1. 线 弹 性 断 裂 力 学

本章是以材料的弹性形变为基础，论述裂纹尖端的应力场及其特征参数。建立能量法处理断裂问题，并给出裂纹扩展力 。简明阐述复合断裂准则。

1-1 应 力

材料中的应力用σ_{ij}表示。σ_{11}、σ_{22}、σ_{33}为张应力； σ_{21}、σ_{12}、σ_{13}、σ_{31}、σ_{23}、σ_{32}为切应力。图1-1表示一个立方体，设正面与 x轴正交的面积为A_1，立方体之外的材料对立方体的作用通过A_1面的正向作用力为F_{11}， 则$\sigma_{11}=\lim\limits_{A_1\to 0}F_{11}/A_1$。$\sigma_{22}$，$\sigma_{33}$的定义相似。立方体外的材料通过$A_1$的剪切力为$F_{12}$，则剪切应力$\sigma_{12}=\lim\limits_{A_1\to 0}F_{12}/A_1$；其余$\sigma_{23}$、$\sigma_{31}$……等的定义相似。立方体六个面上都有应力。令立方体趋于无限小，可由九个量组成的应力张量来描述 o 点的应力状态：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

考虑到立方体平衡，立即看到：

$$\sigma_{12}=\sigma_{21},\ \ \sigma_{23}=\sigma_{32},\ \ \sigma_{31}=\sigma_{13}$$

简写为：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ \ i\neq j=1,\ 2,\ 3,$$

表明应力张量是对称的。

有时候不用直角坐标系而采用圆柱极坐标系 (z，r，θ)，则张应力是： σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$，σ_{zz}；切应力是：$\sigma_{r\theta}$，$\sigma_{\theta r}$，σ_{rz}，σ_{zr}，$\sigma_{z\theta}$，$\sigma_{\theta z}$，同样可得出平衡条件为$\sigma_{\theta z}=\sigma_{z\theta}$，$\sigma_{zr}=\sigma_{rz}$，$\sigma_{\theta r}=\sigma_{r\theta}$。如用$\sigma_{ij}$表示应力时，则$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，$i\neq j=r$，$\theta$，$z$ ，见图1-2。

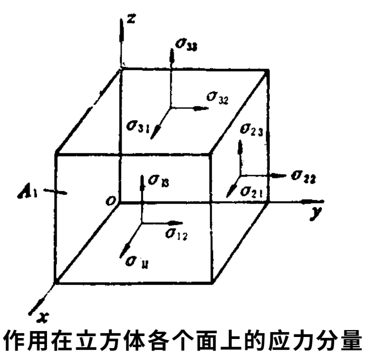

图 1-1 作用在立方体各个面上的应力分量

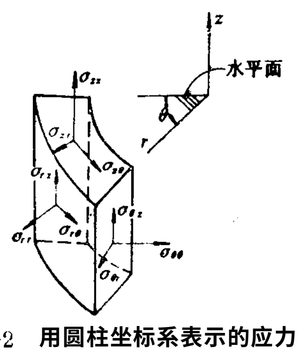

图 1-2 用圆柱坐标系表示的应力分量

当涉及到缺口应力场时，还会用到第三种坐标系，例如，平面曲线坐标系。$x_3=0$，而

$$x_1=c\cosh\alpha\cos\beta$$
$$x_2=c\sinh\alpha\sin\beta \tag{1-1}$$

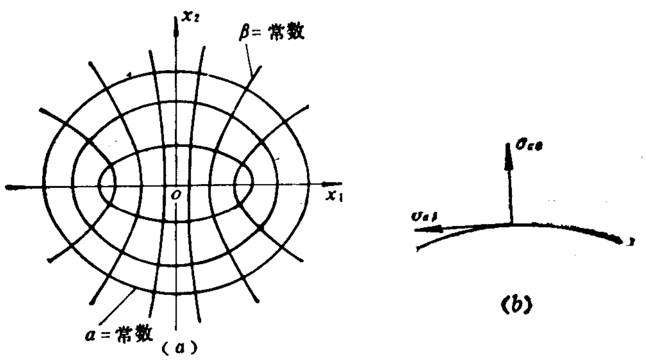

图 1-3 椭圆坐标系（a）和用椭圆坐标表示的应力（b）

通过这二式定义α和β。现在以（α，β）为坐标，就是曲线坐标。注意

$$\cosh\alpha=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2},\qquad \sinh\alpha=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$$

先看α＝常数的轨迹，

$$\left(\frac{x_1}{c\cosh\alpha}\right)^2+\left(\frac{x_2}{c\sinh\alpha}\right)^2=1$$

这是椭圆方程，长半轴为$a=c\cosh\alpha$，短半轴为$b=c\sinh\alpha$。椭圆的焦点至原点的距离为

$$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{c^2\cosh^2\alpha-c^2\sinh^2\alpha}=c$$

所以α＝常数的轨迹是同焦点的一族椭圆，见图 1-3（a）。

再看β＝常数的轨迹，则

$$\left(\frac{x_1}{c\cos\beta}\right)^2-\left(\frac{x_2}{c\sin\beta}\right)^2=1$$

这是双曲线方程，长短轴分别为

$$a=c\cos\beta,\quad b=c\sin\beta,$$

见图 1-4，

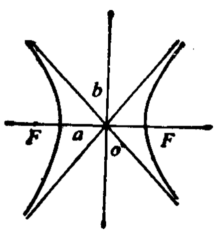

图 1-4 双曲线的长、短轴

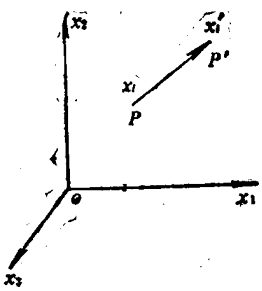

图 1-5 变形产生的位移

$$oF=\sqrt{a^2+b^2}=c$$

可见β＝常数的轨迹是同焦的一族双曲线，见图 1-3（a）。椭圆族与双曲线族正交。β可由

$0 \to 2\pi$。用这种坐标的好处在于适当选择常数时椭圆能够变得扁平，这可模拟一个裂纹，或者通过一对双曲线模拟缺口。用此坐标表示应力时将有$\sigma_{\alpha\alpha}$和$\sigma_{\alpha\beta}$，见图 1-3(b)。

