

高等学校教材

电磁场与电磁波

(第三版)

谢处方 饶克谨 编

赵家升 袁敬闲 修订

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/谢处方,饶克谨编;赵家升,袁敬阁
修订. —3版. —北京:高等教育出版社,1999
ISBN 7-04-007236-X

I. 电… II. ①谢… ②饶… ③赵… ④袁… III. ①电
磁场 ②电磁波 IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 05005 号

电磁场与电磁波 (第三版)
谢处方 饶克谨 编
赵家升 袁敬阁 修订

出版发行	高等教育出版社	邮政编码	100009
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	传 真	010-64014048
电 话	010-64054588		
网 址	http://www.hep.edu.cn		
经 销	新华书店北京发行所	版 次	1980 年 1 月第 1 版
印 刷	北京民族印刷厂		1999 年 6 月第 3 版
开 本	787×1092 1/16	印 次	1999 年 6 月第 1 次印刷
印 张	16.75	定 价	20.00 元
字 数	400 000		

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等
质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第三版序言

本书是谢处方教授和饶克谨教授编著、高等教育出版社1987年7月出版的《电磁场与电磁波》(第二版)的修订本。因谢、饶两位教授年事已高,修订工作由赵家升教授、袁敬阁教授共同完成。修订过程中参照了全国普通高等学校工科电磁场理论课程教学指导小组1993年制订,并由原国家教委颁布的教学基本要求,吸收了部分高等院校教师使用该教材后提出的意见和建议,同时也融入了修订者长期使用该教材进行教学的体会。

与上一版相比本次修订在教学内容和体系结构上主要做了以下调整:

(1)保留原书的编写体系,按静电场、恒定磁场、麦克斯韦方程、正弦电磁场与波的顺序组织教材内容,但在写法上和章节安排上都作了较大的调整。譬如,把静电场和恒定磁场中的电场强度 E 和磁感应强度 B 的定义、两个基本实验定律和矢量积分公式以及洛仑兹力公式集中编写为新的一章“电磁场中的基本物理量和基本实验定律”。

(2)撤消原书“恒定电场”一章,部分内容并入“静电场分析”。

(3)撤消原书“带电粒子与场的相互作用”一章,有关内容编入“静电场分析”、“恒定磁场分析”等章中,不强调相互作用的概念,只讨论带电粒子在外场中的运动。

(4)将原书“静态场的解”一章改为“静态场边值问题的解法”,并紧接在“静电场分析”之后,目的是使学生能更集中理解和掌握位场求解的一般方法。另外,该章还删去了原有的复变函数法和许瓦兹-克利斯多菲变换。

(5)将原书的“波导与谐振腔”一章改为“导行电磁波”,增加传输线的内容。

(6)将书后习题重新编排和增补,并给出部分答案。

本书共分9章,即矢量分析、电磁场中的基本物理量和基本实验定律、静电场分析、静态场边值问题的解法、恒定磁场分析、时变电磁场、正弦平面电磁波、导行电磁波、电磁波辐射。每章末均附有小结。书末附有附录和部分习题答案。

本书第1,2,3,4,5章由袁敬阁执笔;第6,7,8,9章由赵家升执笔。王圆副教授选编了第6至9章的习题,并作了解答。全书由赵家升统稿。

本书修订工作得到了原编者电子科技大学谢处方、饶克谨教授的关心、指导并提出不少宝贵意见。全书承北京理工大学卢荣章教授审阅,修订者在此表示衷心感谢。

对本书尚存的缺点和不足之处,欢迎读者批评指正。

赵家升 袁敬阁

1997年10月于电子科技大学

第二版序言

本书第一版于1979年出版,供工院校无线电技术专业作为试用教材,迄今已五年。在各高等院校的教学中,教师和学生提出不少使用经验和意见;同时,编者也感到在第一版中有一些章节不能适应迅速发展的高校教学的需要。因此,在广泛吸收意见的基础上进行了第二版的编写。

在编写中我们力求使内容结合教学需要,特别是适应近年来学生的数学和物理基础有所提高的状况;尽量使理论体系更为完整和合理;并尽量注意同前后课程的衔接,注意加强对学学生解题能力的训练。

