21 世纪高等院校教材

# 电磁场与电磁波


焦其祥　主　编

李书芳　李　莉
张阳安　高泽华　编

顾畹仪　主　审



科学出版社

北　京

# 内 容 简 介

本书参考了国内外较好的同类教科书，并在总结本书第一、二版经验的基础上重新编写而成。全书共分 11 章，主要讲述了电磁场与电磁波的基本理论和计算方法。本书内容丰富，重点突出，在叙述上由浅入深、循序渐进，强调数学与物理概念的结合，思路清晰、适应面广，对一些典型问题和例题采用不同的分析方法，做到分析思路的多样性。书中配有近百道例题，以帮助学生分析问题，引导学生自学。

本书可作为高等院校无线电、电子、通信以及微波专业的本科教材，也可作为有关教学和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

---

电磁场与电磁波/焦其祥主编.—北京:科学出版社,2004

(21 世纪高等院校教材)
ISBN 7-03-013752-3

Ⅰ.电… Ⅱ.焦… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061540 号

---

责任编辑:匡 敏 姚庆爽/ 责任校对:钟 洋
责任印制:安春生/ 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http:// www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004 年 8 月第一次印刷 印张:28 1/4
印数:1—3 500 字数:552 000

定价:32.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

# 前　言

电磁场与电磁波是一门重要的专业基础学科。它深刻地揭示了电磁现象的基本规律，其理论性、系统性强，逻辑严谨。学习这门课程不仅能加深对电磁规律的进一步理解，而且有助于培养正确的思维方式，提高分析问题的能力。

就培养学生分析问题的能力而论，本书强调了“分析方法的多样性”。科学的分析方法是工科大学教学的重要内容。“分析方法的多样性”是指对一些问题的分析，既有“简明扼要”的分析方法，又有“较多借重数学”的分析方法，或者是从不同角度、不同概念形成的分析方法。这样做不仅给具有学习潜力的学生提供了进一步探索的空间，对不同专业、不同学时的授课而言，也为教师提供了较多的选择余地。这种考虑合适否，期待同行和读者指教。

电磁场与电磁波是微波、天线、电波传播、光纤传输等专门学科的基本理论，这是大家所熟知的。实际上电磁场的应用已远远超出了这个范围。接触过高频电路的人，都有一个重要的经验：所用电阻、电感、电容的引线越短越好。因为这些引线会引入分布电感、电容、电阻，从而改变元件的参量，造成电路指标下降。这种“分布参量”的概念，说到底还是电磁场问题，可以用电磁场的理论去分析、处理。

在高速集成电路中，在超小、超薄的多层介质板电路中，更是充满了电磁场的问题。诸如相邻电路之间的耦合、多线之间的耦合、不合理的接地（位置不当或接地不理想）所引起的耦合，以及由它们所造成的阻抗改变、电路失配，这些问题轻则影响电路质量，重则造成工作失常。产生这些问题的重要原因是设计者缺乏电磁场的基本知识，不知道应该从场的角度去分析和处理这些问题。

就知识结构而论，电磁场理论应该是电子、通信类专业的大学生所必备的、不可或缺的部分。科学技术的不断发展，将会进一步显示它的重要性。

电磁场与电磁波和其他不少学科具有相通之处，如重力场、应力场等都存在某些与电磁场性质相像的地方，存在着某些相同的数学模型。电磁波与其他学科领域的波（如声波等）也存在着不少的相似之处。学习电磁场理论有助于学生对不同学科的融合和借鉴。

电磁场与电磁波作为一些学科领域的交叉点，衍生出众多的学科门类，诸如

生物医学、高速集成电路、通信类学科等。通信类学科又有移动通信、卫星通信、光纤通信等。除通信之外还有雷达、无线广播、电视等学科，它们无一不是以电磁波携带信息的方式来实现的。

就培养创新能力而论，作为一名合格的电子、通信类专业的大学生，应该学好电磁场理论。因为这门课处于学科交叉点，学习它有助于提高学生对交叉边缘学科的介入和开创能力。

本教材的内容是参照国家教育部电磁场理论指导组制定的教学大纲，参考国内外的优秀教材，以及作者多年的教学经验而确定的。书中配有不少例题，以期帮助读者提高分析问题的能力。

