

电子信息本科系列教材

电磁场与电磁波

马冰然 编著

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书是在 1991 年出版、1999 年再版的《电磁场与微波技术》教材的基础上修订编写的。

全书内容包括电磁场、电磁波和波导与谐振腔,共分矢量分析与场论基础、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的边值问题、时变电磁场、平面电磁波和波导与谐振腔等 8 章。每章前有提要,后有小结,并列举典型例题及附有一定数量的习题和参考答案。

本书可作为高等院校电子信息类与电气信息类相关专业的基础理论课教材,以及成人高等教育有关电类专业的教材或参考书,也可供有关工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/马冰然编著.—广州:华南理工大学出版社,2007.8
(电子信息本科系列教材)

ISBN 978-5623-2664-9

I. 电... II. 马... III. ①电磁场 ②电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125158 号

总发行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)

营销部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)

E-mail: scutc13@scut.edu.cn

http://www.scutpress.com.cn

责任编辑:詹志青

印刷者:广州穗彩印厂

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:23.25 字数:589 千

版次:2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

印数:1~3000 册

定 价:35.00 元

版权所有 盗版必究

前 言

踏进 21 世纪，人类进入了信息时代。随着科学新技术的不断涌现及经济建设的迅速发展，电磁现象及其理论和技术应用已全方位、全时空地渗透到人类活动的各个领域。作为电子与信息、电子与通信、电气与信息类专业技术的基础理论的电磁场与电磁波课程，不仅在以上专业技术人员的必备的知识结构及素质需求中扮演了越来越重要的角色，而且成为其他专业的大学生为拓宽专业知识面、增强适应和竞争能力而选修的课程。以麦克斯韦四个微分方程表示的电磁理论体系是一个成熟的、完整的、内涵丰富的科学体系，但也是一个理论性偏强、需要抽象思维和推理理解的体系，因此，一个既符合电磁理论科学体系又适应现时代需求的、既具有合适深度而又易于教授便于自学的电磁基础理论教材，是所有此类教材的编写者的追求。

本书是在 1991 年出版、1999 年再版的《电磁场与微波技术》的基础上，结合编者历年使用该教材在各种电磁场理论教学实践中的心得体会而修订编成的。全书共设矢量分析与场论基础、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的边值问题、时变电磁场、平面电磁波及波导与谐振腔等 8 章内容。本书内容编排注意体现电磁理论体系的科学性和系统性，采用学生比较容易接受的由特殊到一般的归纳方法，并注意在归纳的基础上从一般到特殊地分析以帮助读者加深对电磁基本定理的内涵的认识。

本书力求对物理概念、定理叙述准确，注意应用场论等数学知识描述和分析，力求令教学推理严密、逻辑性强，并尽量让读者易于阅读。在素材组织上注重教材的基础性，力求深浅合适、详略得当；但对重点和难点给予充分说明和分析，不刻意追求“简明扼要”，且尽量结合典型工程应用以加深读者对理论的认识。在叙述上注意思路清晰、前后连贯、由浅入深、通俗易懂。

本书每章前有提要，后有小结，以便于读者阅读并掌握重点；章节中还有针对性地配置相当数量的、精选的典型例题及分析；每章后又附了一定数量的习题和参考答案，用以加深读者对基本概念和基本定理的理解，以及加强其对概念、定理的应用和分析解决问题的能力。

本书可作为高等院校电子信息类和电气信息类专业基础理论课程教材；若在内容上作适当取舍，也可作为不同层次、不同类型的电气专业的教材或

参考书。

编者已完成与本书相配套的辅导资料及习题解集，欲努力令《电磁场与电磁波》能易教易学，希望该书的出版能让读者共享编者的心得与体会。

本书的编写得到了华南理工大学电信学院物电教研组从事电磁场与电磁波教学的各位老师的支持，在此，编者谨向他们表示衷心感谢。

限于编者的水平和能力，书中难免存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

编 者

2007年5月

1 矢量分析与场论基础

电磁场是自然界中存在的,且为人类越来越熟知并广泛应用的物理场。所谓场,在物理学中的概念是:如果在全部空间(或部分空间),每一点上都对应着某个物理量的确定值,我们就说在这个空间域中确定了该物理量的场。

如果物理量的确定值仅用一个数值就能表示(即确定值是一个标量),则称该物理量的场为标量场。例如,温度场、密度场和电位场等是标量场。

如果物理量的确定值是一个矢量(即是既有大小、又有方向的量),则称该物理量的场为矢量场。例如,力场、流速场、电场和磁场等均是矢量场。

假如物理量的确定值不随时间变化,则称该物理量的场为静态场;反之,若物理量除有空间分布的确定规律外,每一点上的值还随时间变化,则称该场为动态场或时变场。例如,随时间变化的电荷(或电流)产生的场是时变电磁场。

电磁场理论是研究宏观电磁现象及电磁过程的基本规律和分析计算方法的理论。电磁场中的基本场量(如电场强度 E 和磁感应强度 B 等)均是矢量,故研究其在空间的分布及变化规律时,要应用矢量分析和场论基础的数学知识。这部分知识是研究电磁场理论的重要数学工具,也是学习后续各章课程的数学基础。