与第一版相比,本书较大的改进有下列诸方面:(1)增加了矢量分析作为第一章,以便集中学习场的分析方法,和更好地建立场的概念;(2)删去了同普通物理学重复过多的地方,以及删去了极化和磁化的微观机理的分析,这样,使电磁场部分篇幅有所减少,而内容有所深化;(3)加强了电磁波部分,加深了概念,增加了一些深入的内容和结合工程的内容;(4)部分内容经过改写,在讲述方法上吸取了使用者的经验和意见以及一些国内外教材的优点;(5)精选并增添了例题和习题,习题并附有答案。

本书共分11章,即矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的解、时变电磁场、平面电磁波、波导和谐振腔、辐射与绕射、带电粒子与场的相互作用、狭义相对论。每章附有小结和习题;书末有附录。正文中用小体字排印的是较深入的内容或补充说明。有*号的习题是较深的习题。本书的一些章节在教学中可以根据各自的需要决定取舍。

本书前六章由饶克谨执笔,后五章由谢处方执笔。

本书承黄席椿教授审阅,提出不少宝贵意见。在第一版使用过程中各高等院校的教师也提出许多宝贵的意见和建议,对本书的编写起了促进作用。编者对此表示衷心的感谢。

编者衷心希望广大的读者对本书中的缺点和不足之处提出批评和指正。

谢处方 饶克谨

1985年9月于成都电讯工程学院

第一版序言

本书是为高等院校无线电技术及器件类专业编写的教学用书。编者希望学生在学完本书后能掌握电磁场与电磁波两个方面的基本概念与基本理论,为今后学习其它后续课或在电磁场与电磁波方面进一步深入学习打下必要的基础。

全书是按学生已学完《高等数学》、《普通物理学》和一部分电路课程(包括长线理论)的基础上编写的。内容可供一学期教学,各校可根据各自的需要确定取舍的内容。

全书采用国际单位制。

为了帮助学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力,书中每章末均附有习题。

书末有矢量代数、正交曲线坐标系和单位换算等附录,以备参考。

全书共分十章。前面五章由饶克谨执笔,后面五章由谢处方执笔。

本书在编写和出版过程中得到各级领导、兄弟院校和校内各单位许多同志的支持与协助;并承黄席椿教授对全书进行审阅,提出不少宝贵意见,谨在此表示衷心的感谢。

由于编写时间较仓促,加上编者水平所限,书中错误和不当之处在所难免,欢迎广大读者提出批评指正。

谢处方 饶克谨

1979年1月于成都电讯工程学院

小结	(73)
习题	(75)
第 4 章 静态场边值问题的解法	(79)
4.1 直角坐标中的分离变量法	(79)
4.2 圆柱坐标中的分离变量法	(83)
4.3 球坐标中的分离变量法	(86)
4.4 镜像法	(90)
4.5 有限差分法	(96)
小结	(100)
习题	(100)
第 5 章 恒定磁场分析	(104)
5.1 恒定磁场分析的基本变量	(104)
5.2 真空中磁场的基本方程	(105)
5.3 矢量磁位	(110)
5.4 磁偶极子的矢量位和标量位	(115)
5.5 物质的磁化现象 磁化强度	(117)
5.6 磁介质中磁场的基本方程	(118)
5.7 磁场的边界条件	(119)
5.8 标量磁位	(124)
5.9 自电感 互电感	(127)
5.10 磁场能量	(130)
5.11 磁场力	(132)
小结	(134)
习题	(136)
第 6 章 时变电磁场	(138)
6.1 法拉第电磁感应定律	(138)
6.2 位移电流	(141)
6.3 麦克斯韦方程	(143)
6.4 时变电磁场的边界条件	(144)
6.5 坡印廷定理和坡印廷矢量	(148)
6.6 波动方程	(149)
6.7 动态矢量位和标量位	(150)
小结	(151)
习题	(153)
第 7 章 正弦平面电磁波	(155)

