第一章　电介质的极化

第一节　真空中的静电场

一、库仑定律

在静电学的研究中，我们经常要用到点电荷的概念，点电荷是带电体的理想模型。在实际情况下，只有当带电体的形状、大小可以忽略不计时，才可把带电体当作点电荷。

在真空中，q_1、q_2 两个点电荷之间的相互作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸，作用力的大小与电荷量 q_1 和 q_2 的乘积成正比，而与这两个点电荷之间的距离 r 的平方成反比，这就是库仑定律。用公式表示为

$$|F_{12}| = |F_{21}| = k\frac{|q_1 q_2|}{r_{12}^2}$$

式中，k 是比例常数，F_{12}、F_{21} 分别表示 q_2 对 q_1，q_1 对 q_2 的作用力，其大小相等，方向相反。也可用矢量式表示：

$$F_{21} = -F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}r_{12}$$

式中，r_{12} 是由点电荷 q_1 至点电荷 q_2 所作的矢径。q_1、q_2 同号时，如图 1-1(a)所示，F_{21} 与矢径 r_{12} 方向相同，说明 q_1 和 q_2 之间的作用力为斥力；q_1、q_2 异号时，如图 1-1(b)所示，F_{21} 与矢径 r_{12} 方向相反，说明 q_1 和 q_2 之间的作用力为引力。因此，上述矢量式同时

需要全本请访问 www.ertongbook.com

给出了作用力的大小和方向。

在国际单位制中，库仑定律公式中的比例系数为：$k = 8.9880 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \approx 9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$。通常，人们引入新的恒量 ε_0 来代替 k，令 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，于是，真空中库仑定律就可以写成：

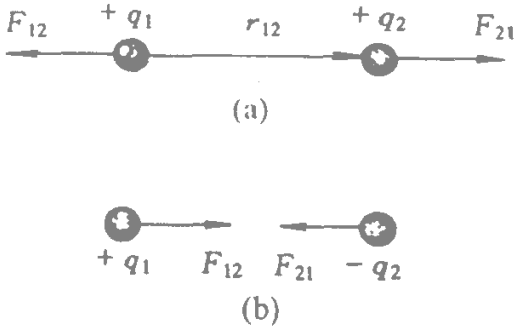


图 1-1　两个点电荷之间的作用力

$$|F_{21}| = |F_{12}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{1-1}$$

$$F_{21} = -F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{1-2}$$

式中，恒量 ε_0 称为真空介电系数，数值如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \times 9 \times 10^9} \\ &= 8.85 \times 10^{-12}(\mathrm{C^2/N \cdot m^2}) \\ &= 8.85 \times 10^{-12}(\mathrm{F/m})\end{aligned} \tag{1-3}$$

二、电场强度

人们在长期的实践中，逐步认识到带电体周围存在着电场，其他带电体所受到的电性力（或称静电力、库仑力）是由电场给予的。电场对电荷的作用力称为电场力。

相对于观察者为静止的带电体周围存在着电场，称为静电场。

静电场的性质主要有：

（1）引入电场中的任何带电体，都受到电场力的作用。

(2) 当带电体在电场中移动时，电场力对带电体作功，表明电场具有能量。

为了了解电场中任一点处电场的性质，用点电荷进行研究。实验研究指出，点电荷在电场中某点所受到的力，不仅与点电荷所在点的电场性质有关，且与点电荷的电量有关。所以可用点电荷所受到的力和点电荷所带电量之比作为描述静电场中给定点的客观性质的一个物理量,称为电场强度或场强,即

$$E = \frac{F}{q_0} \tag{1-4}$$

场强 E 是矢量。当点电荷为一个单位电量正电荷时，E 与 F 量值相等。说明电场中某点的电场强度在量值上和方向上等于一个单位正电荷在该点所受到的力。

在国际单位制中，力的单位为牛顿（N)，电量的单位为库仑(C),场强的单位是牛／库(N/C)。也可写成伏／米(V/m)。

电场的基本性质之一是场强叠加原理：电场中任一点的总场强等于各个点电荷在该点各自产生的场强的矢量和：

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_n \tag{1-5}$$

利用这个原理，可以计算任意带电体所产生的场强，下面说明点电荷中场强计算的方法。

设在真空中有一点电荷 q，则其周围电场中某点 p 的场强可由式(1-4)、(1-2)求得。假设在距点电荷 q 为 r 的 p 处放一试验电荷 q_0,则 q_0所受到的力为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^3}r$$