1-2 应　　变

材料的变形使其中某点$P(x_1, x_2, x_3)$ 移到$P'(x_1', x_2', x_3')$，如图1-5所示。

$$x_i' = x_i + u_i, \quad i=1, 2, 3$$

u_i 为坐标的函数，写为：

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$$

对于小的形变，这种函数关系就是线性关系。应变也是一个对称张量，其分量ε_{ij}的定义是：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ji} \tag{1-2}$$

应变张量为

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

其中对角线的分量 $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33})$ 均为正应变，而$\varepsilon_{ij}(i\neq j)$ 为切应变。若用 γ 表示工程切应变 。则 γ_{ij}与ε_{ij}之间差1/2倍。例如：$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{12}, \varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\gamma_{13}, \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{23}$等等。

1-3 主应力与主应变

设 o 点的应力张量σ_{ij}为已知，就可以求出通过该点的面元ΔS的单位面积的应力 T 的各个分量，求法是

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{1-3}$$

其中 n_j是面元法线单位矢量的分量。注脚重复表示对该记号求和。

可以找到三个互相垂直的平面，在这些平面上无切应力，只有正应力，这三个平面叫做主平面。与此主平面垂直的三条法线叫做主轴， 主平面上的主正应力一般用σ_1，σ_2，σ_3表示，通常σ_1的代数值最大，σ_3代数值最小。若已知σ_{ij}，则列出行列式方程，求解即可得到σ_1，σ_2和σ_3。

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{11}-\sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22}-\sigma) & \sigma_{31} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33}-\sigma) \end{vmatrix} = 0 \tag{1-4}$$

即：

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$$

其中

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - I_1^2) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{23}^2 + 2\sigma_{31}^2 - I_1^2)$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}]$$

因为主应力是应力场点的物理量， I_1，I_2和I_3应该和用以表示σ_{ij}的坐标系无关，所以I_1，I_2，I_3都是应力的不变量。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

知道了σ_1, σ_2, σ_3以后就可以求出最大切应力及其所作用的平面。若σ_1为最大的主应力，σ_3为最小，则最大切应力的平面与σ_1, σ_3倾斜45°并且与σ_2平行。最大切应力等于

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{1-5}$$

在τ_{max}的作用面上尚有正应力为

$$\tilde{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min})=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) \tag{1-6}$$

$I_1/3$等于平均正应力$\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$。这就是静水正应力。将正应力分量分别减去$I_1/3$，叫做应力偏量，其定义是：

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{\delta_{ij}\cdot I_1}{3},\qquad \delta_{ij}\begin{cases}=1, i=j\\ =0, i\neq j\end{cases} \tag{1-7}$$

和前面讲的I_1，I_2，I_3相似，对应于应力偏量S_{11}，S_{22}，S_{33}就有不变量J_1，J_2，J_3。其中要特别提到的是

$$J_2=\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij}-J_1^2)=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} \tag{1-8}$$

这是因为 $J_1\equiv S_{ii}=\sigma_{ii}-\left(\frac{I_1}{3}\right)3=0$

和主应力对应，有主应变ε_1，ε_2和ε_3，就是说可以适当选择坐标轴方向，使轴上方向仅有正应变而无切应变。对于各向同性介质，应力主轴方向就是应变主轴方向。和上面求主应力方法相似，列出行列式方程：

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}-\varepsilon & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\varepsilon & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\varepsilon \end{vmatrix}=0$$

解出ε的三个根就是$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3$。

有了主应变以后，也和式（1-5）那样，可以求出最大切应变。但是

$$\gamma_{max}=\varepsilon_1-\varepsilon_3 \tag{1-9}$$

右边无1/2因子，道理是很明显的，不必详证。

弹性体应变能密度

$$W=\int_0^{\varepsilon}\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

右端的σ_{ij}和ε_{ij}指最终的应力和应变。

1-4 弹性体应力-应变的关系

各向同性的弹性体在三向应力σ_1, σ_2, σ_3作用下，主应力与主应变之间的关系是：

$$\begin{aligned}\sigma_1&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3\\ \sigma_2&=\lambda\varepsilon_1+(\lambda+2\mu)\varepsilon_2+\lambda\varepsilon_3\\ \sigma_3&=\lambda\varepsilon_1+\lambda\varepsilon_2+(\lambda+2\mu)\varepsilon_3\end{aligned} \tag{1-10}$$

其中主应变ε_i是和σ_i对应的正应变，λ叫做Lame′常数，膨胀率为Δ.

$$\Delta=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

则上式亦可写为：

$$\sigma_1=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_1$$
$$\sigma_2=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_2$$
$$\sigma_3=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_3$$

这是就主轴而言，都只有正应力和正应变：

对于非主轴x_1, x_2, x_3，则应力-应变的关系是：

$$\sigma_{11}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{11} \qquad \sigma_{12}=\mu\gamma_{12}=2\mu\varepsilon_{12}$$
$$\sigma_{22}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{22} \qquad \sigma_{23}=\mu\gamma_{23}=2\mu\varepsilon_{23}$$
$$\sigma_{33}=\lambda\Delta+2\mu\varepsilon_{33} \qquad \sigma_{31}=\mu\gamma_{31}=2\mu\varepsilon_{31}$$

对于各向同性介质， $E=\dfrac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \nu=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$，只有两个模量是独立的。$E$为杨氏模量，$\nu$为泊松比，由此二式，得

$$2\mu(1+\nu)=E, \qquad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{2\nu}{1-2\nu}$$

将$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$写出，便得

$$\Delta=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3\lambda+2\mu}$$

代入σ_1的表达式，$\sigma_1=\dfrac{\lambda(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3\lambda+2\mu}+2\mu\varepsilon_1$，并用上面的$\lambda$值，可以算出：

