

策划编辑	陶 铮
责任编辑	董洪光
封面设计	李卫青
责任绘图	黄建英
版式设计	王艳红
责任校对	康晓燕
责任印制	

## 内容提要

本书是教育部高等教育“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和普通高等教育“十五”国家级规划教材。该书在删繁就简和引入新知识方面做出了努力,在注意电动力学基础理论的同时,又适当地引入了一些当今高新科技知识;在计算方面引导读者使用优秀的工程软件。本书中包含有丰富的启发性例题,有些例题附有“评注”,有助于读者的理解和思路的拓宽。

全书共分六章:电磁学的基本规律、稳恒电磁场、电磁波的传播、辐射场、运动带电粒子的电磁场以及狭义相对论。前五章都附有一个专题的“阅读与参考”,附录中列出了用 C 语言编写的传输线电势计算程序。

本书可作为高等学校物理类专业的教材,也可供其他有关专业的学生和教师参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

电动力学简明教程 / 钱世民主编. —北京:高等教育出版社, 2004.10

ISBN 7-04-015400-9

I. ①电… II. ①钱… III. ①电动力学—高等学校—教材 IV. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 104891 号

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100081  
总 机 010-64053663

购书热线 010-64053663  
免费咨询 010-64053663  
网 址 <http://www.gedup.com>  
<http://www.gedup.com>

经 销 新华书店北京发行所  
印 刷

开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 15.5  
字 数 360 千字

版 次 2004 年 10 月第 1 版  
印 次 2004 年 10 月第 1 次印刷  
定 价 19.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。 版权所有 侵权必究

# 前 言

本书是继《理论力学简明教程》之后为应用物理专业编写的“简明理论物理教程”的系列教材之一。随着应用物理各专业教学改革的深入,对电动力学课程的教学课时有较大的压缩,同时当今又面临科技迅猛发展新知识大量涌现的时代,也需要对本课程的内容做适当的删减和调整,并需要补充一些新知识。本书正是适应这些需要而编写的。

电动力学是描写和总结电磁学规律的基础学科,理论上发展成熟、应用广泛,几乎向一切学科渗透。适应各专业的共同需要,作者编写本教材时一方面在重视基础理论的前提下注意删繁就简,同时又注意适当补充与当今高新科技相关的知识,引导学生重视理论的应用。具体安排如下:第一章,电磁学的基本规律;第二章,稳恒电磁场;第三章,电磁波的传播;第四章,辐射场;第五章,运动带电粒子的电磁场;第六章,狭义相对论。

限于教学时数,课堂教学只可能讲授本学科最基础的内容。当今科学技术进展之迅猛不是教科书能追赶得上的。重要的是培养学生自己探求新知识的兴趣和能力的。为此本教程安排了五个课题的“阅读与参考”材料,分别安置在第一至第五章的最后。它们是:超导电性、约瑟夫森效应、液晶、激光和非线性光学。这些材料涉及当今较为前沿的研究课题,可供学生在课余自行阅读。这些课题中,有的已在技术甚至人们日常生活中广泛地应用。作为物理事业工作者,了解它们的基本原理,是有必要的。这些内容尽管已超出了本课程的教学范围,但可以开阔眼界,增加想像空间,即使不一定都能读懂,也是很有收获的。每一课题材料的末尾附有一些文献目录,以便读者查阅,读者还可以从这些资料中获得更全面的参考文献。我们鼓励学生对其一两个课题进行深入一些了解,逐步养成自己探求新知识的兴趣和习惯。

电磁现象和电磁场在当代已是如此广泛而深刻地影响着国民生产和生活,如果说在电磁场理论发展的初期人们对电磁场有某种神秘感觉的话,现在则随着大量家用电器和通信、影视设备进入寻常人家,就连普通百姓也都实实在在地感受到了电磁场的存在了。因此,我们在第一章中采用较为简洁的方式导出电磁场的规律和相应的特性,不再拘泥于对场的引入和其特性做过多的描绘。

在第二章,我们尽可能地避免与普通物理的电磁学等先行课程重复,采用以总结方式介绍求解静场的方法。删去了复变函数方法和格林函数方法,但仍保留镜像方法。这是因为几乎在同时进行的数学物理方程课程中对复变函数求解二