全书共分 11 章，其中 4 章及习题由六位具有博士学位的中青年教师编写。第 1、9、10、11 章依次由高泽华、张阳安、李书芳、李莉编写；习题和答案由王亚峰、张欣编写，第 2 至 8 章由焦其祥编写。全书由焦其祥主编和统稿。全书承博士生导师顾畹仪教授审阅，在此表示衷心的感谢；感谢王华芝、章茂林教授对本书架构和内容所提出的宝贵意见；感谢在读博士、硕士和本科的同学在书稿整理、绘图等工作中所给予的大力支持；感谢北京邮电大学电信工程学院的领导、无线通信中心、光通信中心的领导和同行们所给予的帮助和支持。

感谢科学出版社匡敏编辑为保证本书质量所付出的辛勤劳动。

作　者

2004. 5

# 常用参量与常用方程

## 主 要 符 号

| 符　号 | 名　称 | 单　位 |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{E}$ | 电场强度 | V/ m（伏特/ 米） |
| $\boldsymbol{H}$ | 磁场强度 | A/ m（安培/ 米） |
| $\boldsymbol{D}$ | 电位移（电通量密度） | C/ $m^2$（安培/ 米$^2$） |
| $\boldsymbol{B}$ | 磁感应强度（磁通量密度） | T（特斯拉） |
| ¦Õ | 电位 | V（伏特） |
| ¦·$_e$ | 电通量 | C（库仑） |
| ¦µ | 磁通量 | Wb（韦伯） |
| $\boldsymbol{A}$ | 矢量磁位 | Wb/ m（韦伯/ 米） |
| ¦Ñ | 线电荷密度 | C/ m（库仑/ 米） |
| ¦Ñ$_S$ | 面电荷密度 | C/ $m^2$（库仑/ 米$^2$） |
| ¦Ñ | 体电荷密度 | C/ $m^3$（库仑/ 米$^3$） |
| $n$ | 折射率 | |
| $R$ | 反射系数 | |
| $T$ | 传输系数、折射系数 | |
| $C_0$ | 单位长度电容 | F/ m（法拉/ 米） |
| $L_0$ | 单位长度电感 | H/ m（亨利/ 米） |
| $\boldsymbol{F}$ | 力 | N（牛顿） |
| $\boldsymbol{T}$ | 力矩 | N · m（牛顿 · 米） |
| $w_e$ | 电场能量密度 | J/ $m^3$（焦耳/ 米$^3$） |
| $w_m$ | 磁场能量密度 | J/ $m^3$（焦耳/ 米$^3$） |
| $\boldsymbol{S}$ | 功率密度（坡印廷矢量） | W/ $m^2$（瓦特/ 米$^2$） |
| $\boldsymbol{J}_S$ | 面电流密度 | A/ m（安培/ 米） |
| $\boldsymbol{J}$ | 电流密度 | A/ $m^2$（安培/ 米$^2$） |
| ¦Ã | 传播常数 | 1/ m（1/ 米） |
| ¦Á | 衰减常数 | Np/ m，dB/ m（奈培/ 米，分贝/ 米） |
| ¦Â | 相移常数 | rad/ m（弧度/ 米） |
| $k$ | 波数，TEM 相移常数 | rad/ m（弧度/ 米） |
| ¦Ç | TEM 波波阻抗 | ¦¸（欧姆） |
| ¦Ç$_0$ | 真空中 TEM 波波阻抗 | ¦¸（欧姆） |
| $Z_{W(TE)}$ | TE 波波阻抗 | ¦¸（欧姆） |

续表

| 符　号 | 名　称 | 单　位 |
|---|---|---|
| $Z_{W(TM)}$ | TM 波波阻抗 | Ω（欧姆） |
| $Z_C$ | 特性阻抗 | Ω（欧姆） |
| $Z_S$ | 表面阻抗 | Ω（欧姆） |
| $R_S$ | 表面电阻 | Ω（欧姆） |
| $X_S$ | 表面电抗 | Ω（欧姆） |
| $R_r$ | 辐射电阻 | Ω（欧姆） |
| $\lambda$ | 波长 | m（米） |
| $\lambda_0$ | 真空中波长 | m（米） |
| $\lambda_g$ | 波导波长 | m（米） |
| $\lambda_c$ | 截止波长 | m（米） |
| $\dot{\varepsilon}$ | 复数介电常数 | |
| $\boldsymbol{p}$ | 电偶极矩 | C · m（库仑 · 米） |
| $\boldsymbol{P}_m$ | 磁偶极矩 | A · m$^2$（安培 · 米$^2$） |