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)]$$

同理

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\nu(\sigma_3+\sigma_1)] \tag{1-11}$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)]$$

若$\varepsilon_3=0$，则为平面应变， $\sigma_3=\nu(\sigma_1+\sigma_2)$

同样可得：

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu(\sigma_{22}+\sigma_{33})]$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu(\sigma_{33}+\sigma_{11})] \tag{1-12}$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}[\sigma_{33}-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]$$

Δ是不变式，$\Delta=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，对于弹性变形，$\nu\approx0.3$。

在平面应力的条件下，$\sigma_{33}=0, \varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\sigma_{22}]$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}[\sigma_{22}-\nu\sigma_{11}]$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}[-\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})]$$

若为平面应变 $\varepsilon_{33}=0$，$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[\sigma_{11}-\nu\{\sigma_{22}+\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})\}]$$

即:

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_{11}-\nu(1+\nu)\sigma_{22}]$$

也可以得到ε_{22}的相似表达式，总结起来得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{11}&=\frac{1}{E}[\alpha\sigma_{11}-\beta\nu\sigma_{22}]\\ \varepsilon_{22}&=\frac{1}{E}[\alpha\sigma_{22}-\beta\nu\sigma_{11}]\\ 2\varepsilon_{12}&=\frac{\sigma_{12}}{\mu}=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&\text{平面应力：}\alpha=1,\ \beta=1\\ &\text{平面应变：}\alpha=(1-\nu^2),\\ &\qquad\qquad \beta=1+\nu\end{aligned}\qquad(1\text{-}13)$$

注意：平面应变及平面应力的应力分量有： σ_{11}，$\sigma_{12}=\sigma_{21}$，σ_{22}，
$\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ （平面应变）
$\sigma_{33}=0$ （平面应力）

关于应变部分：ε_{11}，$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}$，$\varepsilon_{22}$，$\varepsilon_{33}=0$（平面应变），$\varepsilon_{33}\neq0$（平面应力）

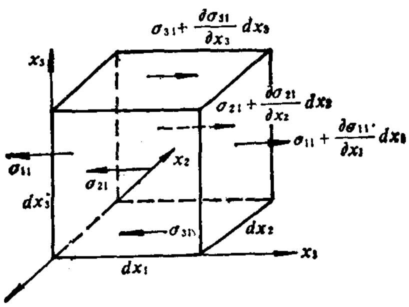

图 1-6 立方体应力平衡图

1-5 弹性理论的基本方程

设立方体边长为dx_1，dx_2，dx_3，处于平衡状态，在x_1方向合力应等于零，见图1-6：

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3$$

$$+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1-\sigma_{21}dx_3dx_1$$

$$+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2-\sigma_{31}dx_1dx_2=0$$

∴ 同理

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0\\&\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3}=0\\&\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}14)$$

简写为 $\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}=0$，此为应力平衡方程，

不但存在应力平衡方程，还应该有应变相容方程。在二维的条件下，

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad 2\varepsilon_{12}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

故

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)$$

二者相加

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}&=\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\\&=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\&=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\end{aligned}$$

所谓应变相容方程就是：

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}\qquad(1\text{-}15)$$

现在需要将以上诸方程合并起来，以平面应力为例：

$\alpha=\beta=1$

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}(\sigma_{11}-\nu\sigma_{22})\qquad\langle\text{i}\rangle$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{E}(\sigma_{22}-\nu\sigma_{11})\qquad\langle\text{ii}\rangle$$

$$2\varepsilon_{12}=\frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}\qquad\langle\text{iii}\rangle$$

〈i〉对 x_2 微分两次 +〈ii〉对 x_1 微分两次，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)$$

$$=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\quad\text{(由相容方程)}\qquad\langle\text{iv}\rangle$$

由式（1-15）和〈iii〉，知： $$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{2(1+\nu)}{E}\cdot\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\qquad(1\text{-}16)$$

再由平衡方程： $$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}=-\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1},\quad\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}=-\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2},\qquad\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}$$

各取一半， $$\therefore\quad\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

由式（1-16）得 $$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=-\left(\frac{1+\nu}{E}\right)\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

代入上面〈iv〉， $$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}\right)=-\frac{(1+\nu)}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

化简，得 $$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_2^2}\right)=-\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial x_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{E}(\nabla^2\sigma_{11}+\nabla^2\sigma_{22})=0$$

$$\therefore\quad\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0\qquad(1\text{-}17)$$

此式对平面应变也适用。

1-6 Airy 应力函数

定义应力函数 Φ，使得：

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2},\quad\sigma_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2},\quad\sigma_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_2},$$

代入平衡方程〈iv〉，自动满足。为了满足 $\nabla^2(\sigma_{11}+\sigma_{22})=0$，则应

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\right)=\nabla^2\cdot\nabla^2\Phi=0,\qquad(1\text{-}18)$$

无论平面应力或平面应变都这样，解式（1-18）需注意边界条件，满足式（1-18）的 Φ 为双谐函数

1-7 复变函数方法

令$z=x_1+ix_2$，$f(z)$ 为解析函数，存在$\frac{d}{dz}f(z)=f'(z)$。

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}f(z) &= \frac{\partial}{\partial z}f(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=f'(z)\\
\frac{\partial}{\partial x_2}f(z) &= \frac{\partial}{\partial z}f(z)\frac{\partial z}{\partial x_2}=if'(z)
\end{aligned}\right. \tag{1-19}
$$

设 $$f(z)=\alpha+i\beta,\quad \alpha=\mathrm{Re}f(z),\quad \beta=\mathrm{Im}f(z)$$

由式（1-19）得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f(z)}{\partial x_1}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}=f'(z)\\
\frac{\partial f(z)}{\partial x_2}&=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}=if'(z)
\end{aligned}\right\}
$$

$$\therefore\qquad i\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}+i\frac{\partial\beta}{\partial x_2}$$