式中，r 是由点电荷 q 到 p 点的矢径。p 点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}r \tag{1-6}$$

由上式可知，在点电荷 q 的电场中 ，任一点的场强的大小，与点电

荷的电量 q 成正比,与点电荷 q 到该点的距离 r 的平方成反比。

若电场是由若干个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 共同产生的，并设各点电荷到 p 点的矢径分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$,则各点电荷在 p 点处产生的场强分别为

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3} r_1, \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3} r_2, \cdots, \quad E_n = \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n^3} r_n$$

应用电场叠加原理，这些点电荷各自在 p 点所产生的场强的矢量和就是 p 点处的总场强。

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3} r_i \tag{1-7}$$

三、高斯定理

库仑定律和高斯定理是静电学中的基本定律，高斯定理由库仑定律和场强叠加原理导出。

以 q 所在点为中心，取任意长 r 为半径，作一球面包围这一点电荷 q ,则球面上任一点的电场强度 E 的大小都是 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, 方向沿矢径 r 的方向，处处与球面垂直(设 q 为正电荷)，如图 1-2。

通过这球面的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}S \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint_S \mathrm{d}S \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{1-8}$$

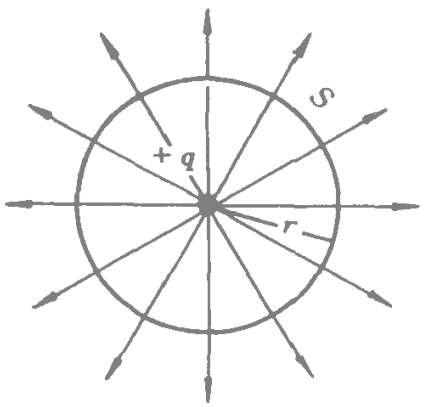


图 1-2 球面 S 上通过的电通量

这一结果与所取球面的半径无关，也就说明以 q 为中心的任意闭合球面通过球面的电通量的量值都等于 $\frac{q}{\varepsilon_0}$。

依据电场叠加原理，这一结果可推广到任意带电系统的静电场。当闭合曲面内存在不只一个点电荷时，上式就可写成：

$$\Phi = \oint_S E\cos\theta \mathrm{d}S = \oint_S E\mathrm{d}S = \frac{\sum_i^n q_i}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}9)$$

上式表示，在真空中的任何静电场中，通过任一闭合曲面的电通量等于这闭合曲面所包围的电荷的代数和的 ε_0 分之一。它以一个积分形式的数字公式，揭示了静电场中场强的分布规律。

当闭合面内的电荷为连续分布时，则

$$\Phi = \oint_S E\mathrm{d}S = \frac{\int \mathrm{d}q}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}10)$$

当电荷呈体分布时，设电荷体密度为 $\rho(x、y、z)$，则

$$\Phi = \oint_S E\mathrm{d}S = \frac{\int_V \rho \mathrm{d}V}{\varepsilon_0} \qquad (1\text{-}11)$$

四、高斯定理的应用

1. 均匀带电球面的电场

设一球，半径为 r，球表面均匀带电，电荷为 q，如图 1-3 所示。过球内 p_1 点作半径为 r_1 的辅助球面 $S_1(r_1 < R)$，球面积等于 $4\pi r_1^2$。电荷分布对球心 O 是球对称的，可以确定球面 S_1 上各点场强也是球对称的。设场强为 E_1，场强方向沿半径方向，场强的量值相等。因此，球面 S_1 的电通量为 $4\pi r_1^2 E_1$。已知球面 S_1 所包围的电荷为零，据高斯定理得：

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$E_1 = 0 \quad (1\text{-}12)$$