维电势问题已有讲述,格林函数方法具有重要的理论意义,对推动物理理论的进展有一定作用,而且在数学和物理的结合上十分完美,但它不容易直接用来求解实际问题。本课程面对的则主要是应用物理专业的学生,再三权衡之下,还是把它删去了。虽然镜像方法在普通物理电磁学中也曾介绍,但它对于理解边值问题的特性有着明显而直观的帮助作用,故而还是做了简要的介绍。在这一章中增添了一节,介绍“有限元方法”求解静电磁场的标量势和矢量势。因为这个方法是工程设计中求解复杂的稳定或不稳定场问题的有效手段。通常遇到的实际问题一般都不可能依赖解析方法求解,必须求助于计算方法。我们认为给读者介绍这方面的知识很有必要。我们利用有限元方法对方形同轴传输线内的电势边值问题求解,并在附录中列出用 BASIC 语言编写的计算程序,具体地说明这个方法的应用。这不仅具体地显示有限元方法,有利于读者掌握这个方法,还在于希望读者了解当今的工程、科学研究已摆脱了局限于个体(或较小集体)劳动的局面,而是进入社会化的时代。现今已出现了许多优秀的工程、科学计算机软件,它们是众多科技工作者、软件工程师研究和编写得出的成果。例如对包含大量方程的线性方程组求解矩阵的本征值和本征函数,历来是使科学工作者头痛的事,利用这些软件甚至只是一道命令或语句就能得到解答,许多复杂的数学、物理和工程的计算或设计,甚至某些专业的研究课题,直接应用相应软件即可得到成果。这里体现着科学研究和工程设计方式的新型社会化特征。

为了减少与光学课程的重复,在第三章中删去了基尔霍夫(即惠更斯)公式等物理光学方面的内容。电磁波(光波)在各向异性材料中传播时偏振面转动、双折射等方面的部分内容则以习题和“阅读与参考材料”中给予一定反映。此外还删去了金属谐振腔边值问题,因为这与波导管边值问题雷同,可作为习题由读者自行完成。光纤通信是现今有线宽频带信息技术的重要方面之一。在这一章里用一节的篇幅介绍这方面的知识。

第四章主要介绍电偶极辐射和以此为基础的天线辐射。

第五章在讲述同步辐射的同时,还补充介绍了同步辐射作为新光源在当今高新科技中的应用情况。

与常见的电动力学教材不同,本教程把狭义相对论放在最后一章,放在第五章讲述带电粒子与场的相互作用之后。这是为了使对场的讨论更完整,不致被割裂。实际上教材中所讨论的带电粒子基本上属于非相对论粒子,在涉及相对论粒子情形时,到最后一章中再讨论也还不迟。其次,这样做便于更灵活地掌握学时数,教学中感到学时实在紧张时,可在讲完相对论的基本原理和时空理论后,视情况在适当的课文处结束课程,而不致影响本课程的完整性。

本教程的书写风格,基本上与《理论力学简明教程》保持一致。书中包含有丰富的、紧扣课文的应用例题,贴近教学实践。例题的求解步骤一般较为详尽,便于

读者自学 一些例题后面附有“评注”,帮助读者更好地理解本例题的意图、解题的不同方法以及其他应注意的地方 援

带有单星号“\*”的小节以及用小字排印的段落可选择讲授,由教师掌握;带双星号“\*\*”的“阅读与参考”不作为讲授内容,由学生自己阅读 援 每章的公式及插图都独立编号,例题和习题的插图在编号前分别加有字母 蕴和 裁 援

本书的编写获得南京大学“~~忽~~家项目的资助,特此致谢!