要表达并分析场量(尤其是场矢量)在空间的分布及变化规律,必须借助坐标系。以下简单介绍三种常用的坐标系。

1.1 三种常用的坐标系

坐标系是将空间的点的位置用一组有顺序的、一一对应的数值表示的数学模型。位于平面上的一个点,只需二维独立坐标便可确定,例如,可用平面直角坐标系中的 x, y 坐标来标记点 $P(x, y)$,而任何描述三维空间的点的坐标系则需要三个独立的坐标变量 u_1, u_2, u_3 (如直角坐标系中的 x, y, z 坐标,又如圆柱坐标系中的 r, φ, z 坐标)。当坐标变量 u_1, u_2, u_3 为常数时,分别代表空间的三组曲面(或平面),称为坐标面。每两组坐标面的交线称为坐标曲线。如图 1-1 所示,坐标面 $u_1 = c_1$ 与 $u_3 = c_3$ 的交线是 u_2 坐标曲线。若过空间任意 M 点的三条坐标曲线都两两相互正交(此时,其相应的坐标面也两两相互垂直),则称这种坐标系为正交坐标系。

经过空间任一点 M 的三条坐标曲线的切向单位矢量,称为点 M 上该坐标的单位矢量。如图 1-1 中的 a_{u_1}

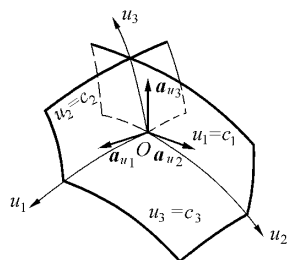


图 1-1 广义正交坐标系

是过原点的 u_1 坐标的单位矢量。坐标单位矢量的模等于 1,并以各坐标变量正的增加方向作为正方向。一个正交坐标系的坐标单位矢量按顺序满足右手螺旋法则(按常规,均采用右手系统)如图 1-1 中有

$$\mathbf{a}_{u_1} \times \mathbf{a}_{u_2} = \mathbf{a}_{u_3},$$

同样有

$$\mathbf{a}_{u_2} \times \mathbf{a}_{u_3} = \mathbf{a}_{u_1},$$

和

$$\mathbf{a}_{u_3} \times \mathbf{a}_{u_1} = \mathbf{a}_{u_2}.$$

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是正交坐标系中最常用的三种坐标系。下面简单介绍坐标变量、坐标单位矢量、长度元、面积元、体积元和矢量函数在三个常用坐标系中的表示法及其相互关系。

1.1.1 直角坐标系

直角坐标系中的三个坐标变量是 x, y, z 。它们的变化范围是

$$-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty.$$

直角坐标系的坐标面是平面,坐标曲线是直线。点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 是三个坐标面 $x = x_1, y = y_1$ 和 $z = z_1$ 的交点,如图 1-2 所示。过点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 的坐标曲线是三条相互正交的直线,点 M 处的坐标单位矢量记为 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 。它们相互正交,即

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0, \quad (1-1)$$

而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z, \\ \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z &= \mathbf{a}_x, \\ \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y. \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

直角坐标系的坐标单位矢量 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 是常

矢量,其方向不随点 M 的位置变化而变化。这是直角坐标系的一个很重要的特征,也是在其他坐标系处理一些矢量分析计算(如在圆柱或球坐标系中对给定在不同点的两个矢量的相加等计算)时要变换到直角坐标系处理的原因。

在直角坐标系内的任一矢量 \mathbf{A} 可以表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z. \quad (1-3)$$

式中 A_x, A_y, A_z 分别是矢量 \mathbf{A} 在 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 方向上的投影。

在图 1-3 中,空间相邻的两个点 $M(x, y, z)$ 与 $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ 所在的六个坐标面 $x, x + dx, y, y + dy, z, z + dz$ 围成了一个直角坐标系中的微分体元。由点 M 指向点 M' 的小矢量 $d\mathbf{l}$ 称为点 M 处的矢量线元。矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在点 M 的三个坐标单位矢量方向上的投影称为该坐标方向上的长度元,即

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dl_x + \mathbf{a}_y dl_y + \mathbf{a}_z dl_z. \quad (1-4)$$

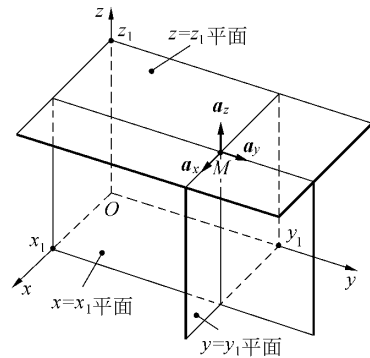


图 1-2 直角坐标系

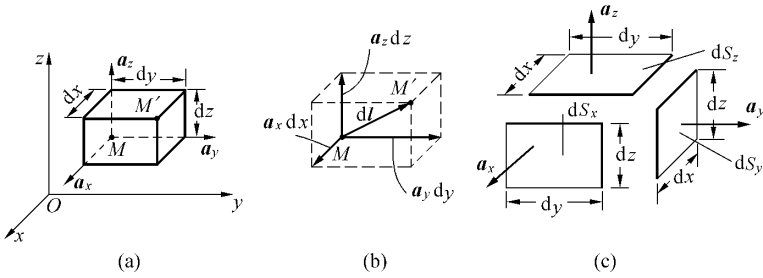


图 1-3 直角坐标系中的单位矢量、长度元、面积元和体积元

由图 1-3b 可知,直角坐标系三个坐标单位矢量方向上的长度元为

$$\left. \begin{aligned} dl_x &= dx, \\ dl_y &= dy, \\ dl_z &= dz. \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