7.1 亥姆霍兹方程	(155)
7.2 平均坡印廷矢量	(156)
7.3 理想介质中的均匀平面波	(157)
7.4 波的极化特性	(163)
7.5 损耗媒质中的均匀平面波	(164)
7.6 对平面分界面的垂直入射	(168)
* 7.7 对平面分界面的斜入射	(173)
7.8 相速和群速	(179)
小结	(180)
习题	(181)
第 8 章 导行电磁波	(184)
8.1 沿均匀导波装置传播的波的一般特性	(184)
8.2 矩形波导	(188)
8.3 矩形波导中的 TE_{10} 波	(195)
* 8.4 圆柱形波导	(197)
* 8.5 波导中的能量传输与损耗	(202)
8.6 传输线方程及其解	(206)
8.7 传输线上波的传输特性参数	(209)
8.8 传输线的工作状态	(211)
8.9 谐振腔	(214)
小结	(219)
习题	(220)
第 9 章 电磁波辐射	(223)
9.1 滞后位	(223)
9.2 电偶极子的辐射	(225)
9.3 电与磁的对偶性	(230)
9.4 磁偶极子与开槽天线	(232)
9.5 天线阵	(235)
小结	(237)
习题	(238)
附录	(240)
附录 1 圆柱坐标和球坐标	(240)
附录 2 重要的矢量公式	(243)
附录 3 量和单位	(245)
部分习题答案	(248)

第1章 矢量分析

研究宏观电磁场与电磁波之前,我们先介绍分析矢量场和标量场问题的数学工具:矢量分析(或称矢量的微分和积分)。之后引入亥姆霍兹定理,它是各种矢量场共同性质的总结。

1.1 标量场和矢量场

数学上,实数域内任一代数数量 a 都可称为标量。若标量为代数变量 x ,则它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。在物理学中,任意代数数量一旦被赋予“物理单位”,则成为一个具有物理意义的标量,即所谓的物理量,例如电压 u 、电荷量 Q 、电流 i 、面积 S 等等。

一般的三维空间内某一点 P 处存在一个既有大小(或称模)又有方向特性的量称为实数矢量,写成 A ,而 A 表示 A 的大小(或 A 的模)。若用图形表示,从该点出发画一条带有箭头的直线段,线段的长度表示实数矢量 A 的模 A ,箭头指向表示 A 的方向,如图 1.1.1 所示。

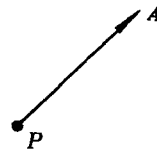


图 1.1.1 $P(x, y, z)$ 点处的矢量

矢量一旦被赋予了“物理单位”,便成为具有物理涵义的矢量,如电场强度矢量 E 、磁场强度矢量 H 、作用力矢量 F 、速度矢量 v 等等。显然必须有两个变量才能确定一个实数矢量(即所谓含有两个信息量的物理量),若用单位矢量 a 表示矢量 A 的方向,则 $A = aA$, $a = A/A$ 。实数矢量 A 的模(A)的定义域为 $(0, +\infty)$, a 可在空间任意指向。由于矢量的二变量特性,决定了矢量的乘法有两种:矢量的标积 $A \cdot B = p$; 矢量的矢积 $A \times B = C$ 。若 A 为未知矢量,则由矢量的标积和矢积两个方程就能确定 A 。两实数矢量之间的除法是没有任何意义的。

如果考虑某一空间区域中,某物理系统的状态可以用空间地点和时间的函数 Φ 来描绘,可任取一个参考点 O ,从 O 点出发的位置矢量 r 表示空间每一点的位置,如图 1.1.2(a)所示。于是物理状态在每一时刻 t 每一点(r 处)的数值可以写成 $\Phi(r, t)$ 。物理量数值的无穷集合表示一种“场”,例如物体的温度分布便是一个温度场 $T(r, t)$,电位分布表明是一个电位场 $\varphi(r, t)$ 。“场”的一个重要属性是它占有一个空间,而且在该空间域内,除有限个点或表面外, $\Phi(r, t)$ 是处处连续的。若物理状态与时间无关,则 $\Phi(r)$ 所代表的是静态场;反之,则代表动态场或时变场。