所以，对均匀带电的球面来说，球内任何点的场强等于零。

过球外 p_2 点作半径为 r_2 的辅助球面 $S_2(r_2 > R)$，球面积等于 $4\pi r_2^2$。设场强为 E_2，对应地，通过球面的电通量为 $4\pi r_2^2 E_2$，已知球面 S_2 所包围的电荷为 q，据高斯定理得：

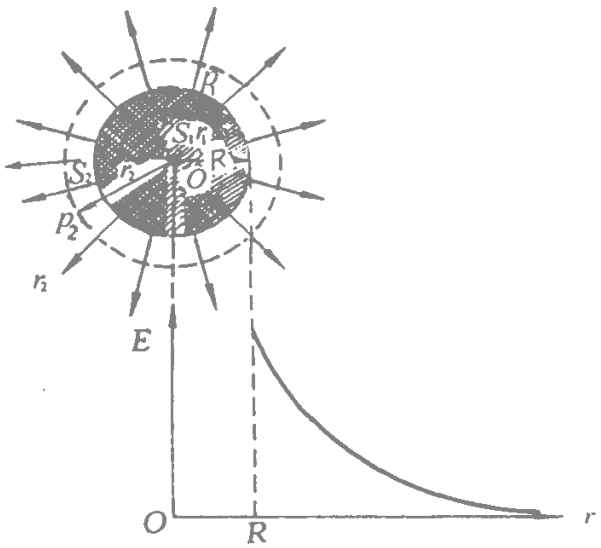


图 1-3　均匀带电球面的场强

$$4\pi r_2^2 E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

即

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \quad (1\text{-}13)$$

可见，均匀带电的球面，对球外各点的作用，正如球面上所带电荷全部集中在球心处的一个点电荷一样。场强与距离的关系如图 1-3 所示。

同样的道理，对于半径为 R、电量为 q 的均匀带电球体的电场，用同样的方法可以得到在球外任一点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1\text{-}14)$$

球内任一点的场强为

$$4\pi r^2 E = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$

式中，q' 是半径为 r 的球所包围的电荷，因此

$$q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

式中，ρ 是电荷体密度，且

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

所以

$$q' = \frac{r^3}{R^3} q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \quad (1\text{-}15)$$

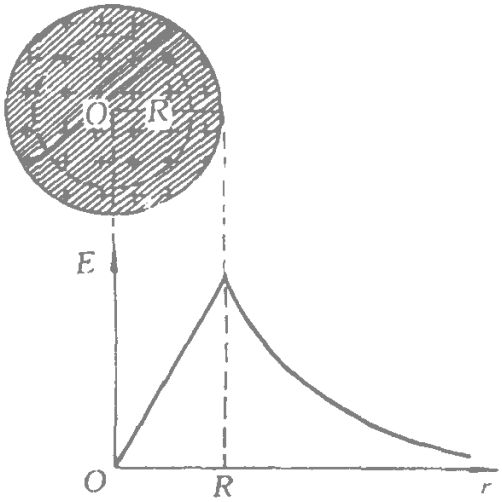


图 1-4 均匀带电球体的场强

场强 E 随距离 r 的变化如图 1-4 所示。

2.“无限大”均匀带电平面的电场

有一很大的均匀带电平面，平面上的电荷密度为 σ。由电荷分布的对称性可以确定，在靠近平面的中部而距离平面不远的区域内，电场是均匀的，场强的方向与平面垂直，如图 1-5 所示。上述这一区域内的电场称为“无限大”均匀带电平面的电场。

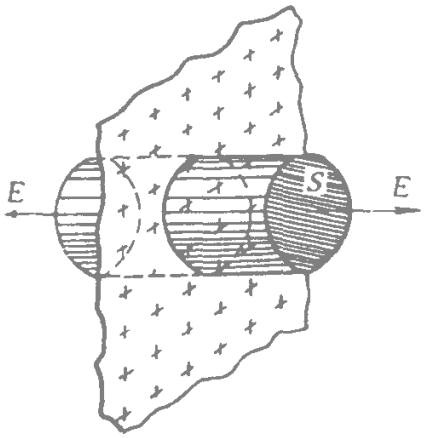


图 1-5 “无限大”均匀带电平面的电场

如作一封闭圆柱面，轴线与平面相交，底面积为 S。此时，通过两底面的电力线与底面相

交，且都是向外（设 σ 为正电荷），通过圆柱侧面的电通量为零。设 E 为两底面上的电场强度，则通过两底面的电通量为 $ES + ES$，圆柱面内所包围的总电荷为 σS。据高斯定理得：

