式*

根据 Мусхелищвили 的弹性力学平面问题的复变函数方法[3,4]，平面内任意一点的位移和应力可用两个复应力函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 和它们的导数表示：

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=4\mathrm{Re}\varphi'(z), \tag{1.3-1}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)], \tag{1.3-2}$$

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{1.3-3}$$

式中，μ 为剪切模量；u，v 分别为 x 方向和 y 方向的位移分量；κ 与 Poisson 比 ν 有关

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu, & (\text{平面应变}),\\ (3-\nu)/(1+\nu), & (\text{平面应力}).\end{cases} \tag{1.3-4}$$

2. *边界条件*

设物体边界上所受的面力已知，令 X_n 和 Y_n 为面力沿 x 方向和 y 方向的分量。如图1.1所示，用 N 表示边界外法线方向，并令 N 的方向余弦为：

$$\cos(N,x)=l,\qquad \cos(N,y)=m,$$

则边界上应力分量与面力分量之间的关系为

$$l\sigma_{xx}+m\tau_{yx}=X_n, \tag{1.3-5a}$$

$$m\sigma_{yy}+l\tau_{xy}=Y_n. \tag{1.3-5b}$$

将（1.3-1）和（1.3-2）式代入（1.3-5）式，即得边界上面力用复应力函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表达的形式。

考虑一段边界 AB，如图1.1所示。AB 上所受的面力的合力为