# 常 用 常 数

| | |
|---|---|
| $c \approx 3\times10^8$ m/s | 光速（真空） |
| $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}$ F/m | 介电常量（真空） |
| $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m | 磁导率（真空） |
| $\sigma_{银} = 6.17\times10^7$ S/m | 电导率（银） |
| $\sigma_{铜} = 5.80\times10^7$ S/m | 电导率（铜） |
| $\sigma_{金} = 4.10\times10^7$ S/m | 电导率（金） |
| $\sigma_{铝} = 3.54\times10^7$ S/m | 电导率（铝） |
| $\sigma_{黄铜} = 1.57\times10^7$ S/m | 电导率（黄铜） |
| $\sigma_{铁} = 1.00\times10^7$ S/m | 电导率（铁） |
| $e = -1.602\times10^{-19}$ C | 电子的电荷量 |
| $m_e = 9.107\times10^{-31}$ kg | 电子的静止质量 |
| $R_e = 2.81\times10^{-15}$ m | 电子半径 |
| $m_p = 1.673\times10^{-27}$ kg | 质子的静止质量 |
| $6.6237\times10^{-34}$ J · s（焦耳 · 秒） | 普朗克常数 |
| $1.38\times10^{-23}$ J/K（焦耳/绝对温度） | 玻尔兹曼常数 |

# 梯度、散度、旋度及拉普拉斯方程表示式

## 直角坐标系（$x$，$y$，$z$）

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

## 圆柱坐标系（$r$，$\phi$，$z$）

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

## 球坐标系（$r$，$\theta$，$\phi$）

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\phi) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\phi}\right) + \boldsymbol{e}_\theta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\phi)\right)$$
$$+ \boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right)$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}$$

# 第一章　矢量分析

## 1.1　标量场与矢量场

### 1.1.1　标量

仅由数量确定的物理量,或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量,称为标量。若标量与坐标系的选择无关,则称为绝对标量。如任何实数、质量、长度、面积、时间、温度、电压、电荷量、电流、能量等。

### 1.1.2　矢量

用数值(大小)和方向表示的物理量称为矢量(或向量)。矢量用黑体 $\boldsymbol{a}$ 表示(也可用有向线段 $\boldsymbol{OA}$ 来表示),数值大小用 $a$ 表示,称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模,记为:

$$|\boldsymbol{a}| = a$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用三维空间中有方向的线段表示(如图 1.1),有向线段的长度表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模,箭头指向表示矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向。

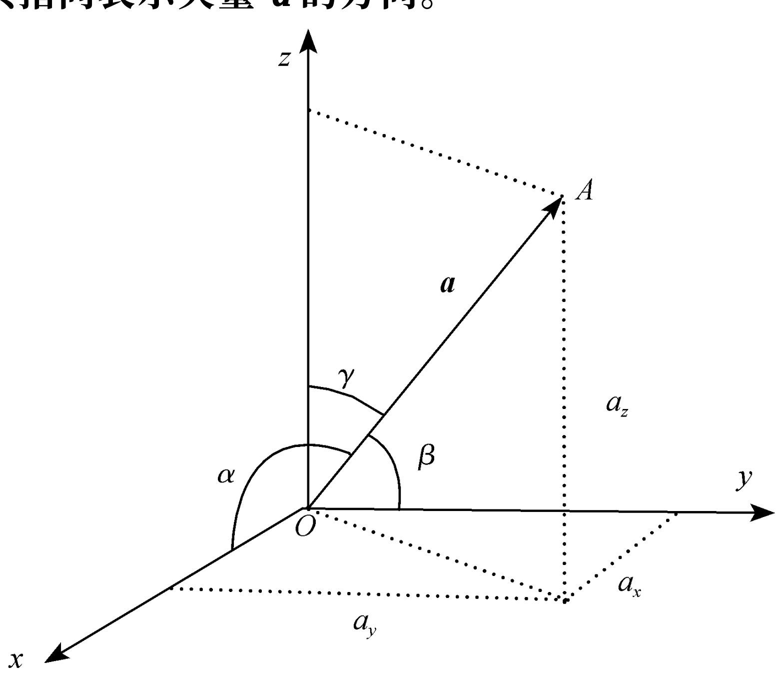


图 1.1　直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{a}$

由图看出矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的正向所成的夹角 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，由图可见：

$$a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ a_z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