当研究物理系统中温度、压力、密度等在一定空间内的分布状态时,数学上只需用一个代数变量来描绘,这些代数变量(即标量函数)所定出的场就称为标量场。然而,有许多物理系统,其状态不仅需要定出大小,而且需要定出方向,例如,流体空间中的流速分布,系统的状态需要

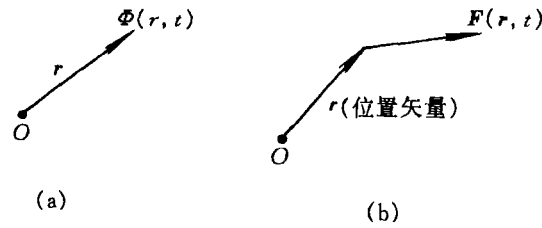


图 1.1.2 (a)标量场 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (b)矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$

用一个实数矢量的点的函数 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ 来描绘,故它是一个矢量场。空间区域内的矢量场是描绘每一点处物理矢量的无穷集合,一般而言,它们的大小和方向是逐点变化的,如图 1.1.2(b)所示,每一点处可以用一个箭矢表示。三维空间中一个矢量可以用坐标的三个分量表示,一个矢量场可以分解为三个分量场,例如在直角坐标内

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e_x F_x(\mathbf{r}) + e_y F_y(\mathbf{r}) + e_z F_z(\mathbf{r}) \quad (1.1.1)$$

其中 $F_x(\mathbf{r}), F_y(\mathbf{r})$ 和 $F_z(\mathbf{r})$ 分别对应着三个标量场。

研究标量场和矢量场时,以“场图”表示场变量在空间逐点演变的情况具有很大的意义。对于标量场 $\Phi(\mathbf{r})$,用“等值面”图,如图 1.1.3 所示。空间内标量值相等的点集合形成的曲面称为等值面,例如气象图上的等压线,地图上的等高线等。显然,等值面的方程式为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{常数值} \quad (1.1.2)$$

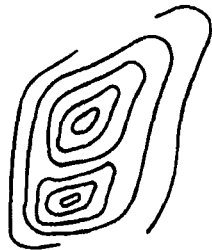


图 1.1.3 标量场的等值面图形

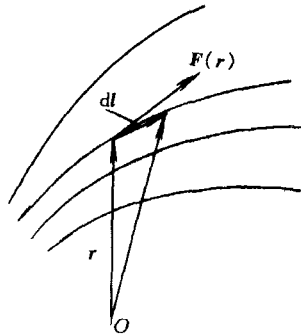


图 1.1.4 力线图

对于矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$,则用一些有向曲线来形象地表示矢量在空间的分布,称为力线或流线,如图 1.1.4 所示。力线上任意点的切线方向必定与该点的矢量方向相同,即

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$$

上式乘以 dl 后,得

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.3)$$

式中 $d\mathbf{r}$ 为力线切向的一段矢量, dl 为力线上的有向微分线段。式(1.1.3)为力线的微分方程式。

在直角坐标内,式(1.1.3)可写成

$$\frac{dx}{F_x(\mathbf{r})} = \frac{dy}{F_y(\mathbf{r})} = \frac{dz}{F_z(\mathbf{r})} \quad (1.1.4)$$

按统一规则,绘制出力线,则既能根据力线确定矢量场中各点矢量的方向,又可根据各处力线的疏密程度,判别出各处矢量的大小及变化趋势。

1.2 矢量与矢量场的不变特性

描绘物理状态空间分布的标量函数 $\Phi(\mathbf{r})$ 和矢量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, 在时间为一定值的情况下, 它们是唯一的, 其大小或方向与所选择的坐标系无关, 即对于坐标系的变换, $\Phi(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的大小与方向保持不变。常用的正交坐标系有三种: 直角坐标系 $(x, y, z; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, 圆柱坐标系 $(r, \alpha, z; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z)$ 以及球坐标系 $(r, \theta, \varphi; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, 这三种常用坐标系的坐标及单位矢量之间的转换关系见附录 1。矢量函数在上述三种坐标系内应有的关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{e}_x F_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y F_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z F_z(x, y, z) \\ &= \mathbf{F}(r, \alpha, z) = \mathbf{e}_r F_r(r, \alpha, z) + \mathbf{e}_\alpha F_\alpha(r, \alpha, z) + \mathbf{e}_z F_z(r, \alpha, z) \\ &= \mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{e}_r F_r(r, \theta, \varphi) + \mathbf{e}_\theta F_\theta(r, \theta, \varphi) + \mathbf{e}_\varphi F_\varphi(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