由于作者水平有限,书中疏漏和错误之处在所难免,敬请读者批评指正 援

陈世民

圆园园年 圆月于南京大学

# 目 录

绪论 .....	员
第一章 电磁学的基本规律 .....	源
异夙夙 库仑定律和静电场 .....	源
(一) 库仑定律 (二) 静电场的散度 (三) 静电场的旋度	
(四) 点电荷系的电荷密度—— $\delta$ 函数	
异夙夙 恒定电流的磁场 .....	夙
(一) 毕奥 原萨伐尔定律 (二) 稳恒磁场的旋度和散度	
异夙夙 麦克斯韦方程组 .....	夙
(一) 电荷 原电流连续性方程 (二) 法拉第电磁感应定律	
(三) 真空中的麦克斯韦方程组	
异夙夙 介质中的电磁场 .....	夙
(一) 束缚电荷密度和诱导电流密度 (二) 介质中的麦克斯	
韦方程组 (三) 本构方程 (四) 电磁场的边值条件	
异夙夙 电磁场的能量和动量 .....	夙
(一) 电磁场的能量 (二) 电荷 原电流系的自能和相互作用能	
(三) 电磁场的动量和应力张量	
异夙夙 麦克斯韦方程组解的唯一性定理 .....	夙
习题 .....	夙
* * 阅读与参考 员超导电性 I ——现象、理论和应用 .....	夙
(一) 基本特性 (二) 唯象理论 (三) 微观理论 (四) I 类	
和 II 类超导体 (五) 超导体的强电应用	
第二章 稳恒电磁场 .....	夙
异夙夙 求解静电问题的方法 .....	夙
异夙夙 分离变量法 .....	夙
异夙夙 稳恒磁场的矢量势 .....	夙
异夙夙 磁标量势方法 .....	夙
* 异夙夙 有限元计算方法 .....	夙
(一) 有限基元 (二) 基函数 (三) 带权余式方法 伽罗金近似	
(四) 内部问题 (五) 外部问题 (六) 误差 (七) 方形传输线内	
电势的计算	

异圆近	电多极和磁多极展开 .....	愿
	(一) 电多极展开 (二) 磁多极展开	
异圆范	外场中小区域电荷 原电流系的能量和受到的力 .....	愿
	(一) 小区域电荷系在外场中的能量 (二) 小区域电流系在外场中的能量 (三) 外场对小区域电荷系、电流系作用的力	
	习题 .....	愿
* *	阅读与参考 圆超导电性 II ——约瑟夫森效应及其应用 .....	愿
	(一) 磁通量子 (二) 约瑟夫森效应	
	(三) 微弱磁场的测量——超导电量子干涉器	
第三章	电磁波的传播 .....	愿
异圆范	电磁波 .....	愿
	(一) 电磁场的波动方程 (二) 单色平面电磁波	
	(三) 能量密度和能流密度	
异圆圆	电磁波在介质分界面处的反射和折射 .....	愿
	(一) 反射定理和折射定理 (二) 反射波和折射波的振幅	
	(三) 全反射	
异圆范	导电介质中传播的电磁波 .....	愿
	(一) 复数波矢量 (二) 趋肤厚度和趋肤效应	
	(三) 相位和振幅 (四) 导体表面对电磁波的反射	
异圆原	电磁波在波导管中的传播 .....	愿
	(一) 矩形波导管的边值问题 (二) 横电型(TE)和横磁型(TM)电磁波 (三) 截止频率	
* 异圆缘	电磁波在光纤中的传播和通信 .....	愿
	(一) 传光原理 (二) 电磁场模式 (三) 光纤通信	
	习题 .....	愿
* *	阅读与参考 猿液晶 .....	愿
	(一) 液晶的类别 (二) 光学特性 (三) 光学效应的调制	
	(四) 液晶显示元件的基本结构	
第四章	辐射场 .....	愿
异圆范	不稳定电磁场的矢量势和标量势 .....	愿
	(一) 矢量势和标量势 (二) 规范变换和规范不变性	
	(三) 洛伦兹规范和库仑规范 (四) 推迟势	
异圆圆	电偶极辐射 .....	愿
	(一) 多极展开 (二) 电偶极辐射	
	(三) 辐射能流和辐射功率	
异圆范	天线辐射 .....	愿
	(一) 线状天线 (二) 半波天线	