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

得：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{1-16}$$

可见，在“无限大”均匀带电平面的电场中，各点的场强与离开平面的距离无关。

3. 两平行极板间的电场

依电场叠加原理，两平行板任一点的电场 E 是每一平板各自产生的场强 E_A 和 E_B 的矢量和。

设 A 和 B 两个平行板，板面的线度比两板间的距离大得多，如图 1-6。极板 A、B 均匀地带正、负电荷，电荷面密度为 $+\sigma$、$-\sigma$。依电场叠加原理，两平行板任一点的电场 E 是每一平板各自产生的场强 E_A、E_B 的矢量和：

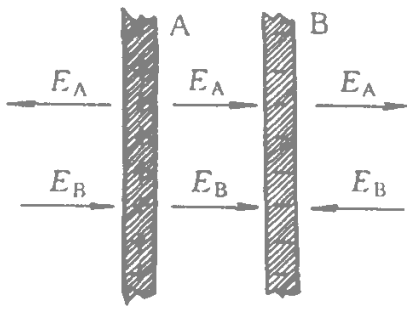


图 1-6 “无限大”均匀带电平行板的电场

$$E = E_A + E_B$$

两平行板之间，场强 E_A 和 E_B 都由 A 板（荷正电）指向 B 板（荷负电），所以任一点的场强为

$$E = E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{1-17}$$

在两平行板的外侧，E_A、E_B 是彼此反方向的，任一点的场强为

$$E = E_A - E_B = 0 \tag{1-18}$$

因此，在两块平行板均匀地分别带有等值正、负电荷时，如果

极板的线度远大于两极板间距离，则除边缘附近外，电场全部集中在两极板之间并且是匀强的。

五、电偶极子

两个大小相等的正、负电荷($+q$ 和 $-q$),相距为 L,L 较讨论中所涉及到的距离小得多。这一电荷系统就称为电偶极子。连接两电荷的直线称为电偶极子的轴线。取从负电荷到正电荷的矢径 L 的方向作轴线的正方向。电量 q 与矢径 L 的乘积定义为电矩，电矩是矢量,用 μ 表示,即

$$\mu = q \cdot L \tag{1-19}$$

电偶极子是一个重要的概念，在研究电磁波的发射与吸收、电介质的极化等问题时，都要用到电偶极子的概念。

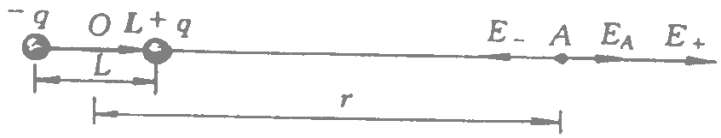


图 1-7　电偶极子轴线上的场强

可以计算电偶极子轴线的延长线上某点 A 的场强，如图 1-7 所示。

$$\begin{aligned} E_A &= E_+ + E_- \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left(r-\frac{L}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r+\frac{L}{2}\right)^2}\right] \\ &= \frac{2qrL}{4\pi\varepsilon_0 r^4\left(r-\frac{L}{2r}\right)^2\left(r+\frac{L}{2r}\right)^2} \end{aligned}$$

因为，$r \gg L$,所以

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qL}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu}{r^3} \tag{1-20}$$

电偶极子的中垂线上某点 B 的场强,如图 1-8 所示。

$$E_B = E_+\cos\alpha + E_-\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{qL}{\left(r^2+\frac{L}{4}\right)^{3/2}}\right]$$

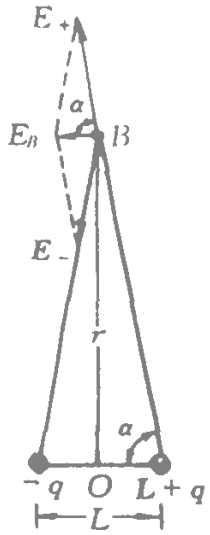


图 1-8 电偶极子中垂

由于 $r \gg L$,所以

$$E_B = \frac{qL}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mu}{r^3} \qquad (1\text{-}21)$$