由矢量不变特性, 可得下列恒等式

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\alpha^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\theta^2 + F_\varphi^2 \quad (1.2.2)$$

例 1.2.1 有一个二维矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{e}_x(-y) + \mathbf{e}_y(x)$, 求力线方程, 并定性绘制该矢量场图形。

解: 由式(1.1.4)得

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \quad \text{或} \quad -x dx = y dy$$

两边积分得

$$y^2 + x^2 = C^2$$

上式为圆方程, C^2 为积分常数, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}F(r)$, 而大小 $F(\mathbf{r}) = \sqrt{(-y)^2 + x^2}$, 矢量场的单位矢量

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \sin \alpha = \mathbf{e}_x \frac{-y}{r} + \mathbf{e}_y \frac{x}{r}$$

如图 1.2.1 所示。

若在圆柱坐标系内描绘矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, 则根据直角坐标至圆柱坐标的转换公式, 可求得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{e}_x(-y) + \mathbf{e}_y(x) \\ &= (\mathbf{e}_r \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi)(-r \sin \varphi) + (\mathbf{e}_r \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi)r \cos \varphi \\ &= \mathbf{e}_\varphi r = \mathbf{F}(r, \varphi) \end{aligned}$$

由此可见, 在圆柱坐标系内描绘该矢量场更为简单明了。由于 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的大小正比于 r , 方向为 \mathbf{e}_φ ,

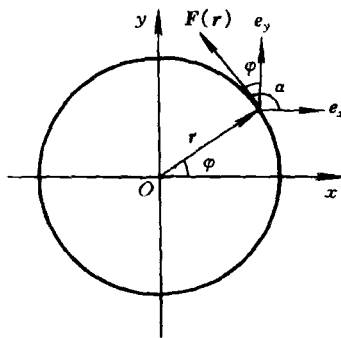


图 1.2.1 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的力线

故定性地描绘矢量场图形时,必定是在半径方向上力线的密度正比于 r ,如图 1.2.2 所示。

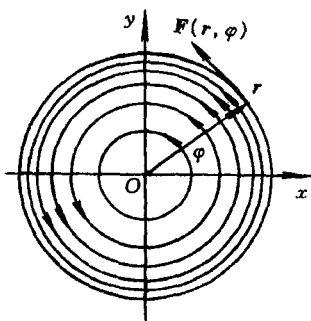


图 1.2.2 $F(\mathbf{r}) = e_r, r$ 的场图形

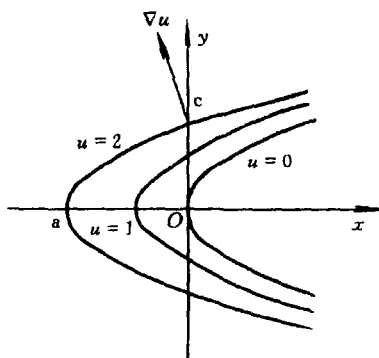


图 1.2.3 $u = y^2 - x$ 的分布图形

例 1.2.2 一个二维标量场 $u(x, y) = y^2 - x$, 试求此标量场的等值面。

解: 二维场 u 不是 z 的函数, 它在任一 $z = \text{const}$ 平面上的分布是相同的。 u 取某一常数时, $u = y^2 - x = C$ 为一抛物线, 故等值面是某一抛物柱面, 如图 1.2.3 所示。若两等值面之间的标量差等于 1 个单位, 则得到一组抛物柱面组

$$\begin{aligned} y^2 - x = 0, & & [u(x, y) = 0] \\ y^2 - x = 1, & & [u(x, y) = 1] \\ y^2 - x = 2, & & [u(x, y) = 2] \\ \dots\dots & & \end{aligned}$$