因此方向余弦满足：

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

模为 1 的矢量称为单位矢量，单位矢量用 $\boldsymbol{e}$ 来表示。此处“1”含有 1 单位的意思，也就是说，给定单位(如米)后，“1”就是 1 单位(1 米)。与模 $a \neq 0$ 矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同的单位矢量记为

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/a$$

与直角坐标系中 $x$、$y$、$z$ 轴的正方向一致的单位矢量称为基本单位矢量，分别用 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$ 表示。矢量 $\boldsymbol{a}$ 还可按基本单位矢量分解为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$$

起点和终点重合的矢量称为零矢量，零矢量长度为零，方向是任意的。如果两个矢量模相等方向相反，这两个矢量互称相反矢量。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的相反矢量记为 $-\boldsymbol{a}$。

两个矢量如果满足：1)位于同一直线上或相互平行，并且方向相同；2)模的大小相等，则这两个矢量即为相等的矢量。

### 1.1.3　标量场

如果某个标量 $\varphi$ 是空间位置和时间的函数，即它可以用函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 表示，其中 $x, y, z$ 表示空间位置，$t$ 表示时间。若标量函数的值域是一个无穷集合，这个无穷集合即表示这个标量的场(简称标量场)。例如，空间中温度分布是一个温度场 $T(x, y, z, t)$，电位分布是一个电位场 $\varphi(x, y, z, t)$。

如果标量场与时间无关，则 $\varphi(x, y, z)$ 表示静态场或稳态场，如果标量场与时间有关，则 $\varphi(x, y, z, t)$ 表示动态场或时变场。

### 1.1.4　矢量场

如果某个矢量 $\boldsymbol{F}$ 是空间位置和时间的函数，即它可以用函数 $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ 表示，其中 $x, y, z$ 表示空间位置矢量，$t$ 表示时间。若矢量函数的值域是一个无穷集合，这个无穷集合即表示这个矢量的场(简称矢量场)。例如，空间中电场强度分布是一个电场矢量 $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$。

在三维空间中一个矢量可以用三维坐标的三个分量表示，这三个分量去掉方向即为三个标量，因此一个矢量场可以分解为三个分量场(标量场)表示。矢量可以写为：

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\boldsymbol{e}_x + F_y(x, y, z)\boldsymbol{e}_y + F_z(x, y, z)\boldsymbol{e}_z$$

其中 $F_x(x, y, z)$，$F_y(x, y, z)$ 和 $F_z(x, y, z)$ 分别对应三个标量场。

# 1.2　矢量的运算(加法、点乘、叉乘)

## 1.2.1　矢量的加法

在物理学中我们知道,两个力或两个速度均能合成,合成后得到合力或合速度,同时合力或合速度均遵循平行四边形法则,由此我们定义矢量加法如下:

设有两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(如图 1.2),它们的起点为 $O$,以矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形,平行四边形的对角线 $OC$ 对应的矢量 $\boldsymbol{c}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。这个规则称为矢量相加的平行四边形法则。求矢量和的运算称为矢量的加法。

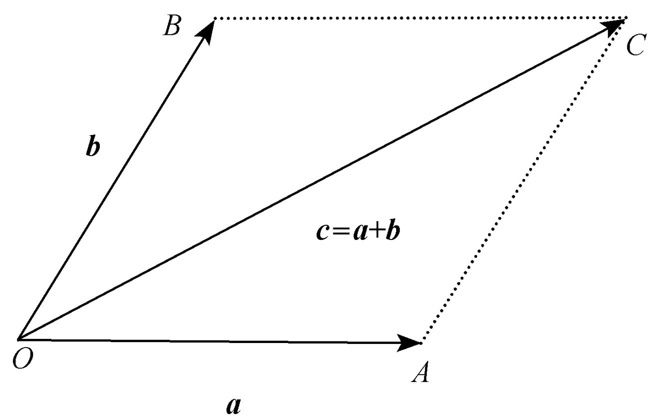


图 1.2　矢量相加的平行四边形法则

矢量的加法还可用基本单位矢量分解表达式表示:

若 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z$ 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{e}_x+(a_y+b_y)\boldsymbol{e}_y+(a_z+b_z)\boldsymbol{e}_z$$

由上式可见,矢量的加法的坐标分量是两矢量对应坐标分量之和。

矢量的减法是矢量加法的逆运算,设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b})$$

矢量的加法满足加法的交换律和结合律,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

## 1.2.2　矢量的数乘(矢量与数的乘法)

实数 $\lambda$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积定义为实数 $\lambda$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘,结果也是一个矢量,写成 $\lambda\boldsymbol{a}$,其模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

其方向为

当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=0$。

当 $\lambda=-1$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反向矢量。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘按基本单位矢量分解表达式表示为:

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{e}_x+\lambda a_y\boldsymbol{e}_y+\lambda a_z\boldsymbol{e}_z$$

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是矢量,$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 是标量,则

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{a}$$
$$\lambda_1(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_1 \boldsymbol{b}$$

### 1.2.3 矢量的标量积(数量积、内积)

在物理学中知道,物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下产生位移 $\boldsymbol{l}$,若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角为 $\theta$,则力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所作的功为:

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{l}|\cos\theta$$

根据上述运算我们定义矢量的一种乘法运算:设有两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的夹角为 $\theta$,定义矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,等于这两个矢量的模与其夹角的余弦的乘积,即:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

矢量的标量积又称为数量积、点积或内积。

根据以上定义,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 可以表示为:$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{l}$

矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的标量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 按基本单位矢量分解表达式表示为:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

由上式可见,矢量的标量积等于两矢量对应坐标分量的乘积之和。

根据 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,所以有

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

考虑式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,所以

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

标量积满足如下关系

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\lambda$$

### 1.2.4 矢量的矢量积(叉积、外积)

在研究物体的转动时,有一个经常用到的物理量是力矩,设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于某物体的点 $A$,对于该物体上的支点 $O$ 来说,力 $\boldsymbol{F}$ 产生了一个力矩 $\boldsymbol{T}$,其大小等于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小乘以点 $O$ 到 $\boldsymbol{F}$ 的作用线的距离,如图 1.3 设力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 的夹角是 $\theta$,所以力矩为:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{F}$$

力矩是一个矢量,他的方向垂直于 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{OA}$ 所确定的平面,且 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 三者的方向遵循右手法则,即当右手的四指从 $\boldsymbol{OA}$ 朝手心方向以不超过 $\pi$ 的转角转向

**F**时,竖起的大拇指的指向即为 **T** 的方向。

根据上述运算我们定义矢量的另一种乘法运算:设有两个矢量 **a** 和 **b**,它们的夹角为¦È,定义矢量 **a** 和 **b** 的矢量积为一个矢量 **c**,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,其大小等于这两个矢量的模与其夹角的正弦的乘积,即:

$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin$$¦È

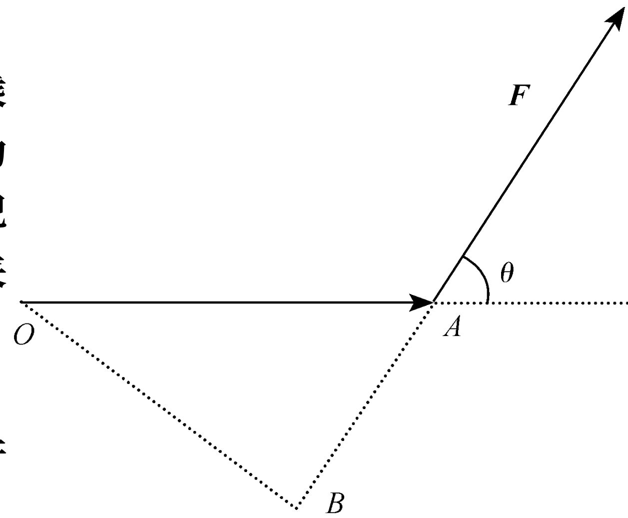

图 1.3　力与力矩

矢量 **c** 的方向同时垂直于矢量 **a** 和 **b**,并且矢量 **a**, **b**, **c** 遵循右手法则。

矢量的矢量积又称为叉积或外积。

根据以上定义,力 **F** 产生的力矩 **T** 可以表示为: $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{OA}\times\boldsymbol{F}$