六、电感应强度

将一块极小且不带电的绝缘金属板（感应板）放到静电场中，在金属板表面就会感应出电荷。对无限均匀的电介质中的电场，线上的场强当金属板的法线与该点场强 E 的方向平行时，感应板上感应电荷密度最大；当金属板的法线与该点电场强度 E 的方向垂直时，感应板上感应的电荷密度为零，且最大感应电荷密度 σ_m 与该点场强 E 的比值等于 $\varepsilon_0\varepsilon_r$，$\varepsilon_r$ 为电介质的相对介电系数，ε_0 为真空介电系数。为了表征静电场中各点具有使导体产生静电感应的特性,用电感应强度 D 表示。电场中某一点的电感应强度 D 在数值上等于感应板置于该点感应的最大电荷密度 σ_m,方向垂直于感应电荷密度最大时的感应板面，即与该点电场强度方向相同，其数学表达式为

$$D = \varepsilon_0\varepsilon_r E \qquad (1\text{-}22)$$

对于由 m 个点电荷产生的电场：

$$D = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{q_j}{r_j^3}\mathbf{r}_j \qquad (1\text{-}23)$$

由上式可知，电场中各点的电感应强度由产生电场的电荷的大小

及分布状态决定，与电场所在的电介质无关。与此相反，电场中各点的电场强度不仅与产生电场的电荷大小和分布状态有关，且与电场所在的电介质的特性有关。

七、电 势

电场中某点的电势在量值上等于单位正电荷放在该点处时的电势能，也等于单位正电荷从该点经过任意路径到无限远处时电场力所作的功。电势是标量，有正、负值之别。

在静电场中，

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\infty} E\mathrm{d}L \tag{1-24}$$

式中，$q_0 = +1$ 时，$V_a = W_a$，任意两点 a 和 b 的电势差，通常称为电压，其数学式为

$$V_a - V_b = \int_a^{\infty} E\mathrm{d}L - \int_b^{\infty} E\mathrm{d}L = \int_a^{b} E\mathrm{d}L \tag{1-25}$$

也就是说，在静电场中，a、b 两点的电势差等于单位正电荷在电场中从 a 点经过任意路径到达 b 点时电场力所作的功。所以当任意一电荷 q_0 在电场中从 a 点移至 b 点时，电场力所作的功可用电势差来表示

$$A_{ab} = q_0(V_a - V_b) \tag{1-26}$$

在计算一个有限大小的带电体所产生的电场中各点的电势时，往往选取无限远处一点的电势为零。

1. 点电荷电场中的电势

$$V_p = \frac{W_p}{q_0}, \qquad W_p = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

因此

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1-27}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2. 点电荷系电场中的电势

由电场叠加原理可知，在点电荷系 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的电场中，某点 p 的电势为

$$\begin{aligned} V_p &= \int_p^{\infty} E\mathrm{d}L + \int_b^{\infty} E_1\mathrm{d}L + \int_b^{\infty} E_2\mathrm{d}L + \cdots + \int_a^{\infty} E_n\mathrm{d}L \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_p^{\infty} E_i\mathrm{d}L \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} \end{aligned} \tag{1-28}$$

3. 带电体中的电势

对于电荷连续分布的带电体电场中某点的电势，只要将(1-28）式以积分形式表示就可以了。设 $\mathrm{d}q$ 为带电体上任一电荷元的电量，r 为 $\mathrm{d}q$ 到给定点 p 的距离，则 p 点的电势为

$$V_p = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1-29}$$

4. 电场强度与电势梯度的关系

电场中某点的电势梯度矢量，在方向上与该点处电势增加率最大的方向相同，在量值上等于沿该方向的增加率：

$$\mathrm{grad}V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n} \tag{1-30}$$

$\boldsymbol{n}$ 表示法线方向上的单位矢量。

可以证明，在电场中各点的场强大小等于该点电势梯度的大小，场强方向与电势梯度相反。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n} = -\mathrm{grad}V \tag{1-31}$$