图 1-3a 中的微分六面体由六个微分面元包围,过点 M 的三个面积元如图 1-3c 所示,是

$$\left. \begin{aligned} dS_x &= dl_y dl_z = dy dz (\text{与 } a_x \text{ 垂直}), \\ dS_y &= dl_z dl_x = dz dx (\text{与 } a_y \text{ 垂直}), \\ dS_z &= dl_x dl_y = dx dy (\text{与 } a_z \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

在直角坐标系中,包含点 M 的任意面积元矢量 dS ,可用坐标系的面积元来表示。即若设点 M 处的面元法向单位矢量为 n 如图 1-4 所示,有

$$n = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma。$$

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 n 在三个坐标轴方向上的投影,也称方向余弦。则面元 dS 可表示为

$$\begin{aligned} dS &= n dS \\ &= a_x dS \cos\alpha + a_y dS \cos\beta + a_z dS \cos\gamma. \end{aligned} \quad (1-7)$$

当 n 与 a_x, a_y, a_z 的夹角满足 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ 时,则

$$\begin{aligned} dS &= a_x dS_x + a_y dS_y + a_z dS_z \\ &= a_x dy dz + a_y dz dx + a_z dx dy. \end{aligned} \quad (1-8)$$

包含点 M 的微分体积元 dV 就是图 1-3a 中的微分六面体的体积,即

$$dV = dl_x dl_y dl_z = dx dy dz. \quad (1-9)$$

1.1.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系中的三个坐标变量是 r, φ, z 。 z 坐标变量的定义与直角坐标系相同。各变量的定义域是：

此为试读,需要完整版PDF请点击 $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty。$ www.cn-tongbook.com

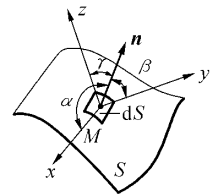


图 1-4 直角坐标系中的面元矢量

在图 1-5 所示的圆柱坐标系中, 点 $M(r_1, \varphi_1, z_1)$ 是以下三个坐标面的交点:

① $r = r_1$, 是以 z 轴为轴线、以 r_1 为半径的圆柱面。 r_1 是点 M 到 z 轴的垂直距离。

② $\varphi = \varphi_1$, 是以 z 轴为界的半平面。 φ_1 是 xOz 平面与通过点 M 的半平面之间的夹角。

③ $z = z_1$, 是与 z 轴垂直的平面。 z_1 是点 M 到 xOy 平面的垂直距离。

过点 M 的坐标曲线分别是:

① 与 z 轴平行的 QM 直线(是 z 坐标曲线, 由 $r = r_1$ 与 $\varphi = \varphi_1$ 相交而成)。

② 与 xOy 平面平行的始于 z 轴的射线 PM (r 坐标曲线, 由 $\varphi = \varphi_1$ 与 $z = z_1$ 相交而成)。

③ 位于 $z = z_1$ 平面上、半径为 r_1 、圆心在 z 轴上(P 点)的圆(φ 坐标曲线, 由 $z = z_1$ 与 $r = r_1$ 相交而成)。

因此, 空间任意点 $M(r, \varphi, z)$ 处的坐标单位矢量为与经过点 M 的坐标曲线相互平行或相切的 a_r, a_φ 与 a_z 。它们相互正交, 即

$$a_r \cdot a_\varphi = a_\varphi \cdot a_z = a_z \cdot a_r = 0, \quad (1-10)$$

而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\varphi &= a_z, \\ a_\varphi \times a_z &= a_r, \\ a_z \times a_r &= a_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

在柱坐标系中, 除 a_z 是常矢量外, a_r, a_φ 都是变矢量, 其方向都随点 M 位置的变化而变化。在柱坐标系中处理矢量的代数、微分和积分等运算时要特别注意这一点。

在点 M 的任一矢量 A 可表示为

$$A = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z. \quad (1-12)$$

式中, A_r, A_φ 和 A_z 分别是矢量 A 在位于点 M 处的坐标单位矢量 a_r, a_φ 和 a_z 方向上的投影。

如图 1-6 所示, 空间相邻的两个点 $M(r, \varphi, z)$ 与 $M'(r + dr, \varphi + d\varphi, z + dz)$ 所在的六个坐标面 $r, r + dr, \varphi, \varphi + d\varphi, z, z + dz$ 围成一个微分六面体元。利用这个六面体元, 柱坐标系中的长度元、面积元和体积元可表示如下:

1. 长度元

由点 M 指向点 M' 的矢量线元 dl 在点 M 处沿 a_r, a_φ, a_z 方向上的投影, 也即长度元, 如图 1-6b 所示, 为

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr, \\ dl_\varphi &= r d\varphi, \\ dl_z &= dz. \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

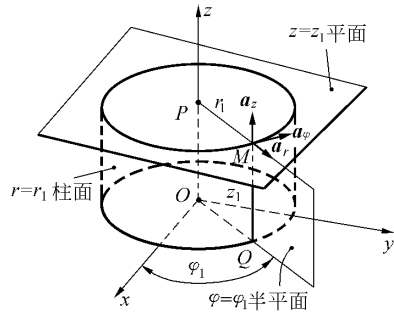


图 1-5 圆柱坐标系

则 dl 可表示为

$$dl = \mathbf{a}_r dl_r + \mathbf{a}_\varphi dl_\varphi + \mathbf{a}_z dl_z = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\varphi r d\varphi + \mathbf{a}_z dz. \quad (1-14)$$