由矢量积的定义可看出:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(4) ¦Ë$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ = (¦Ë$\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times($¦Ë$\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$¦Ë

下面推导矢量积按基本单位矢量分解表达式:

按矢量的运算规律有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z)\times(b_x\boldsymbol{e}_x + b_y\boldsymbol{e}_y + b_z\boldsymbol{e}_z)$$

展开后得:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{e}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{e}_z$$

写成行列式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_z$$

或:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

例 1.1　矢量 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_x 6\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z$ 和矢量 $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$ 确定一个平面,求此平面的法向单位矢量。

解

方法 1:此平面的法向单位矢量与此平面垂直,因此该单位矢量与矢量和垂直。设该单位矢量表示为 $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{e}_x + c_y\boldsymbol{e}_y + c_z\boldsymbol{e}_z$ ,所以

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = 2c_x - 6c_y - 3c_z = 0$$

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} = 4c_x + 3c_y - c_z = 0$$

同时考虑 $\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{e}_x + c_y\boldsymbol{e}_y + c_z\boldsymbol{e}_z$ 是单位矢量,所以 $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$

最后解得单位矢量为:$\boldsymbol{c} = \pm\ \frac{3}{7}\boldsymbol{e}_x - \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_y + \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_z$

方法 2:由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 确定的平面,而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\boldsymbol{e}_x - 10\boldsymbol{e}_y + 30\boldsymbol{e}_z$$

由于单位矢量平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,所以单位矢量为

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|} = \frac{3}{7}\boldsymbol{e}_x - \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_y + \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_z$$

方向相反的单位矢量为 $\boldsymbol{c} = -\frac{3}{7}\boldsymbol{e}_x + \frac{2}{7}\boldsymbol{e}_y - \frac{6}{7}\boldsymbol{e}_z$

根据 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ sin¦È,所以有

sin¦È $= \frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}$

考虑式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\boldsymbol{e}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\boldsymbol{e}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\boldsymbol{e}_z$,所以

sin¦È $= \frac{(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$

## 1.2.5 矢量的混合积

设三个矢量 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{e}_x + b_y\boldsymbol{e}_y + b_z\boldsymbol{e}_z$,$\boldsymbol{c} = c_x\boldsymbol{e}_x + c_y\boldsymbol{e}_y + c_z\boldsymbol{e}_z$,先做矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 再作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的数量积,即$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 称为矢量的混合积。

根据定义,有:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$$

写成三阶行列式有:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

根据行列式的性质,行列式连续进行两次对调,不改变行列式的值和正负号,容易得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

**例1.2　证明矢量恒等式**

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

**证明:**设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{e}_x+c_y\boldsymbol{e}_y+c_z\boldsymbol{e}_z$ 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_z$$

设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\begin{aligned}x&=-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z\\&=-a_xb_zc_z+a_zb_xc_z-a_xb_yc_y+a_yb_xc_y\\&=a_xb_xc_x+a_yb_xc_y+a_zb_xc_z-a_xb_xc_x-a_xb_yc_y-a_xb_zc_z\\&=(a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)b_x-(b_xc_x+b_yc_y+b_zc_z)a_x\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_x-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_x\end{aligned}$$

同样有:

$$y=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_y-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_y$$
$$z=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_z-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_z$$