$\mathrm{grad}V$ 读作“ V 的梯度”。如果对上式在任意的 $\mathrm{d}L$ 方向上取分量，就可以看出，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在 $\mathrm{d}L$ 方向上的分量 E_L 应等于电势梯度矢量在 $\mathrm{d}L$ 的分量的负值，即

$$E_L = -(\mathrm{grad}V)_L = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}n}\cos\varphi = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}L} \tag{1-32}$$

如果把直角坐标系中的 x、y、z 轴的方向分别取作 $\mathrm{d}L$ 的方向，则可得到场强 E 沿这三个方向的分量分别为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1-33}$$

场强 E 则可描述为

$$\begin{aligned} E &= E_x\mathrm{i} + E_y\mathrm{j} + E_z\mathrm{k} \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{k}\right) \end{aligned} \tag{1-34}$$

由上式可见，电势梯度 $\mathrm{grad}V$ 在直角坐标系中可写成：

$$\mathrm{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{k} \tag{1-35}$$

$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ 分别是电势梯度在 x、y、z 轴三个方向上的分量。或者

$$E = -\mathrm{grad}V = -\nabla V \tag{1-36}$$

式中

$$\nabla = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-37}$$

∇ 读作纳步拉(nabla)。式(1-34)表示场强与电势的关系。电势梯度 $\mathrm{grad}V$ 也是一个向量，它表示电场中电势最大变化量的大小及方向。

电场强度向量 E 在任一点的散度 $\mathrm{div}E$ 被定义为

$$\mathrm{div}E = \lim_{V_k \to 0} \frac{1}{V_k} \oint_{S_k} E\mathrm{d}S \tag{1-38}$$

式中，V_k 是小闭合面 S_k 所包围的小体积，它包含被考虑的点，$\mathrm{div}E$ 的意义可表示如下：$\mathrm{div}E$ 是在 V_k 无限小的极限情况下，由 V_k 向外穿过 S_k 的每单位体积的电通量，它只是该点坐标的标量函数。对于 E 的闭合面积分，如将闭合面 S 分成 n 个小闭合面 S_k.

则有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \sum_{k=1}^{n} V_k \left[\frac{\int_{S_k} \boldsymbol{E}\mathrm{d}L}{V_k} \right] \tag{1-39}$$

当 $n \to \infty$, $V_k \to 0$ 时，上式括号内的一项就是 E 的散度。将式(1-38)代入上式,求和转换成体积分,则

$$\oint_S \boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \int_V \nabla \boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{1-40}$$

式中，V 为闭合面 S所包围的体积，这就是散度定理。

将上式与式(1-11)相比较，即可得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-41}$$

这就是真空中高斯定理的微分形式。它表示任一点上电场强度 E 的散度等于该点电荷体密度 ρ 除以 ε_0.

在直角坐标系中，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-42}$$

5. 泊松方程和拉普拉斯方程

由式(1-34)可得：

$$\boldsymbol{E}_x = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}, \quad \boldsymbol{E}_y = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}, \quad \boldsymbol{E}_z = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}$$

将式(1-36)和以上关系式代入式（1-42）,则

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{E} &= -\mathrm{div}(\mathrm{grad}V) \\ &= -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V \\ &= -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{1-43}$$

所以

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1-44}$$

这就是真空中静电场的泊松方程。

当其处 $\rho = 0$ 时，则

$$\nabla^2 V = 0 \tag{1-45}$$

这就是拉普拉斯方程。由于

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-46}$$

因此在球坐标系中，

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{1-47}$$

在求解泊松方程和拉普拉斯方程时，必须确定相应的边界条件。

第二节　电介质的极化和介电系数

通常，人们习惯于把电介质称为绝缘体。实际上，绝缘性能只是相对的，它是电介质性能的一部分。电介质除了绝缘性能之外，其在电场作用下将产生极化并存在电场。下面我们首先考虑电介质极化的宏观特性。