习题 .....	页码
* * 阅读与参考 源激光 .....	页码
(一) 激光原理 (二) 激光器	
(三) 高斯光束	
第五章 运动带电粒子的电磁场 .....	页码
异源 运动带电粒子的势和场 .....	页码
(一) 李纳 原维谢尔势 (二) 电磁场	
异源 带电粒子加速运动时的辐射 .....	页码
(一) 辐射功率 (二) 韧致辐射	
(三) 同步辐射	
异源 电磁质量和辐射阻尼 .....	页码
(一) 电磁质量 (二) 辐射阻尼力	
(三) 光谱线的自然宽度	
异源 电磁波的散射、吸收和色散 .....	页码
(一) 散射 (二) 吸收 (三) 介质的色散	
习题 .....	页码
* * 阅读与参考 缘非线性光学 .....	页码
(一) 基本方程 (二) 二阶非线性效应	
(三) 三阶非线性效应	
第六章 狭义相对论 .....	页码
异源 迈克耳孙 原莫雷实验 .....	页码
异源 狭义相对论的基本假设 洛伦兹变换 .....	页码
(一) 基本假设和时空特性 (二) 洛伦兹变换	
(三) 速度变换公式 (四) 信号速度的极限	
异源 相对论和四维空间 .....	页码
(一) 四维时空 (二) 四维标量、矢量和张量	
异源 电动力学方程的协变表示 .....	页码
(一) 四维电流密度矢量 (二) 四维势矢量 (三) 电磁场张量	
(四) 麦克斯韦方程组的协变式 (五) 四维力密度矢量	
异源 相对论性力学 .....	页码
(一) 运动学量的四维表述 (二) 动力学方程的四维表述	
* 异源 电磁场中荷电粒子的拉格朗日函数和哈密顿函数 .....	页码
习题 .....	页码
附录 粤 物理常量和单位转换 .....	页码
(一) 电磁学中常见的物理常量 (二) 国际单位制( )	
和高斯单位制的对照和转换	
附录 月 数学关系式 .....	页码

- (一) 矢量和 $\nabla$ 算符 (二) 并矢和张量 (三)  $\delta$ 函数  
(四) 贝塞尔函数和球谐函数

附录 悦 求解方形传输线内电势的计算程序 .....	图园
主要参考书目 .....	图怨
中英文索引 .....	图园

## 绪 论

对电磁现象的研究,历来存在着超距作用和场两种观点。处理稳恒的电磁现象(静电和静磁问题)时,从这两种观点得出的结论是完全等价的。但是对于不稳定的电磁现象,场的观点则更能被人们接受。虽然这个观点也并不是十全十美的,和超距作用一样仍然会遇到点电荷自能的发散困难,即使采用量子场论方法也是如此;而按狭义相对论的要求,微观的基本粒子恰恰必须建立在点模型的基础之上。本书介绍的是经典电磁场理论,它是由麦克斯韦(1831—1879)在19世纪中叶最终完成的。他根据当时对电磁学已经掌握的实验和理论知识,其中主要包括库仑定律、毕奥(1781—1843)原萨伐尔(1791—1841)定律和法拉第电磁感应定律,加上他创造性地引入了位移电流的概念,成功地将电磁学规律统一地用麦克斯韦方程组来表示,建立了统一的电磁学理论。这个理论采用场的观点来总结电磁现象的规律,阐述和讨论电磁场运动的基本属性,以及它跟带电物质的相互作用,常被称为经典(电磁)场理论或经典电动力学。麦克斯韦的理论是建立在宏观实验的基础上的,是宏观测量的场遵循的规律。这里把电磁场看成空间连续分布的实体;通常的实体物质,则是连续分布的介质。即使在微观尺度(原子、分子尺度)上,同样认为场在空间连续分布,而把物质看成由进行着热运动或因受到电磁力和其他作用而引起的机械运动(主要表现为在平衡点附近振动)的原子、分子以及电子等经典粒子的集合。粒子的运动遵从经典力学或狭义相对论规律。虽然,在微观领域中电荷是离散的基本粒子,如电子、质子等,它们激发的场称为洛伦兹微观电磁场。可见,即使对微观领域,采用的仍然是经典理论的观点,微观场依然是经典电磁场。我们通常测量到的场,则是微观场的平均值,称做宏观电磁场;电磁场中任意点处的宏观场场量,是在该点邻近宏观上微小但为有限的体积内微观场的空间和时间平均值。宏观介质中的电磁规律便是建立在这一基础上的。

经典电磁场理论是相对于量子场论或量子电动力学而言的。我们知道,微观粒子的运动符合量子力学规律,任何物质粒子具有粒子性和波动性两方面的特性。在量子理论(量子场论)中,电磁场具有粒子性,被量子化成称为光子的能量量子;电磁场作为电磁波的集合,则是光子波动性的表现。相对于实体的物质粒子,在微观尺度内显示出波动性,需用相应的德布罗意(1892—1987)波描写。由此可见,原则上经典场论并不适宜于处理微观电磁现象。虽然如此,只要粒子的活动尺度远较它的德布罗意波长要大,即可视为经典粒子;电磁波波长远大于所讨论