因此有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$$

# 1.3　矢量的通量　散度

## 1.3.1　通量

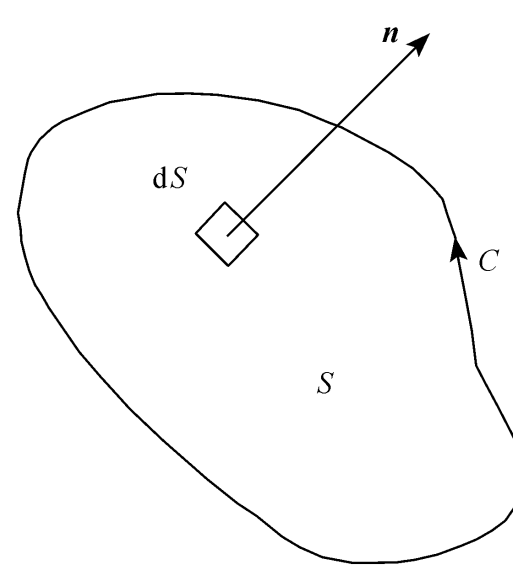


图1.4　开面 $S$ 及面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向

空间曲面有双侧与单侧两类，我们通常遇到的曲面是双侧的，根据我们研究的问题，需要在双侧曲面选定某一侧，选定了一侧的双侧曲面称为定向曲面。定向曲面上任意一点的法向矢量的方向取为指向曲面取定的一侧。常用的取向方法有两种：一种是针对表面是开面的取向，此开面 $S$ 由一条闭合曲线 $C$ 围成，如图1.4，选择闭合线 $C$ 的环行方向后，按右手法则确定曲面上任意一个小面积元 $\mathrm{d}S$ 方向，即四个手指指向有向曲线 $C$ 的方向，大拇指垂直此小面积元的方向为曲面上此小面积元 $\mathrm{d}S$ 的方向 $\boldsymbol{n}$。另外一种是针对闭合面的取向，一般取闭合面的外法线方向(指向闭合曲面 $S$ 外部空间方向)为曲面方向。把 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 称为矢量面积元。

考察矢量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z$ 通过一矢量面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$,因为 $\mathrm{d}S$ 很小,其面上各点矢量 $\boldsymbol{a}$ 的大小可看成相等,定义矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的标量积

$$\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=a\mathrm{d}S\cos\theta$$

为矢量场 $\boldsymbol{a}$ 通过矢量面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量。其中 $\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过一有向曲面 S 的通量为

$$\int_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_S a\mathrm{d}S\cos\theta$$

本节我们着重讨论当曲面 S 为封闭曲面时的一个特殊情况,它有特殊的用途和意义,矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过这个封闭曲面 S 的通量表示为

$$\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_S a\mathrm{d}S\cos\theta$$

以流体场为例说明上式意义:如果穿过闭合面 S 的通量大于 0,即 $\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}>0$,则表示有净流量从闭合面所包围的体积内流出,这时体积内存在流体源;如果穿过闭合面 $S$ 的通量小于 0,即 $\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}<0$,则表示有净流量从闭合面所包围的体积外流入,这时体积内存在流体"洞"(或称负源),能吸收流体。前面一种情况体积内也可能存在洞,但洞的闭合面积分小于源的闭合面积分;后面一种情况体积内也可能存在源,但源的闭合面积分小于洞的闭合面积分。如果穿过闭合面 $S$ 的通量等于 0,即 $\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$,则表示从闭合面所包围的体积内流出和流入体积内的流量相等,即源的闭合面积分等于洞的闭合面积分,或者体积内既没有源,也没有洞。

### 1.3.2　散度

通量描述的是一个大范围的积分量,其积分值不能说明每一点的源的强弱,为了研究矢量场 $\boldsymbol{a}$ 在空间每一点的源的大小,把闭合面收缩,即取极限:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

这个极限值就表示这一点的源的强度,把它称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在该点的散度,并用 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 来表示,因此散度定义可以表示为:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

表示为从该点单位体积内发出的通量,由上式可见,矢量场的散度是一个标量。如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}>0$,我们就说在该点有源;如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}<0$,我们就说在该点有洞;如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$,我们就说在该点是无散的,如果 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$ 总是成立,则说该矢量场是无散场。

根据散度的定义,$\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 描述的是一点的值,与体积元 $\Delta V$ 形状无关,在取零极限时,所有尺寸都趋于零,在推导散度的表达式时,采用直角坐标系,体积元取平行