两边虚、实部分各相等，

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}&=\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\\
\frac{\partial\alpha}{\partial x_2}&=-\frac{\partial\beta}{\partial x_1}
\end{aligned}\right\}\text{或}\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Re}f(z)&=\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Im}f(z)\\
\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{Re}f(z)&=-\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{Im}f(z)
\end{aligned}\right\} \tag{1-20}
$$

这称为Cauchy-Riemann方程。

由上二式消去β，$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_2^2}=0$，即$\nabla^2\alpha=0$，

$$\nabla^2\mathrm{Re}f(z)=0$$

表示解析函数$f(z)$之实数部分满足Laplace方程，同理，$\nabla^2\mathrm{Im}f(z)=0$，故$\mathrm{Re}f(z)$，$\mathrm{Im}f(z)$都为谐函数。

读者可以自证：如果ψ是谐函数，则$x_1\psi$，$x_2\psi$（注意$\psi=\psi(x_1, x_2)$）都是双谐函数，双谐函数可以选作Airy应力函数，当然要配合问题的边界条件。

更一般地讲，Airy应力函数可以写作：

$$\Phi=\mathrm{Re}[(x_1-ix_2)\psi(z)+\chi(z)],\quad z=x_1+ix_2 \tag{1-21}$$

这需要加以证明。除了Airy应力函数之外，还可以用函数F和B来定义应力函数：

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 B}{\partial x_1\partial x_2}\\
\sigma_{22}&=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 B}{\partial x_1\partial x_2}\\
\sigma_{12}&=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2}
\end{aligned} \tag{1-22}
$$

代入平衡方程(1-14)，只考虑平面问题，得

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^3}-2\frac{\partial^3 B}{\partial x_1^2\partial x_2}+\frac{\partial^3 F}{\partial x_1\partial x_2^2}-\frac{\partial^3 B}{\partial x_2^3}+\frac{\partial^3 B}{\partial x_1^2\partial x_2}=0$$

和
$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_2^3}+2\frac{\partial^3 B}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 F}{\partial x_1^2\partial x_2}-\frac{\partial^3 B}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 B}{\partial x_1^3}=0$$

这就是
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 F)-\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 B)=0$$

和
$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla^2 F)+\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2 B)=0$$

而且这就是Cauchy-Riemann关系，或者说$\nabla^2(F+iB)$是解析函数。问题在于选择F和B 令

$$F+iB=\bar{z}\psi(z)+\chi(z),\qquad z=x_1+ix_2,\quad \bar{z}=x_1-ix_2 \tag{1-23}$$

得：
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+i\frac{\partial B}{\partial x_1}=\psi(z)+\bar{z}\psi'(z)+\chi'(z),$$

又：
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+i\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2}=\psi'(z)+\psi'(z)+\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z),$$

另外，又有：
$$\frac{\partial F}{\partial x_2}+i\frac{\partial B}{\partial x_2}=-i\psi(z)+\bar{z}\psi'(z)i+\chi'(z)i$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}+i\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2}=\psi'(z)+\psi'(z)-\bar{z}\psi''(z)-\chi''(z)$$

因此，
$$\nabla^2 F+i\nabla^2 B=4\psi'(z)$$

只要$\psi(z)$和$\chi(z)$都是解析的，$\psi'(z)$也是解析的，由上式则知$\nabla^2(F+iB)$便是解析的。由此挑出的实函数就是应力函数，

$$\Phi=F=\mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z)+\chi(z)]=\mathrm{Re}[(x_1-ix_2)\psi(z)+\chi(z)]$$

这就是式（1-21）。

下面介绍用复变函数法建立应力的表达式。为此需要建立应力与函数$\psi(z)$，$\chi(z)$之间的关系。

令$\bar{f}(\bar{z})$为$f(z)$的共轭函数，即将$f(z)$中的i变为$-i$

$$f(z)+\bar{f}(\bar{z})=2\alpha=2\mathrm{Re}f(z) \tag{1-24}$$

由式（1-21），
$$\Phi=\mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z)+\chi(z)]$$

和式（1-24）比较，得：$2\Phi=2\mathrm{Re}[\bar{z}\psi(z)]+2\mathrm{Re}\chi(z)$
$$=[\bar{z}\psi(z)+z\bar{\psi}(\bar{z})+\chi(z)+\bar{\chi}(\bar{z})]$$

对x_1微分一次：$2\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\bar{z}\dfrac{\partial\psi(z)}{\partial x_1}+\psi(z)\dfrac{\partial\bar{z}}{\partial x_1}+z\dfrac{\partial\bar{\psi}(\bar{z})}{\partial x_1}+\bar{\psi}(\bar{z})\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+$

$$+\frac{\partial \chi(z)}{\partial x_1}+\frac{\partial \overline{\chi}(\overline{z})}{\partial x_1}$$

注意：$\frac{\partial z}{\partial x_1}=1$，$\frac{\partial}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=\frac{d}{dz}$，$\frac{\partial}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left(\frac{\partial \overline{z}}{\partial x_1}\right)=\frac{d}{d\overline{z}}$

$$\therefore \qquad 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}=\overline{z}\psi'(z)+\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\psi}(\overline{z})+\chi'(z)+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad \langle \mathrm{i} \rangle$$

同理对x_2微分

$$2\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=\overline{z}\frac{\partial \psi(z)}{\partial x_2}+\psi(z)\frac{\partial \overline{z}}{\partial x_2}+z\frac{\partial \overline{\psi}(\overline{z})}{\partial x_2}+\overline{\psi}(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial \chi(z)}{\partial x_2}+\frac{\partial \overline{\chi}(\overline{z})}{\partial x_2}$$

注意：$\frac{\partial z}{\partial x_2}=i$，$\frac{\partial \overline{z}}{\partial x_2}=-i$

$$\therefore \qquad 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=\overline{z}i\psi'(z)-i\psi(z)-iz\overline{\psi}'(\overline{z})+i\overline{\psi}(\overline{z})+i\chi'(z)-i\overline{\chi}'(z)$$