图 1.2.3 所表示的等值线族便是该标量场在 $z = \text{const}$ 平面上的分布图形。

1.3 矢量的通量 散度

在分析和描绘矢量场的性质时, 矢量穿过一个曲面的通量是个重要的基本概念。

先介绍面元矢量, 如图 1.3.1 所示, 一个面元除了大小以外, 它在空间还有一定的取向, 我们可用一个矢量表示面元, 取一个与面元相垂直的单位矢量 \mathbf{n} , 则面元矢量定义为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad \text{或} \quad d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS \tag{1.3.1}$$

\mathbf{n} 的取法有两种情形: 一是 dS 为一个开表面上的面元, 这个开表面由一条闭合曲线 C 围成, 如图 1.3.2 所示, 选择闭合环 C 的环行方向后, 按右螺旋法则, 螺旋前进的方向为 \mathbf{n} 的方向; 另一情形是 dS 为闭合面上的一个面元, 则一般 \mathbf{n} 取闭合面的外法线方向。

在矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 中, 取一个面元 $d\mathbf{S}(\mathbf{r})$, 因为 $d\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 很小, 其面上各点 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的大小可视为相等。矢量 \mathbf{A} 穿过 $d\mathbf{S}$ 的通量定义为 \mathbf{A} 与 $d\mathbf{S}$ 的标量积, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \cos\theta dS(\mathbf{r}) \tag{1.3.2}$$

其中 $\theta = (\mathbf{e}, \mathbf{n})$, \mathbf{e} 为矢量 \mathbf{A} 方向的单位矢量, $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \cos\theta$ 。例如在流体中, 流体的流速是一个矢量场 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, 而 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 则为流过 $d\mathbf{S}$ 的每秒流量, 它是个标量, 即通量是一个标量。

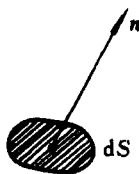


图 1.3.1 面元矢量

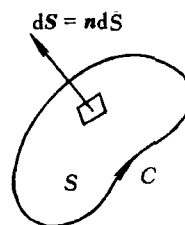


图 1.3.2 开表面

将曲面 S (开表面) 上各面元的 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 相加, 它表示矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 中穿过曲面 S 的通量, 也称为 \mathbf{A} 对 S 的面积分。

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S A \cos\theta dS \quad (1.3.3)$$

在矢量场分析中, 穿过任何闭合面 S 上的通量具有特殊的意义, 用积分符号 \oint 表示穿过闭合面的通量, 即

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \oint_S A(\mathbf{r}) \cos\theta dS(\mathbf{r}) \quad (1.3.4)$$

仍以流体场为例说明式(1.3.4)的意义。如果穿过闭合面 S 的 \mathbf{v} 通量不等于零, 则表示闭合面包围的体积内有净流量流出或流入。若 $\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} > 0$, 则表示每秒有净流量流出, 说明体积内必定存在着流体的“源”; 反之, 若 $\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} < 0$, 则表示每秒有净流量流入, 说明体积内存在流体的“沟”(或称负源)。当然, 前一情况体积内也可能存在“沟”, 但源总是大于沟; 后一情况刚好反过来, 体积内总是沟大于源。如果 $\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 则流入体积内和从体积内流出的流量相等, 即体积内“源”和“沟”的总和为零或体积内既无源也无沟。

上述通量是一个大范围面积上的积分量, 它并不能说明体积内每一点的性质。为了研究矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在一个点附近的通量特性, 我们把闭合面收缩, 使包含这个点在内的体积元 $\Delta\tau \rightarrow 0$, 取如下的极限

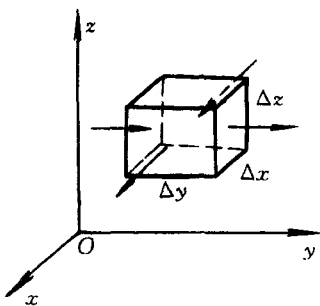
$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{\Delta\tau}$$