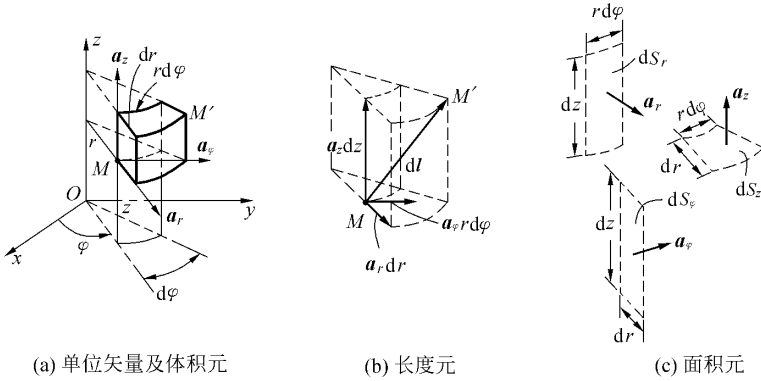


图 1-6 圆柱坐标系

2. 面积元

如图 1-6c 所示, 面元矢量 $d\mathbf{S}$ 在三个坐标单位矢量方向上的面积元为

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\varphi dl_z = r d\varphi dz \quad (\text{与 } \mathbf{a}_r \text{ 垂直}), \\ dS_\varphi &= dl_r dl_z = dr dz \quad (\text{与 } \mathbf{a}_\varphi \text{ 垂直}), \\ dS_z &= dl_r dl_\varphi = r dr d\varphi \quad (\text{与 } \mathbf{a}_z \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

则任意包含点 M 的面元矢量 $d\mathbf{S}$, 当其面元法向单位矢量 \mathbf{n} 的方向与点 M 处的坐标单位矢量方向的夹角大于、等于零并小于、等于 $\frac{\pi}{2}$ 时, 可表示为

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{a}_r dS_r + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi + \mathbf{a}_z dS_z \\ &= \mathbf{a}_r r d\varphi dz + \mathbf{a}_\varphi dr dz + \mathbf{a}_z r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (1-16)$$

3. 体积元

$$dV = dl_r dl_\varphi dl_z = r dr d\varphi dz \quad (1-17)$$

1.1.3 球坐标系

球坐标系中的三个坐标变量是 r, θ, φ 。其中, 坐标变量 φ 与柱坐标系中的定义相同。 r, θ, φ 的变化范围是

$$0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

在球坐标系中, 如图 1-7 所示, 点 $M(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 由下述三个面的交点所确定:

① $r = r_1$ 是以原点为球心、 r_1 为半径的球面。 r_1 是点 M 到原点的直线距离(注意: 球坐标系中的 r 坐标与圆柱坐标系中的 r 坐标定义

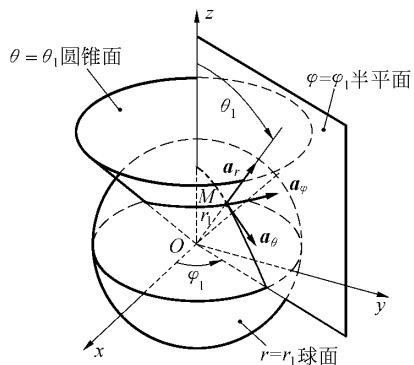


图 1-7 球坐标系

是不同的)。

② $\theta = \theta_1$ 是以原点为顶点、以 z 轴为轴线的圆锥面。 θ_1 是正向 z 轴与连线 OM 之间的夹角。

③ $\varphi = \varphi_1$ 是以 z 轴为界的半平面。 φ_1 是 xOz 平面与过点 M 的半平面之间的夹角 (φ 与圆柱坐标系中的定义相同)。坐标变量 φ 称为方位角。

过点 $M(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ 的坐标曲线分别是：

① 始于原点、并经过点 M 的射线 OM (r 坐标曲线, 由 $\theta = \theta_1$ 与 $\varphi = \varphi_1$ 相交而成)。

② 位于 $\varphi = \varphi_1$ 半平面、并以原点 O 为圆心和以 r_1 为半径的半圆弧 (即 θ 坐标曲线, 由 $\varphi = \varphi_1$ 与 $r = r_1$ 相交而成)。

③ 圆心在 z 轴上、以 $r_1 \sin \theta_1$ 为半径并位于过点 M 而垂直 z 轴的平面上的圆 (即 φ 坐标曲线, 由 $r = r_1$ 与 $\theta = \theta_1$ 相交而成)。

空间任意点 $M(r, \theta, \varphi)$ 处的坐标单位矢量的方向分别与过点 M 的坐标曲线相切, 如图 1-8 所示, 为 a_r 、 a_θ 和 a_φ 。它们相互正交, 即

$$a_r \cdot a_\theta = a_\theta \cdot a_\varphi = a_\varphi \cdot a_r = 0, \quad (1-18)$$