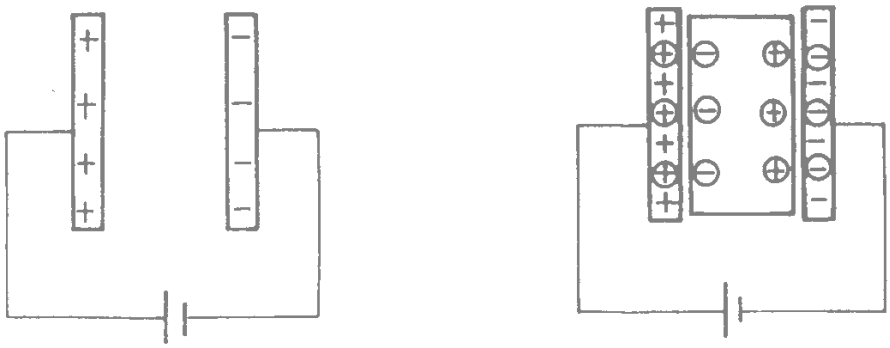
如图 1-9(a)所示，设一平板电容器，两平行极板间为真空，施加电压 V，电极板上将出现充电电荷为 Q_0、电荷面密度为 σ_0 的正负电荷。假设极板面积为 A，极间距离为 d，则极板上充电电荷面密度为

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{A} \tag{1-48}$$

此时，对这一最简单的平行板真空电容器来说，其电容量为

$$C_0 = \frac{Q_0}{V} \tag{1-49}$$

根据静电场中的高斯定理，两平行极板间任一点的场强应为



(a)真 空 时　　(b)充以电介质时

图 1-9　静电场中的电介质

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{1-50}$$

式中，ε_0 为真空介电系数。在 SI 单位制中 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m

若两平行板之间充满均匀的电介质，如图 1-9(b)所示，在外电场作用下，电介质的内部将感应出偶极矩，在与外电场垂直的电介质表面上出现与极板上电荷反号的极化电荷，即束缚电荷 σ'. 这种在外电场作用下，电介质内部沿电场方向产生感应偶极矩，在电介质表面出现极化电荷的现象称为电介质的极化。

电介质极化以后，电介质表面的极化电荷将削弱极板上的自由电荷所形成的电场，所以，由极化电荷所产生的场强被称为退极化电场。

$$E_d = -\frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \tag{1-51}$$

因此，在两平行板电极之间充以电介质以后的场强比真空中的要小。

由于在极化过程中，外施电压未变，极间距离不变，而 $V = Ed$，所以场强 E 也应维持不变。要场强 E 保持不变，只有再补充充电，以补偿极化电荷的抵消作用。此时，极板上的电荷面密度将

增加到：

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma' \tag{1-52}$$

平板电容器的电容量为

$$C = \frac{\sigma A}{V} = \frac{(\sigma_0 + \sigma')A}{V} = C_0 + \frac{\sigma' A}{C} \tag{1-53}$$

为了计及电介质极化对电容器容量变化的影响，我们定义电容器充以电介质时的电容量 C 与真空时的电容量 C_0 的比值为该电介质的介电系数，即

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \tag{1-54}$$

它是一个大于 1、无量纲的常数，是综合反映电介质极化行为的宏观物理量。

对于平行板电容器：

$$\varepsilon = (\sigma' A/Ed)/(\sigma_0 A/Ed) = \frac{\sigma_0 + \sigma'}{\sigma_0} = 1 + \frac{\sigma'}{\sigma_0} \tag{1-55}$$

将式(1-50)代入式(1-55)，可得：

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 + \sigma'}{\sigma_0} = \frac{\varepsilon_0 E + \sigma'}{\varepsilon_0 E}$$

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E \tag{1-56}$$

或者

$$\sigma' = (\varepsilon - \varepsilon_0)E \tag{1-57}$$

式中

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{1-58}$$

其中，ε 称为电介质的绝对介电系数；ε_r 称为电介质的相对介电系数。

电介质在电场作用下要产生极化，如果外加电场越强，沿电场方向取向的偶极矩越多，或者说电介质极化的程度越强。为了衡量电介质极化的强弱，用单位体积中电介质感应偶极矩的矢量和，

需要全本请访问 www.ertongbook.com