的微观粒子的德布罗意波波长,可以采用连续分布的经典场观念。确切些说如果微观粒子的行为主要表现为粒子性,而电磁场主要表现为波动性,那么实践表明即使在微观领域中,采用经典场论处理场和物质粒子的相互作用问题,仍能得出一些具有参考价值的结果。

麦克斯韦电磁场理论的建立是人类科学研究进展的里程碑。它揭示了电磁波的存在,并进一步表明电磁波和光波的一致性,因而电磁学理论也是光学理论的基础。麦克斯韦电磁理论为爱因斯坦(1879-1955)提供了建立狭义相对论的基础。麦克斯韦方程组给出了电磁波(光波)在真空中的传播速度,这在19世纪末、20世纪初引起物理学家们的极大注意,从实验和理论上广泛地探索参照物和传播环境对光速的影响。在此基础上,洛伦兹(1853-1928)和庞加莱(1859-1942)就曾认定麦克斯韦方程组在不同参考坐标系中的不变性。爱因斯坦于1905年提出了著名的相对性原理和光速不变原理并建立了狭义相对论。狭义相对论的确立使人们对时间和空间概念具有更深层次认识,引起时空观念的飞跃。同时,对电和磁的认识也更完美了。虽然在麦克斯韦理论中已反映了电和磁的相互转变关系,而狭义相对论则证实了电场和磁场的统一性,它们是同一实在的两种表现形式。

自建立麦克斯韦经典电磁场理论的一个多世纪来,至今这个理论依然是处理所有宏观电磁学问题的基础,作为系统理论的本身,至今它已是一门非常成熟的学科。即便如此,它依然是在不断发展着的。20世纪50年代后期,在观察荷电粒子与磁场相互作用的量子力学现象中,霍尔效应的发现,显示出电、磁场强度不足以描写电磁场,而矢量势  $\mathbf{A}$  和标量势  $\phi$  也是描写电磁场的实在物理量。在此之前,无论经典电磁理论还是量子场理论都曾经认为标量势和矢量势只是人们引进的辅助量。此外,在电磁相互作用和弱相互作用之间的统一性研究方面也有进展。后电磁理论的发展,除在本学科更深层次上进行外,将更多地与其他学科的交叉学科之中。可以说,电磁理论是向其他学科渗透最为广泛的学科之一。20世纪中叶,出现了激光这一新型光源,由于它发射的光束能量集中、波长短,在与物质相互作用中出现了许多新现象,从此开辟了电磁场研究的新领域——光子学。如激光通过介质时产生了值得注意的非线性效应而成为非线性光学分支学科。

一百多年来,电磁学理论推动科学技术的进步,成果之大无论怎样高的评价都不为过分。如上所述,狭义相对论的建立这样物理学划时代的进展,是与麦克斯韦电磁理论密不可分的。不仅物理学,其他各个学科,电磁理论也都扮演着基本而又十分重要的角色。促进技术进步、经济发展和提高人类生活质量方面的作用更是无法估量。每一个电、磁规律的发现,人们都及时而有效地利用。关于与库仑(1731-1806)定律建立的同时,人们就开展了电化学的研究,制成电池,发明了

电解和电镀工艺;毕奥(原萨伐尔定律)和安培(安培定律)定律使人们知道电流激发磁性的道理,用来制造电话和电报等通讯工具;由于法拉第(云第云第)电磁感应定律的发现,人们便造出了发电机和电动机;麦克斯韦预言,并经赫兹(云第云第)实验证实了电磁波后,通信和电子学技术便突飞猛进地发展;许多新材料,如铁磁、铁电材料、半导体以及超导电材料的发现和利用,也都是电磁学跟其他学科结合的产物;激光的出现,导致利用光学纤维引导激光束进行通信(光纤通信)的技术;利用激光在晶体和液晶中的传播行为,可能设计出许多光子器件来;云第云第出现了转变温度达到云第云第以上的高温超导体,预期不远的将来,超导电技术将得到广泛地应用,影响科学技术进步和人们的日常生活;电磁场理论这样的物理学基本理论,是真正的生产力!