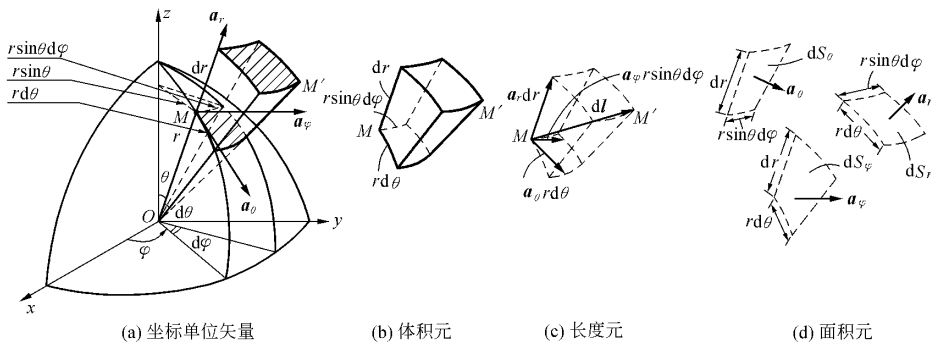


图 1-8 球坐标系

并且遵循右手螺旋法则：

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\theta &= a_\varphi, \\ a_\theta \times a_\varphi &= a_r, \\ a_\varphi \times a_r &= a_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

和柱坐标系相似, 在球坐标系中, 空间任意点 $M(r, \theta, \varphi)$ 处的坐标单位矢量 a_r 、 a_θ 和 a_φ 都是变矢量, 其方向会随点 M 位置的变化而变化。在作矢量代数及微、积分运算时应该注意到这一点。

在球坐标系中, 位于点 M 的任一矢量 A 可表示为

$$A = a_r A_r + a_\theta A_\theta + a_\varphi A_\varphi. \quad (1-20)$$

式中 A_r 、 A_θ 和 A_φ 分别是矢量 A 在点 M 处的坐标单位矢量 a_r 、 a_θ 和 a_φ 方向上的投影。

如图 1-8a、b 所示, 球坐标系中的长度元、面积元和体积元可用空间相邻的两个点

$M(r, \theta, \varphi)$ 与 $M'(r+dr, \theta+d\theta, \varphi+d\varphi)$ 所在的六个坐标面围成的微分六面体来表示:

1. 长度元

由点 M 至点 M' 的矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在点 M 处沿 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$ 方向上的投影即为该方向上的长度元,如图 1-8c 所示,为

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr, \\ dl_\theta &= r d\theta, \\ dl_\varphi &= r \sin\theta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

在球坐标中, $d\mathbf{l}$ 可表示为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\varphi r \sin\theta d\varphi. \quad (1-22)$$

2. 面积元

如图 1-8d 所示,面元矢量 $d\mathbf{S}$ 在三个坐标单位矢量方向上的面积元为

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (\text{与 } \mathbf{a}_r \text{ 垂直}), \\ dS_\theta &= dl_r dl_\varphi = r \sin\theta dr d\varphi \quad (\text{与 } \mathbf{a}_\theta \text{ 垂直}), \\ dS_\varphi &= dl_r dl_\theta = r dr d\theta \quad (\text{与 } \mathbf{a}_\varphi \text{ 垂直}). \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

对于任意包含点 M 的面元矢量 $d\mathbf{S}$, 当其面元法向单位矢量 \mathbf{n} 的方向与点 M 处的坐标单位矢量的夹角大于、等于零并小于、等于 $\frac{\pi}{2}$ 时,可表示为

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{a}_r dS_r + \mathbf{a}_\theta dS_\theta + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi \\ &= \mathbf{a}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi + \mathbf{a}_\theta r \sin\theta dr d\varphi + \mathbf{a}_\varphi r dr d\theta. \end{aligned} \quad (1-24)$$

3. 体积元

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi. \quad (1-25)$$

1.1.4 三种坐标系的坐标变量之间的关系

变量 r 和单位矢量 \mathbf{a}_r 的定义在球坐标系与柱坐标系中是不相同的。为了加以区别,在讨论三个坐标系之间的关系时,暂用 R 及 \mathbf{a}_R 代替球坐标系中的 r 和 \mathbf{a}_r 。

由图 1-9 的几何关系,可以直接写出三种坐标系的坐标变量之间的关系。

1. 直角坐标系与柱坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi, & (1-26a) \\ y = r \sin\varphi, & (1-26b) \\ z = z_0. & (1-26c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, & (1-27a) \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (1-27b) \\ z = z_0. & (1-27c) \end{cases}$$

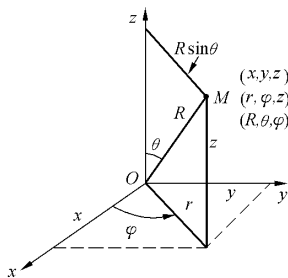


图 1-9 三种坐标系的坐标变量之间的关系

2. 直角坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi, & (1-28a) \\ y = R \sin \theta \sin \varphi, & (1-28b) \\ z = R \cos \theta. & (1-28c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & (1-29a) \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & (1-29b) \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. & (1-29c) \end{cases}$$

3. 柱坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} r = R \sin \theta, & (1-30a) \\ \varphi = \varphi, & (1-30b) \\ z = R \cos \theta. & (1-30c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2}, & (1-31a) \\ \theta = \arcsin \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, & (1-31b) \\ \varphi = \varphi. & (1-31c) \end{cases}$$