两端乘以i，

$$2i\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=-\overline{z}\psi'(z)+\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z})-\chi'(z)+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad \langle \mathrm{ii} \rangle$$

$\langle \mathrm{i} \rangle+\langle \mathrm{ii} \rangle$，得：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}+i\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}=\psi(z)+z\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\chi}'(\overline{z}) \quad \langle \mathrm{iii} \rangle$$

$\langle \mathrm{iii} \rangle$对$x_1$微分，$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}+i\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial \psi(z)}{\partial x_1}+z\frac{\partial \overline{\psi}'(\overline{z})}{\partial x_1}+\overline{\psi}'(\overline{z})+\frac{\partial \overline{\chi}'(\overline{z})}{\partial x_1}$

得：$\sigma_{22}-i\sigma_{12}=\psi'(z)+z\overline{\psi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})+\overline{\chi}''(\overline{z}) \quad \langle \mathrm{iv} \rangle$

$\langle \mathrm{iii} \rangle$再对$x_2$微分，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}+i\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}=\frac{\partial \psi(z)}{\partial x_2}+\overline{\psi}'(\overline{z})\frac{\partial z}{\partial x_2}+z\frac{\partial \overline{\psi}'(\overline{z})}{\partial x_2}+\frac{\partial \overline{\chi}'(\overline{z})}{\partial x_2}$$

$$=i\psi'(z)+i\overline{\psi}'(\overline{z})-iz\overline{\psi}''(z)-\overline{\chi}''(\overline{z})i$$

两端乘以（$-i$），得

$$-i\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}=\psi'(z)+\overline{\psi}'(\overline{z})-z\overline{\psi}''(\overline{z})-\overline{\chi}''(\overline{z}) \quad \langle \mathrm{v} \rangle$$

$\langle \mathrm{iv} \rangle+\langle \mathrm{v} \rangle$ 得 $\sigma_{11}+\sigma_{22}=2[\psi'(z)+\overline{\psi}'(\overline{z})]=4\,\mathrm{Re}\psi'(z) \quad (1\text{-}25)$

$\langle \mathrm{iv} \rangle-\langle \mathrm{v} \rangle$得 $\sigma_{22}-\sigma_{11}-2i\sigma_{12}=2[z\overline{\psi}''(\overline{z})+\overline{\chi}''(\overline{z})]$

把后一式变为复数共轭式，

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2[\overline{z}\psi''(z)+\chi''(z)] \quad (1\text{-}26)$$

从这最后方程左右两端虚实各相等，得$(\sigma_{22}-\sigma_{11})$和$\sigma_{12}$，再和式（1-25）联立，就求出$\sigma_{11}$和$\sigma_{22}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1-8　曲线坐标——椭圆-双曲线坐标

式（1-25）用椭圆-双曲线坐标表示。由于

$$x_1 = c\cosh\alpha\cos\beta \quad \alpha = \text{常数，为一族椭圆，}$$

$$x_2 = c\sinh\alpha\sin\beta \quad \beta = \text{常数，为一族双曲线}$$

$$\beta = 0 \to 2\pi\text{，二者互为垂直}$$

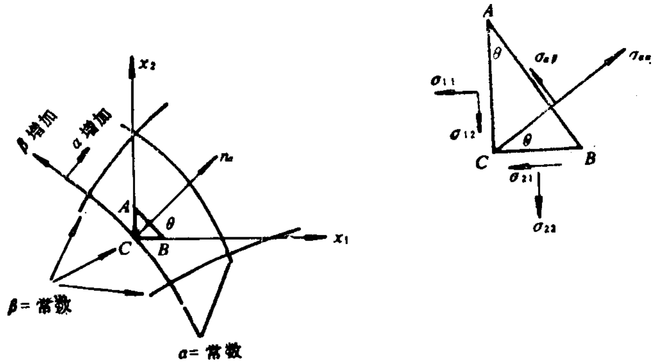

图 1-7　用曲线坐标表示的应力和用直角坐标表示的应力

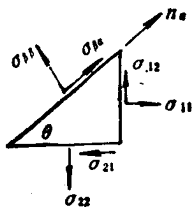

图 1-8　应力之间的关系

ABC是坐落在原点处的一小块材料，其各面之应力如图 1-7所示。

研究二维平面应力或平面应变问题，ABC处于平衡态。在$\alpha\ \alpha$方向合力$=0$，（设单位厚度）

$$\sigma_{\alpha\alpha}AB = \sigma_{11}AB\cos\theta\cos\theta + \sigma_{22}AB\sin\theta\sin\theta + \sigma_{12}(AB\cos\theta)\sin\theta + \sigma_{21}(AB\sin\theta)\cos\theta$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

又：

$$\sigma_{\alpha\beta}(AB) - \sigma_{12}AB\cos^2\theta - \sigma_{22}AB\sin\theta\cos\theta + (AB\cos\theta)\sigma_{11}\sin\theta + \sigma_{21}AB\sin^2\theta = 0$$

$$\therefore \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{12}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin\theta\cos\theta - \sigma_{11}\sin\theta\cos\theta - \sigma_{21}\sin^2\theta$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11})\sin\theta\cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

再考虑右图那一块材料（单位厚度）的平衡。图1-8 中

$$\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{11}\sin^2\theta + \sigma_{22}\cos^2\theta - 2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

相加，得$\sigma_{22} + \sigma_{\beta\beta} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$，表明它对坐标转换为不变式。

又

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11})\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} + \sigma_{12}\cos 2\theta$$

$$2i\sigma_{\alpha\beta} = 2\sigma_{12}i\cos 2\theta + (\sigma_{22} - \sigma_{11})i\sin 2\theta \qquad \langle \mathrm{i} \rangle$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{11}(-\cos 2\theta) + \sigma_{22}\cos 2\theta - 4\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} = (\sigma_{22} - \sigma_{11})\cos 2\theta - 2\sigma_{12}\sin 2\theta \qquad \langle \mathrm{ii} \rangle$$