电动力学作为一门理论物理的基础课程,是用数学语言来描述和总结电磁现象和规律的;主要应用的数学是矢量场的解析运算和数学物理偏微分方程的求解;同时,在电动力学中也发展和丰富了一些数学方法,例如 $\delta$ 函数的引入、多极展开、格林(云第云第)函数方法等,不仅在求解电磁学问题中非常有用,在其他学科中也常会遇到;这些方法使物理和数学如此完美地糅合在一起,实在是精美的艺术!像这样人类智慧的结晶,是永远也不可能过时的。

在实际应用和工程技术中出现的众多电磁学课题中,只有很少问题能用解析数学的方法求解;虽然这些解析数学可解的问题,在电磁学中占有很重要的地位,对人们理解和掌握电磁学的概念和规律是不可缺少的;但是大量涌现的实际问题,解析数学则无能为力,必须采用计算方法求解;现在已进入了计算机时代,品质优良的计算机已很普及,提供了求解复杂电磁学问题的技术条件;同时也出现了像有限元方法等有效的计算方法;相信计算方法在科学研究,特别是对实际问题的研究中将起着越来越重要的作用。

# 第一章 电磁学的基本规律

早在远古时代人们便知道摩擦生电现象,某些物体摩擦后可以吸引轻小物体,这种导致物体间能相互吸引或排斥的原因,归结为物体上带有电荷,不过对电磁现象进行真正的定性研究则是从18世纪后期开始的,经历了一百多年,直至1861年麦克斯韦发表了一篇关于电磁场的动力学理论的文章,总结了电磁现象的基本规律。

本章介绍的电磁学基本规律就是以麦克斯韦的电磁场动力学理论为基础的,这个理论建筑在一些基本实验和电磁场概念的基础上,人们通过对电磁现象的实践、应用,总结出了它的基本规律并已深深地体会到电磁场是物理的实体,是客观存在的物质,这一章里除了介绍麦克斯韦经典电磁理论的主要规律外,还要讨论电磁场的物质属性以及介质存在时对电磁场的影响,为后面各章节处理较为具体的电磁学问题做好必要的准备。

## 第一节 库仑定律和静电场

电磁现象的定量研究是从库仑(1733—1806)观察静止的荷电物体之间的力开始的,在此基础上建立了库仑定律,后又从场的观点总结成更理性的认识——高斯定理,在这一节里,从静电荷的库仑实验定律出发,讨论静电现象及静电场的特性。

### (一) 库仑定律

真空中,电荷为 $q$ 的静止点电荷,受到另一电荷是 $Q$ 的静止点电荷的作用力,根据库仑的观察及后人的实验和推理,可表示成如下的库仑定律:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \quad (1.1)$$

式中 $r$ 是点电荷 $q$ 相对于点电荷 $Q$ 的位置矢量; $\epsilon_0$ 称为真空介电常量,是由于在已给定了力的单位是牛顿和电荷单位是库仑的条件下,并使今后得到的常用公式形式简便,而引入的比例常量,前面所说的点电荷,是一个理想化的概念,事实上如果一个电荷,其电荷分布范围的尺度与讨论的空间范围相比是如此之小,以至可以不考虑具体的电荷分布状况,那么这个电荷就可看做点电荷。

到目前为止,人们知道世界上存在两种不同类型的电荷:正电荷和负电荷。两个同种电荷相互排斥,异种电荷相互吸引,作用力的方向总是沿着两点电荷的连线。如库仑定律表示的那样,点电荷间的作用力具有有心力的特性。

如果在点电荷周围的不同位置处,分别存在由若干点电荷  $q_1, q_2, q_3, \dots$  组成的电荷系,则电荷  $q$  受其中任何一个点电荷的作用力,都符合库仑定律式(1.1),好像其他电荷并不存在;电荷系对  $q$  作用的总力,则是各点电荷对  $q$  作用力的矢量和,这是静电力的叠加特性:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{q_2 q}{r_{22}^2} \hat{r}_{22} + \frac{q_3 q}{r_{32}^2} \hat{r}_{32} + \dots \right) \quad (1.2)$$

这里  $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3, \dots$  分别是  $q_1, q_2, q_3, \dots$  至  $q$  的位置矢量。