1.1.5 三种坐标系的坐标单位矢量之间的关系

1. 直角坐标系与柱坐标系

在直角坐标系和柱坐标系中, z 变量的定义是相同的, 即经过空间任意点 M 的坐标单位矢量 a_z 是一样的。又因正交坐标系中的三个坐标单位矢量满足正交右手螺旋法则, 故在两个坐标系中, 点 M 处的其余四个坐标单位矢量 (a_x, a_y, a_r, a_φ) 必定在过点 M 的 z 平面上。如图 1-10 所示, 用位于 xOy 平面上的、以某点 M 为圆心的单位圆便可将过点 M 的其余四个坐标单位矢量之间的关系形象地表示出来。

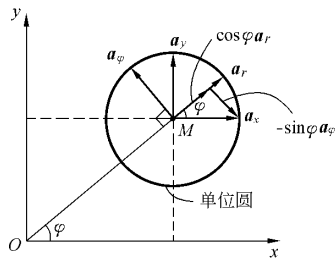


图 1-10 直角坐标系和柱坐标系中的坐标单位矢量及其关系

例如, 欲以柱坐标系单位矢量 a_r, a_φ 表示直角坐标系单位矢量 a_x , 可将 a_x 向 a_r 及 a_φ 方向投影, 得其投影矢量 $|a_x| \cdot \cos \varphi a_r$ 及 $|a_x| \cdot \sin \varphi (-a_\varphi)$, 即得

$$a_x = a_r \cos \varphi - a_\varphi \sin \varphi;$$

反之, 也可以用 a_x, a_y 表示 a_r : $a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi$ 。

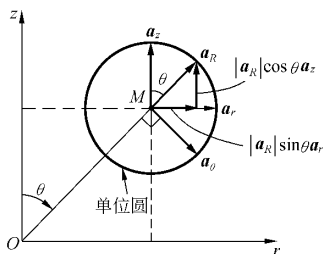
将直角坐标系与柱坐标系的坐标单位矢量之间的关系表示成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{bmatrix}, \quad (1-32a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix}. \quad (1-32b)$$

2. 柱坐标系与球坐标系

由于坐标变量 φ 在柱坐标系与球坐标系中的定义相同,因而空间某点 M 上的坐标单位矢量 \mathbf{a}_φ 在两个坐标系中是相同的。而其余四个坐标单位矢量 \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_z , \mathbf{a}_R , \mathbf{a}_θ 均与 \mathbf{a}_φ 垂直,也即它们是共面的,且均在过点 M 的 φ 坐标面(rOz 面)上,故可用如图 1-11 所示的单位圆来表示它们之间的关系。



例如,可将 \mathbf{a}_R 向 \mathbf{a}_r 及 \mathbf{a}_z 方向上投影而得

$$\mathbf{a}_R = \sin\theta \mathbf{a}_r + \cos\theta \mathbf{a}_z.$$

图 1-11 柱坐标系和球坐标系中的坐标单位矢量及其关系

或者也可应用以下矩阵公式转换:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix}, \quad (1-33a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix}. \quad (1-33b)$$

3. 球坐标系与直角坐标系

球坐标系与直角坐标系没有相同定义的坐标面,空间任一点 M 在两个坐标系中的坐标单位矢量及其关系要用立体图形才能表达,故不便使用。用矩阵形式表示的转换公式如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix}, \quad (1-34a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_R \\ \mathbf{a}_\theta \\ \mathbf{a}_\varphi \end{bmatrix}. \quad (1-34b)$$

例 1-1 已知矢量函数 \mathbf{A} 在柱坐标系中的表达式为 $\mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \mathbf{a}_r + \sin\varphi \mathbf{a}_z$, 求 \mathbf{A} 在直角坐标系中的表达式。

解 据式(1-27a)及式(1-32b)可知:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \mathbf{a}_r = \cos\varphi \mathbf{a}_x + \sin\varphi \mathbf{a}_y.$$

将以上各式代入 \mathbf{A} , 可得 \mathbf{A} 在直角坐标系中的表达式为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} (\cos\varphi \mathbf{a}_x + \sin\varphi \mathbf{a}_y) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_z$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y) + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{a}_z \circ$$

例 1-2 求柱坐标系中坐标单位矢量 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ 对坐标变量 φ 的偏导数。

解 在柱坐标系中, \mathbf{a}_z 是常矢量, 即 $\frac{\partial \mathbf{a}_z}{\partial \varphi} = 0$ 。

对于不同的 φ 坐标面, \mathbf{a}_r 和 \mathbf{a}_φ 方向不同, 因此 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 是坐标变量 φ 的函数, 据式 (1-32b) 有

$$\mathbf{a}_r = \cos\varphi \mathbf{a}_x + \sin\varphi \mathbf{a}_y,$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\sin\varphi \mathbf{a}_x + \cos\varphi \mathbf{a}_y \circ$$

\mathbf{a}_x 和 \mathbf{a}_y 是常矢量, 在对 φ 求导时可视为常数, 故 $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi$ 对 φ 的偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\cos\varphi \mathbf{a}_x + \sin\varphi \mathbf{a}_y) = -\sin\varphi \mathbf{a}_x + \cos\varphi \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_\varphi,$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}(-\sin\varphi \mathbf{a}_x + \cos\varphi \mathbf{a}_y) = -\cos\varphi \mathbf{a}_x - \sin\varphi \mathbf{a}_y = -\mathbf{a}_r \circ$$

1.2 矢量代数

矢量是有大小和方向的。一个矢量 \mathbf{A} 可以用它的大小和方向表示为

$$\mathbf{A} = A \mathbf{a}_A \circ \quad (1-35)$$

式中, $A = |\mathbf{A}|$ 是 \mathbf{A} 的大小(也称模或长度), 而 \mathbf{a}_A 是沿 \mathbf{A} 方向且大小等于 1 的无量纲单位矢量(也称为 \mathbf{A} 的单位矢量) 因此