六面体元。在直角坐标系中以( $x, y, z$)为顶点作一个平行六面体,如图 1 5。分别计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过六个面的通量,通过前后一对表面的通量为:

$$\left(a_x + \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z - a_x\Delta y\Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

通过左右一对表面的通量为:

$$-a_y\Delta y\Delta z + \left(a_y + \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z = \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

通过上下一对表面的通量为:

$$\left(a_z + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y - a_z\Delta x\Delta y = \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

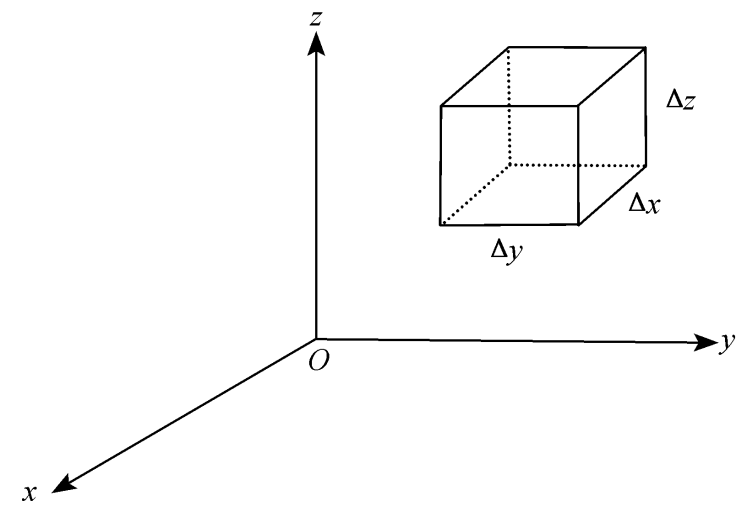


图 1 5　利用平行六面体(体积元)求通量

根据散度定义,所以:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

在矢量分析中常用到哈密顿算符(又称矢量算符),写为“$\nabla$”,$\nabla$ 是一个微分运算符,同时又应当作矢量看待。在直角坐标系中写成

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

利用哈密顿算符,散度可以写成

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z) = \nabla\cdot\boldsymbol{a}$$

两个矢量场之和的散度等于各个矢量场的散度之和,即

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

## 1.4　高斯(Gauss)定理

在矢量分析中,散度对应一个高斯定理,应用非常广泛,这里先叙述这个定理,

然后加以证明。

**高斯定理** 通过闭合曲面 S 的矢量 $\boldsymbol{a}$ 的通量,等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ 对 S 所包体积 $V$ 的积分。即

$$\oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V$$

这里假定在 S 内部矢量是连续的,并具有连续的一阶偏导数。高斯定理又称为散度定理。

证明:

将闭合面 S 包围的体积 $V$ 分成体积元:$\mathrm{d}V_1$、$\mathrm{d}V_1$、…,首先计算矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过每个体积元对应的小闭合面的通量。由定义有

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V_1, \oint_{S_2} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V_2, \cdots$$

考虑到相邻两个体积元有一个公共面,对于这两个体积元来说矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过这个公共面上的通量是大小相等符号相反的关系,求和时就相互抵消了。除了邻近闭合曲面 S 的体积元外,所有内部的体积元都是由与相邻体积元间的公共面包围而成,因此这些内部的体积元通量总和为零。对于邻近 S 面的体积元也只剩下部分表面是 S 面上的面元 dS 的通量没有被抵消,其总和等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 通过闭合面 S 的通量。所以有

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_{S_2} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \cdots = \oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

所以

$$\oint_{S_1} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V_1 + \cdots = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V$$

证毕

**例 1.3** 求

(1) 矢量 $\boldsymbol{a} = x^2 \boldsymbol{e}_x + (xy)^2 \boldsymbol{e}_y + 24x^2y^2z^3 \boldsymbol{e}_z$ 的散度

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分

(3) $\boldsymbol{a}$ 对此立方体表面的积分

解 (1) 矢量 $\boldsymbol{a} = x^2 \boldsymbol{e}_x + (xy)^2 \boldsymbol{e}_y + 24x^2y^2z^3 \boldsymbol{e}_z$ 的散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2$$

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x + 2x^2y + 6x^2y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

(3) $\boldsymbol{a}$ 对此立方体表面的积分为