〈i〉+〈ii〉，得

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11})(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2\sigma_{12}i(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &\therefore \quad \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\alpha\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\beta} = (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{i2\theta} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}27)$$

再和式（1-26）比较，看出

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}&=\sigma_{11}+\sigma_{22}=4\,\mathrm{Re}\psi'(z)\\ \sigma_{\beta\beta}-\sigma_{\alpha\alpha}+2i\sigma_{\alpha\beta}&=2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]e^{i2\theta}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}28)$$

这公式的意义就是通过解析函数$\psi'(z)$，$\psi''(z)$，$\chi''(z)$表示曲线坐标系的应力。

如果令　　$z=c\cosh p$，$p=\alpha+i\beta$，那么

$$x_1+ix_2=\frac{c}{2}(e^{\alpha+i\beta}+e^{-\alpha-i\beta})=\frac{c}{2}(e^{\alpha}\cos\beta+ie^{\alpha}\sin\beta+e^{-\alpha}\cos\beta-ie^{-\alpha}\sin\beta)$$

左右两端分开虚、实部分，则

$$x_1=c\cosh\alpha\cos\beta$$
$$x_2=c\sinh\alpha\sin\beta$$

这正好是1-1节所研究过的椭圆-双曲线坐标转换，将在下节应用。

1-9　平板中椭圆孔的应力场，Inglis解

参照1-1节，定义$a=c\cosh\alpha_0$，$b=c\sinh\alpha_0$，平板中椭圆孔受力如图1-9 所示，边界条件是x_1，$x_2\to\infty$，$\sigma_{22}=\sigma$，$\sigma_{11}=0$，$\sigma_{12}=0$。

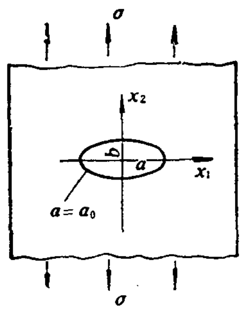

图 1-9　具有椭圆孔的平板的拉伸

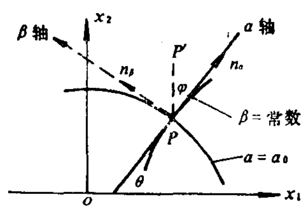

图 1-10　x_1-x_2空间和α-β空间

根据式（1-25），$4\,\mathrm{Re}\psi'(z)=\sigma$，在$\infty$处，

$$2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]=\sigma,\quad 在\infty处$$

另外，还得有　　$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha}&=0\qquad 在\alpha=\alpha_0\\ \alpha_{\alpha\beta}&=0\qquad 在\alpha=\alpha_0\end{aligned}\right\}$$ 指椭圆边界上无应力，

式（1-28）中以$z=c\cosh p$代入，所以$\psi(z)$，$\psi'(z)$，$\psi''(z)$，$\chi''(z)$ 都变成p的函数，现在的问题在于$e^{i2\theta}$怎么定，见图1-10。设考虑一小段PP'，和n_α成φ角，这段线长没有具体定，设用$|\delta z|$表示（对于x_1-x_2轴），或用$|\delta p|$表示（对于α-β轴）。注意$|\delta z|\neq|\delta p|$，因为z与p之间有转换关系，应该满足$z=c\cosh p$。

$$\delta z=|\delta z|\,e^{i(\theta+\varphi)}\qquad 在x_1\text{-}x_2空间$$
$$\delta p=|\delta p|\,e^{i\varphi}\qquad 在\alpha\text{-}\beta空间$$

$$\frac{\delta z}{\delta p}=\left|\frac{\delta z}{\delta p}\right|e^{i\theta}=\frac{dz}{dp}\qquad\langle i\rangle$$

已知
$$z=c\cosh p,\ \frac{dz}{dp}=c\sinh p \qquad \langle ii\rangle$$

$$\left|\frac{dz}{dp}\right|=c\sqrt{\sinh p\sinh\overline{p}} \qquad \left|\frac{dz}{dp}\right|^2=c^2\sinh p\sinh\overline{p}$$

平方〈i〉,
$$\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=\left|\frac{\delta z}{\delta p}\right|^2 e^{2i\theta}$$

$$c^2\sinh^2 p=c^2\sinh p\sinh\overline{p}e^{2i\theta}$$

$$\therefore \qquad e^{2i\theta}=\frac{\sinh p}{\sinh\overline{p}}$$

以 $z=c\cosh p$ 和 $e^{2i\theta}=\dfrac{\sinh p}{\sinh\overline{p}}$ 代入式（1-16），以找出 ψ和 χ。Inglis解出能适合上述边界条件的$\psi(p)$和$\chi(p)$:〔见本节末的补充证明。〕

$$\left.\begin{aligned}&4\psi(p)=\sigma c[(1+e^{2\alpha_0})\sinh p-e^{2\alpha_0}\cosh p],\\&4\chi(p)=-\sigma c^2\left[(\cosh 2\alpha_0-\cosh\pi)p+\frac{1}{2}e^{2\alpha_0}-\cosh 2\left(p-\alpha_0-i\frac{\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}29)$$

式中 σ 为无限远处的名义应力，α_0、c之意义在前面已经说明。

我们现在只用$4\psi(p)$，令 $e^{\alpha_0}\equiv\lambda$，则
$$\begin{aligned}4\psi(p)&=\sigma c[(1+\lambda^2)\sinh p-\lambda^2\cosh p]\\&=\sigma c[\sinh p+\lambda^2(\sinh p-\cosh p)]\end{aligned}$$

由于
$$\sinh p-\cosh p=\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\frac{e^p+e^{-p}}{2}=-\frac{1}{2}(2e^{-p})=-e^{-p}$$

所以式（1-29）变为 $\qquad 4\psi(p)=\sigma c[\sinh p-\lambda^2 e^{-p}]$

已知 $\qquad \sigma_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}=4\,\mathrm{Re}\psi'(z)$