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A} \circ \quad (1-36)$$

在几何图形中, 矢量 \mathbf{A} 也可以用带箭头的线段表示, 如图 1-12 所示。

在三维正交曲线坐标系中, 任一矢量 \mathbf{A} 还可以用其在坐标曲线方向上的投影(也称分量)和该坐标单位矢量表示。例如, 在直角坐标系中, 有

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{A}_x + a_y \mathbf{A}_y + a_z \mathbf{A}_z, \quad (1-37)$$

其中, $\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z$ 分别是 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x, \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y, \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z$ 的量值, 也即 \mathbf{A} 在 $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ 方向上的分量。 \mathbf{A} 的模用坐标系三个方向的分量来表示为

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \circ \quad (1-38)$$

从坐标系原点指向空间任意点 $P(x, y, z)$ 的矢量称为点 P 的位置矢量。如图 1-13 所示, 点 P 的位置矢量的大小是点 P 处的球坐标 r , 方向为点 P 处球坐标系单位矢量 \mathbf{a}_r 方向, 故位置矢量常用 \mathbf{r} 表示, 它和点 P 的直角坐标 x, y, z 的关系是

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y + z \mathbf{a}_z \circ \quad (1-39)$$

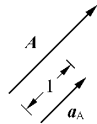


图 1-12 矢量的几何表示法

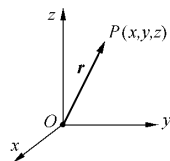


图 1-13 位置矢量 \mathbf{r}

1.2.1 矢量加法和减法

矢量的加法和减法可以用几何图形表示,如图 1-14 表示了矢量 $C = A \pm B$ 的三角形法和平行四边形法。

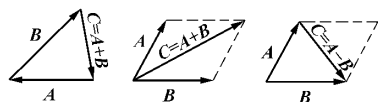
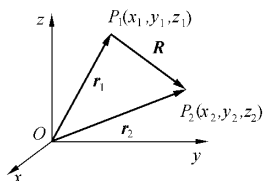


图 1-14 用几何图形表示矢量加法和减法

图 1-15 两点之间的距离矢量 R

用坐标分量表示的矢量,可以用其分矢量进行运算。例如,在直角坐标系中,若 $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$, $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$, 则它们的和为

$$A + B = (A_x + B_x)a_x + (A_y + B_y)a_y + (A_z + B_z)a_z, \quad (1-40)$$

其差为

$$A - B = (A_x - B_x)a_x + (A_y - B_y)a_y + (A_z - B_z)a_z. \quad (1-41)$$

在矢量场的分析计算中,常应用两点之间的距离矢量。如图 1-15 所示,由点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 指向点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离矢量 R 是

$$R = r_1 - r_2 = (x_1 - x_2)a_x + (y_1 - y_2)a_y + (z_1 - z_2)a_z; \quad (1-42)$$

其模(即两点之间的距离)为

$$R = |R| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (1-43)$$

1.2.2 矢量的乘积

矢量的乘积有点积和叉积两种运算。

1. 点积(或标量积)

两个矢量 A 与 B 的点积记为 $A \cdot B$ 。 $A \cdot B$ 定义为

$$A \cdot B = |A| |B| \cos(A, B). \quad (1-44)$$

即点积 $A \cdot B$ 是一个标量(标量积),其大小为两个矢量的模与它们之间较小的夹角的余弦之积。

两个矢量的方向平行时,其点积最大;垂直时,其点积为零。因此,若两个非零矢量的点积为零,则两矢量是正交的。

矢量的点积服从乘法交换律和分配律,即

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad (1-45)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (1-46)$$

若矢量用坐标系的分量表示,例如,在直角坐标系中, $A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z$, $B = a_x B_x + a_y B_y + a_z B_z$, 应用直角坐标系单位矢量的关系

$$\left. \begin{aligned} a_x \cdot a_x &= a_y \cdot a_y = a_z \cdot a_z = 1, \\ a_x \cdot a_y &= a_y \cdot a_z = a_z \cdot a_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-47)$$

可得

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1-48)$$

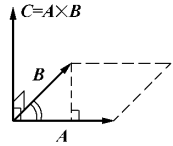
即两个矢量的点积等于这两个矢量对应的坐标分量相乘积之和。

2. 叉积(或矢量积)

两个矢量的叉积记为 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 是一个矢量(故也称为矢量积),其大小定义为

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin(\angle \mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (1-49)$$

其方向垂直于由 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 构成的平面,并且 \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 三者符合右手螺旋法则。也即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的大小等于由 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 形成的平行四边形的面积,而其方向垂直于平行四边形所在的平面,并指向由 \mathbf{A} 旋转至 \mathbf{B} 时右手螺旋前进的方向,如图 1-16 所示。



据式(1-49)可知,两个非零矢量相互平行的充分必要条件是它们的叉积为零。

矢量的叉积不服从交换律,但服从分配律,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad (1-50)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (1-51)$$

在直角坐标系中, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 可用以下行列式计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z. \end{aligned} \quad (1-52)$$

除以上所述外,在做矢量的代数运算时还应注意:

(1) 矢量的除法没有定义。

(2) 在以上矢量加减法和乘法的叙述中,当矢量用坐标系分量表示时,其加、减、乘法运算均以直角坐标系为例。在直角坐标系中,坐标单位矢量 a_x , a_y , a_z 是常矢量,不随所考察的点而变化,故对以上所列的公式(如式(1-40)、式(1-41)、式(1-48)和式(1-52)等),不管 \mathbf{A} , \mathbf{B} 是定义在同一个点上的矢量,还是定义在不同的两个点上的矢量,均可应用。但柱坐标系和球坐标系的坐标单位矢量(除 a_z 外)均为变矢量,其方向是随着考察点的位置变化而变化的。在柱坐标系中,不同的两个点上的坐标单位矢量 a_r (或 a_φ),只有当这两点都处在同一 φ 坐标面时,其方向才相同,而在球坐标系中,只有位于同一球半径线(r 坐标线)上的两个点的坐标单位矢量方向才是一致的。也就是说,只有定义在同一点上(或者在柱坐标系中是位于同一 φ 平面上,或者在球坐标系中是处在同一半径线上)的两个矢量(\mathbf{A} , \mathbf{B}),才能有类似于式(1-40)等用坐标分量来直接运算并表示的普遍运算公式。例如,若 \mathbf{A} , \mathbf{B} 是定义于同一点的两个矢量,它们在柱坐标系中的表示式为

$$\mathbf{A} = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z, \quad \mathbf{B} = a_r B_r + a_\varphi B_\varphi + a_z B_z,$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_r \pm B_r) a_r + (A_\varphi \pm B_\varphi) a_\varphi + (A_z \pm B_z) a_z.$$

图 1-16 两矢量的叉积

若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 如图 1-17 所示, 分别定义于点 P_1 (φ_1 面上的)、 P_2 (φ_2 面上的), $\mathbf{A} = a_r A_r, \mathbf{B} = a_r B_r$, 则上式是不能应用的。显然 $\mathbf{A} + \mathbf{B} \neq (A_r + B_r)a_r$ 。对于这一类用柱坐标系或球坐标系分量表示的, 定义在不能对各分量直接进行运算的点上的两个矢量, 可将其转换到直角坐标系中去运算。

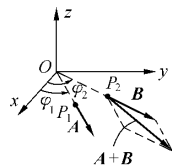


图 1-17 柱坐标系中定义在不同 φ 平面上的两矢量的加法

(3) 对于一般的矢量函数 $\mathbf{A}(r), \mathbf{B}(r)$ 的运算, 在没有特别标出时, 或者为了考察某一场点 r 处的场量分布时, 常常假设其运算是定义在同一场点 r 处的。

例 1-3 在柱坐标系中, 已知 $\mathbf{A} = 3a_r + 2a_\varphi + 5a_z$ 和 $\mathbf{B} = -2a_r + 3a_\varphi - a_z$ 分别是定义在点 $P(3, \frac{\pi}{6}, 5)$ 和点 $Q(4, \frac{\pi}{3}, 3)$ 上的两个矢量, 求在点 $S(2, \frac{\pi}{4}, 4)$ 的矢量 \mathbf{C} 其与 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的关系为 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

解 矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 分别定义在 P, Q 两点, 点 P 在 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 平面, 点 Q 在 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 平面, 也即 \mathbf{A}, \mathbf{B} 不在同一 φ 坐标面, 故不能直接求和, 应将其变换到直角坐标系中运算。

据式(1-32b)可知, 在空间同一点上, 柱坐标系坐标单位矢量 a_r, a_φ 与 a_x, a_y 关系为

$$a_r = \cos\varphi a_x + \sin\varphi a_y, \quad a_\varphi = -\sin\varphi a_x + \cos\varphi a_y。$$

对于点 P :

$$\varphi = \frac{\pi}{6}, \quad \mathbf{A} = 3a_r + 2a_\varphi + 5a_z,$$

$$a_r = \cos \frac{\pi}{6} a_x + \sin \frac{\pi}{6} a_y = \frac{\sqrt{3}}{2} a_x + \frac{1}{2} a_y,$$

$$a_\varphi = -\sin \frac{\pi}{6} a_x + \cos \frac{\pi}{6} a_y = -\frac{1}{2} a_x + \frac{\sqrt{3}}{2} a_y,$$

故 \mathbf{A} 在直角坐标系的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a_x + \frac{1}{2} a_y\right) + 2\left(-\frac{1}{2} a_x + \frac{\sqrt{3}}{2} a_y\right) + 5a_z \\ &= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)a_x + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)a_y + 5a_z。 \end{aligned}$$

同理, 可求得 \mathbf{B} 在直角坐标系的表达式为

$$\mathbf{B} = \left(-1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a_x + \left(-\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)a_y - a_z。$$

因此, 在直角坐标系中, 点 S 上有

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = -2a_x + 3a_y + 4a_z。$$

上式是 \mathbf{C} 在直角坐标系中的表达式, 再将其转换成柱坐标系表达式。

在点 $S, \varphi = \frac{\pi}{4}$ 据公式(1-32a), 在该点上柱坐标系的 a_r, a_φ 与 a_x, a_y 关系为

$$a_x = \cos\varphi a_r - \sin\varphi a_\varphi = \cos \frac{\pi}{4} a_r - \sin \frac{\pi}{4} a_\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} a_r - \frac{1}{\sqrt{2}} a_\varphi,$$