最初,点电荷之间的力被看成是一种超距作用,后来引进了另一种观点:认为电荷之间的力是通过电场作用的。一个孤单的电荷并不受到力的作用,但放在另一个电荷附近却受到力的作用,这可用电荷激发了电场来说明。任何电荷在其周围空间都会激发电场,电荷是电场的源,称为电场的源电荷。这种由静止电荷激发的电场称为静电场。一方面,不管电场是由什么样的源电荷激发的,任何电荷置于电场中都会受到电场的力作用。人的感觉器官一般不能直接感觉到电场的存在,但可以设想通过试探电荷来测试。试探电荷是电荷很小的点电荷。电荷很小是为了不致影响电场的源电荷分布。根据库仑定律,作用在试探电荷上的力与试探电荷的电荷量成正比。从电场观点看,电场对试探电荷作用的力正比于试探电荷的电荷量。由此,可合理地把作用在单位电荷上的力,作为试探电荷所在位置处电场的量度,称为电场强度。必须指出,电场是由源电荷激发的,跟是否存在试探电荷无关。这样,电场中某点电荷受到的力可写为

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (1.3)$$

电场强度则定义为

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.4)$$

电场强度是矢量,一般来说在不同位置处的电场强度不同,是场点坐标  $r$  的函数,在电场中每一点都可画出该处的电场强度矢量,电场是矢量场。

对于静电场,公式(1.3)实际上可看成库仑定律式(1.1)的另一种表示形式,虽然它们基于不同的观点。前者是从场的观点来说明电荷受力,后者则认为是电荷间的超距作用。不管采用何种观点,它们都反映的是点电荷  $q$  受到的同一个力。比较式(1.3)和式(1.1)即可知道点电荷  $q$  激发的电场,其电场强度应为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (1.5)$$

式中  $\hat{r}$  是相对于点电荷  $q$  的场点位置矢量。在静电情形下,由电场观点和超距

观点得到的结果是完全一致的,电场观点只是提供对静电力的另一种解释罢了,然而最初只是为了说明点电荷间的作用力,形式地引进的电场概念,但在以后的研究中表明,这一引进竟是无形中揭示了“电场”这一真实的物理实体。

无数事例表明静电力具有线性叠加的特性,从而电场也存在这样的特性。搬运电荷为不连续分布的点电荷系时,总电场强度是各点电荷电场强度的线性叠加;对连续分布的电荷系,则可用积分计算:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{r_{\alpha}^2} \vec{e}_{\alpha} \quad (1.10) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \vec{e} d\tau' \quad (1.11) \end{aligned}$$

式中  $\vec{r}$  和  $\vec{r}'$  分别是场点(电场中的空间点)矢量和点电荷  $q_{\alpha}$  的位置矢量,源电荷分布的位置矢量简称源点位矢,以  $\vec{r}$  表示,  $\rho(\vec{r}')$  是源电荷的体电荷密度,

$$r = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad r_{\alpha} = |\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}|$$

分别是源点至场点的相对位矢及其长度。除非特别声明,我们都将采用这里所示的位矢符号和式(1.11)一样,由式(1.11)表示的电场强度,只适用于静电场。至于运动电荷,不稳定的电荷分布或由电磁感应激发的电场,以后会看到不能由此式计算。

## (二) 静电场的散度

对任一个物理矢量场,都要讨论它的“发散性”和“涡旋性”,因为它们是多重要物理特性的体现。任一矢量场的“发散(汇聚)性”可以用一个称为散度的数学量来描写。电场强度在场点  $\vec{r}$  处的散度定义为

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}}{\Delta\tau} \quad (1.12)$$

式中的面积分是穿过包围  $\vec{r}$  点闭合面  $\Sigma$  的电通量,  $\Delta\tau$  是包围的体积,通量为正表明有纯电通量自  $\Sigma$  面内向外发散,为负则存在纯电通量向  $\Sigma$  面内汇聚。通过闭合面  $\Sigma$  的电通量与体积  $\Delta\tau$  的比值,只能描写场点  $\vec{r}$  附近  $\Delta\tau$  区域的电场平均散度。比值在  $\Delta\tau \rightarrow 0$  的极限才确切地表示电场在场点  $\vec{r}$  处的散度。数学上,即是散度的微分表示。采用直角坐标系时

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &= \nabla \cdot \vec{E} \quad (1.13) \end{aligned}$$

式中

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

这是一个对其后函数做微分运算的矢量算符。附录 1 中列出了此算符在其他常用坐标系中的表示式和一些重要的运算关系。这个算符在电动力学以及理论物理的数学运算中经常用到，读者应当熟悉并熟练地应用。