又知，在$\alpha=\alpha_0$上$\sigma_{\alpha\alpha}=0$，要求$\sigma_{\beta\beta}$，得先求$\psi'(p)$:
$$4\psi'(p)=\sigma c[\cosh p+\lambda^2 e^{-p}]$$

但式（1-28）中要用$4\mathrm{Re}\psi'(z)$，$\psi'(z)=\dfrac{d\psi(p)}{dp}\cdot\dfrac{dp}{dz}=\psi'(p)\cdot\dfrac{1}{c\sinh p}$ （见〈ii〉）

$$\begin{aligned}\therefore\ 4\mathrm{Re}\psi'(z)&=\mathrm{Re}\,\sigma c[\cosh p+\lambda^2 e^{-p}]\cdot\frac{1}{c\sinh p}\\&=\mathrm{Re}\,\sigma\left[\coth p+\frac{\lambda^2 e^{-p}}{\sinh p}\right]=\mathrm{Re}\,\sigma\left[\frac{e^p+e^{-p}}{e^p-e^{-p}}+\frac{2\lambda^2 e^{-p}}{e^p-e^{-p}}\right]\\&=\mathrm{Re}\,\sigma\left[\frac{e^p+e^{-p}+2\lambda^2 e^{-p}}{e^p-e^{-p}}\right]=\mathrm{Re}\,\sigma\left(\frac{e^p+\dfrac{1}{e^p}+\dfrac{2\lambda^2}{e^p}}{e^p-\dfrac{1}{e^p}}\right)\end{aligned}$$

$$=\mathrm{Re}\,\sigma\left[\frac{e^{2p}+1+2\lambda^2}{e^{2p}-1}\right]=\mathrm{Re}\,\sigma\left(\frac{e^{2\alpha+2i\beta}+1+2\lambda^2}{e^{2\alpha+2i\beta}-1}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\,\sigma\cdot\frac{e^{2\alpha}(\cos2\beta+i\sin2\beta)+1+2\lambda^2}{e^{2}(\cos2\beta+i\sin2\beta)-1}$$

$$=\mathrm{Re}\,\sigma\frac{(e^{2\alpha}\cos2\beta+1+2\lambda^2)+ie^{2\alpha}\sin2\beta}{(e^{2\alpha}\cos2\beta-1)+ie^{2\alpha}\sin2\beta}$$

$$=\mathrm{Re}\,\sigma\cdot\frac{[(e^{2\alpha}\cos2\beta+1+2\lambda^2)+ie^{2\alpha}\sin2\beta][e^{2\alpha}\cos2\beta-1-ie^{2\alpha}\sin2\beta]}{(e^{2\alpha}\cos2\beta-1)^2+(e^{2\alpha}\sin2\beta)^2}$$

从中抽出实数部分，得：

$$\sigma_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}=\frac{(e^{2\alpha}\cos2\beta+1+2\lambda^2)(e^{2\alpha}\cos2\beta-1)+e^{4\alpha}\sin^2 2\beta}{e^{4\alpha}\cos^2 2\beta-2e^{2}\cos2\beta+1+e^{4\alpha}\sin^2 2\beta}(\sigma)$$

由于上述之边界条件 $(\sigma_{\alpha\alpha})=0$，**化简上式，得：**

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\alpha=\alpha_0}=\frac{e^{4\alpha}+2\lambda^2(e^{2\alpha}\cos2\beta-1)-1}{(e^{4\alpha}-2e^{2\alpha}\cos2\beta+1)}(\sigma),\quad \alpha=\alpha_0 \qquad \langle \mathrm{i}\rangle$$

Knott**得出的结果是：**

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\alpha=\alpha_0}=\frac{\sinh(\alpha\alpha_0)-1+e^{2\alpha_0}\cos2\beta}{\cosh(2\alpha_0)-\cos2\beta}\sigma$$

$$=\frac{\dfrac{e^{2\alpha_0}-e^{-2\alpha_0}}{2}-1+e^{2\alpha_0}\cos2\beta}{\dfrac{e^{2\alpha_0}+e^{-2\alpha_0}}{2}-\cos2\beta}\sigma=\frac{e^{4\alpha_0}+2e^{2\alpha_0}(e^{2\alpha_0}\cos2\beta-1)-1}{e^{4\alpha_0}+1-2e^{2\alpha_0}\cos2\beta}\sigma$$

(**注意：**$e^{2\alpha_0}\equiv\lambda^2$)
$$=\frac{e^{4\alpha_0}+2\lambda^2(e^{2\alpha_0}\cos2\beta-1)-1}{e^{4\alpha_0}-2e^{2\alpha_0}\cos2\beta+1}\sigma \qquad \langle \mathrm{ii}\rangle$$

和前面我们的结果⟨i⟩**相同。**α**取定值以后，**β**还可以变，见图**1-11。

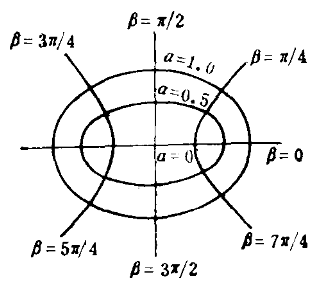

图 1-11　α值固定后，β的变化

现在，我们要的是缺口前端的最大应力 $(\sigma_{\beta\beta})_{\beta=0、\pi、2\pi\cdots}$

$$\therefore\ (\sigma_{\beta\beta})_{\beta=0}=(\sigma_{22})_{\max}=\frac{\sinh(2\alpha_0)-1+e^{2\alpha_0}}{\cosh(2\alpha_0)-1}\sigma$$