下面具体地讨论静电场的散度问题，并由此导出电场的一条重要规律。

还是从点电荷的电场着手。在点电荷  $q$  的电场中，做一任意闭合曲面  $S$ ，则由电场表达式 (1.10)，容易算得通过  $S$  的电通量：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \oint_S \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{q}{\epsilon_0} \oint_S \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (1.11)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0}, & S \text{ 包围 } q \\ 0, & S \text{ 不包围 } q \end{cases} \quad (1.12)$$

式中  $d\Omega = \frac{dS \cos \gamma}{r^2}$  是闭合面上的面积元  $dS$  对于电荷点所张的立体角。如图 1.1 所示，如果闭合面包围点电荷  $q$ ，则对于  $q$  的立体角积分 (总立体角) 为  $4\pi$ ；要是  $q$  在闭合面的外部，则对于电荷点的总立体角是  $0$ 。应用叠加原理，容易把这个结论推广到源电荷为多个分离电荷或电荷连续分布的情形。对于按电荷密度  $\rho$  分布的连续电荷系，则

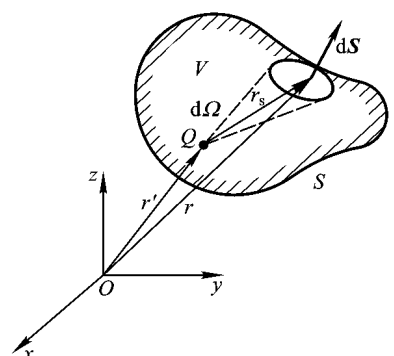


图 1.1

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{r}') dV' \quad (1.13)$$

上式右方是由闭合曲面  $S$  包围的体积  $V$  内的总电荷。这个关系式称为高斯定理，它表达了电荷是静电场源的这一事实。还可以将这个定理改写成微分形式。如果取  $dV$  为包围场点  $P$  则周围微小区域  $dV$  的闭合面，以至  $dV$  内各点的电荷密度可用  $\rho$  表示，则由式 (1.13)、式 (1.12) 即可得  $P$  处电场的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (1.14)$$

即是高斯定理式(1.1.1)的微分形式;而把式(1.1.1)称为高斯定理的积分表示①。虽然高斯定理式(1.1.1)或式(1.1.2)是直接由静电场的表达式(1.1.1)导出的,但实践表明同样适用于随时间变化的不稳定电场情形,它是电磁场的基本规律之一。

### (三) 静电场的旋度

前面曾经指出电荷受到的静电力具有有心力的特征,因而可预期静电力场必存在势函数。事实上,对位于源点坐标为  $\mathbf{r}'$  的点电荷  $q$ , 它的电场就可表示为一标量函数的负梯度:

$$\mathbf{E} = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

这里需注意,微分算符  $\nabla$  的运算是场点  $\mathbf{r}$  进行的,与源点位矢  $\mathbf{r}'$  无关。叠加定理,多个分离点电荷的电场同样可写成标量函数的负梯度:

$$\mathbf{E} = -\nabla \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha}|} \right) = -\nabla \phi \quad (1.1.3)$$

这里函数

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\alpha}|} \quad (1.1.4)$$

称做静电势或标量势。推广到电荷密度  $\rho(\mathbf{r})$  连续分布的电荷系情形,静电势表达式是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (1.1.5)$$

积分是对整个空间进行的②。式(1.1.4)和式(1.1.5)中的  $\phi_0$  是任意常数,由选定标量势的零点确定。若电荷分布在有限空间内,则分别在式(1.1.4)和式(1.1.5)中的

① 事实上,利用著名的数学高斯定理[见附录(1.1.1)]就可由(1.1.1)导出它的微分形式(1.1.2)来。由数学中的高斯定理及(1.1.1)式,

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{r}) d\tau$$

注意上式右边关于电荷密度  $\rho$  的体积分变量已将位矢  $\mathbf{r}$  改成  $\mathbf{r}'$ 。由此得

$$\int_{\Sigma} \left( \nabla \cdot \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) d\tau = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

由于闭合面  $\Sigma$  及其包围的体积是任意的,因而上式的被积函数应等于  $\nabla \cdot \mathbf{E}$

$$\nabla \cdot \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

② 实际上仅对分布有电荷的空间进行积分,在没有电荷的地方电荷密度  $\rho = 0$ 。