$\because c^2=a^2-b^2$，**已知** $a=c\cosh\alpha_0$，$b=c\sinh\alpha_0$，

见 1-1节

$$\sinh\alpha_0 = \frac{b}{c}, \quad \cosh\alpha_0 = \frac{a}{c}$$

$$\sinh 2\alpha_0 = 2\sinh\alpha_0 \cosh\alpha_0 = \frac{2ab}{c^2}$$

$$\cosh 2\alpha_0 = \cosh^2\alpha_0 + \sinh^2\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$\therefore (\sigma_{\beta\beta})_{\beta=0} = (\sigma_{22})_{\max} = \sigma\left(\frac{\frac{2ab}{c^2} - 1 + e^{2\alpha_0}}{\frac{a^2+b^2}{c^2} - 1}\right)$$

$$\sinh 2\alpha_0 = \frac{e^{2\alpha_0} - e^{-2\alpha_0}}{2} = \frac{2ab}{c^2}, \quad \cosh 2\alpha_0 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{e^{2\alpha_0} + e^{-2\alpha_0}}{2}$$

$$\therefore \ e^{2\alpha_0} - e^{-2\alpha_0} = \frac{4ab}{c^2}, \quad e^{2\alpha_0} + e^{-2\alpha_0} = \frac{2(a^2+b^2)}{c^2}$$

相加： $$2e^{2\alpha_0} = \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2}{c^2} = \frac{2(a+b)^2}{c^2}, \quad \therefore e^{2\alpha_0} = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2$$

$$(\sigma_{\beta\beta})_{\beta=0} = (\sigma_{22})_{\max} = \sigma \cdot \frac{2ab - c^2 + (a+b)^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \sigma \cdot \frac{2ab - c^2 + a^2 + 2ab + b^2}{2b^2}$$

$$= \sigma \cdot \frac{4ab + 2b^2}{2b^2} = \sigma\left(\frac{2a+b}{b}\right)$$

$$\therefore (\sigma_{22})_{\max} = \sigma\left(1 + \frac{2a}{b}\right)$$

椭圆形孔边沿上的曲率半径 $\rho = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} \Big/ \frac{d^2y}{dx^2}$，用 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，求出 $y \to 0, x = a$ 的地方，$\rho = b^2/a$。则，

$$(\sigma_{22})_{\max} = \sigma\left(1 + \frac{2a}{\sqrt{a\rho}}\right) = \sigma\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right) \tag{1-30}$$

这是个重要的公式，指出缺口（半椭圆形）顶端的最大应力为 $\sigma\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$，$\rho$ 为曲率半径，当 ρ 很小时，$(\sigma_{22})_{\max} \approx 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ 就足够准确了。

〈补充证明〉：关于椭圆孔应力场的应力函数——Inglis解的证明

具有椭圆孔的板材受外加名义应力 σ（单向加载）的作用，见图1-1′，为了求出孔周围的弹性应力场可用复函应力函数的方法， Knott在他的书中提出，相应的应力函数 $\psi(p)$ 为：

$$4\psi(p) = \sigma c[(1 + e^{2\alpha_0})\sinh p - e^{2\alpha_0}\cosh p]$$

本节补充证明上式是正确的，从此我们可以看到解这类问题的方法。

令$e^{\alpha_0}=\lambda$，则

$$4\psi(p)=\sigma c[(1+\lambda^2)\sinh p-\lambda^2\cosh p]$$
$$=\sigma c[\sinh p+\lambda^2(\sinh p-\cosh p)]$$

∵$\sinh p-\cosh p=-e^{-p}$，故上式实质上是

$$4\psi(p)=\sigma c[\sinh p-\lambda^2 e^{-p}] \tag{1'}$$

我们只要证明 (1)′就可以了，下面分几个步骤来证明。

1．用叠加原理分析平板上椭圆孔的应力场

按照图1-2′中的(1)和(2)相叠加，则在椭圆边沿上无应力，可以将椭圆所占的面积割去，其效果就是一个椭圆孔。因此，我们将(1)和(2)两种情况的应力函数分别求出，叠加起来就是所要的最终应力函数，用以描述平板椭圆孔周围的应力场。

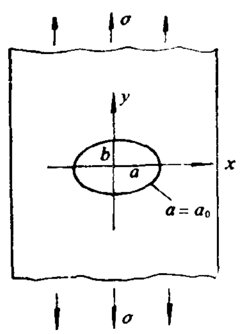

图 1-1′　拉伸板中的椭圆孔

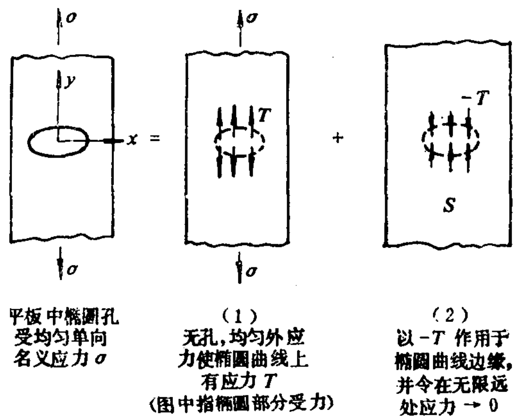

图 1-2′　叠加原理示意

记得：
$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=4\mathrm{Re}\psi'(z) \tag{2'}$$

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]$$
$$=2[\bar{z}\psi''(z)+F'(z)]$$

其中令$\chi''(z)\equiv F'(z)$。对于情况(1)，即无孔平板受均匀单向应力σ，显而易见：

$$\psi(z)=\frac{1}{4}\sigma z$$

$$F(z)=\frac{1}{2}\sigma z \qquad z=c\cosh p \tag{3'}$$

这是因为用(3)′代入(2)′，便得

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=\sigma, \qquad \therefore\sigma_{11}=0$$
$$\sigma_{22}-\sigma_{11}=\sigma \qquad \sigma_{12}=0 \tag{4'}$$
$$\sigma_{22}=\sigma$$

这正好符合平板均匀受载的应力分布。这表明对于情况(1)，$\psi(z)$, $F(z)$应该用(3)′。

为了确定和情况(2)相适应的应力函数，首先需要求出沿椭圆线上的应力(traction)T，用$\sigma_{\alpha\alpha}$和$\sigma_{\alpha\beta}$表示，见图1-3′，此时平板仍然是无孔的。

$$\sigma_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}=\sigma_{11}+\sigma_{22}=\sigma$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com