称此极限式为 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在该点的散度, 并记为 $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$, 即散度的定义式为

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left\{ \left[\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \right] / \Delta\tau \right\} \quad (1.3.5)$$

它表示从该点单位体积内散发出来的 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的通量。显然, 散度 $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 与 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 沿空间位置的变化有关。

由散度的定义可知, $\text{div}\mathbf{A}$ 与所取体积元 $\Delta\tau$ 的形状无关, 只要在取极限时, 所有的尺寸都趋于零即可。现在在直角坐标内来推导这个关系, 为简化起见将矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 写成 \mathbf{A} , 以所研究

图 1.3.3 直角坐标内计算 $\text{div} \mathbf{A}$

的点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 为顶点作一个平行六面体, 如图 1.3.3 所示, 图中三个边分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, 分别计算三对表面穿出的 \mathbf{A} 的通量。左右一对表面穿出的净通量等于

$$-A_y \Delta z \Delta x + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \Delta x = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从上下一对表面穿出的净通量等于

$$-A_z \Delta x \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

从前后一对表面穿出的净通量等于

$$-A_x \Delta y \Delta z + \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

又有 $\Delta \tau = \Delta x \Delta y \Delta z$, 所以根据式(1.3.5), 得到

$$\lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta \tau} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因此 \mathbf{A} 的散度为

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.3.6)$$

圆柱坐标内和球坐标内散度的计算式参看附录 2。在矢量分析中, 经常用到哈密顿算符(读作“del”或“纳布拉”), 记作“ ∇ ”, 在直角坐标内, 它写成

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.3.7)$$

因为它具有矢量的形式, 故又称矢性微分算符。由此, 式(1.3.6)可以写成

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

例 1.2.3 矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ 或 $\mathbf{r}(x, y, z)$, 计算 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 穿过一个球心在原点, 半径为 a 的球面的通量; 并计算此矢量场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r})$ 。

解: 必须注意: 位置矢量场和位置矢量(又称矢径)是不同的概念, 如图 1.3.4 所示。位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$, 是确定空间某点的位置。而位置矢量场 $\mathbf{r}(\mathbf{r})$ 则表示空间任何一点处矢量场的大小和方向与该点的位置矢量 \mathbf{r} 成比例。

即 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}(\mathbf{r}), (K=1)$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z z(\mathbf{r}),$$

其中 $x(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r}), y(\mathbf{r}) = A_y(\mathbf{r}), z(\mathbf{r}) = A_z(\mathbf{r})$ 表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}$ 处矢量场的三个分量分别为 x, y, z 。

由于在球坐标内, $\mathbf{r}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r r, r=a$ 的球面上各点的矢量为 $\mathbf{r}(a) = \mathbf{e}_r a$, 其大小处处相等, 而球面上的面元矢量 $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$, 所以

$$\oint_S \mathbf{r}(a) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S a dS (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) = a \oint_S dS = 4\pi a^3$$

在直角坐标内计算 $\nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r})$, 则有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r}) &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \end{aligned}$$

若在球坐标内计算, 则

$$\nabla \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = 3$$

证明矢量场的散度与坐标的选择无关。

矢量分析中的一个重要定理是

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.3.9)$$

上式称为散度定理(或高斯定理)。证明这个定理时, 将闭合面 S 包围的体积 τ 分成许多体积元: $d\tau_1, d\tau_2, \dots$, 计算每个体积元的小闭合面上穿出的 \mathbf{A} 的通量, 然后叠加。由式(1.3.5)得

$$\oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau_1, \quad \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau_2, \quad \dots$$

由于相邻两体积元有一个公共表面, 这个公共表面上的通量对这两个体积元来说恰好等值异号, 求和时就互相抵消了。除了邻近 S 面的那些体积元外, 所有体积元都是由几个与相邻体积元间的公共表面包围而成的, 这些体积元的通量总和为零。而邻近 S 面的那些体积元, 它们有部分表面是 S 面上的面元 $d\mathbf{S}$, 这部分表面的通量没有被抵消, 其总和刚好等于从闭合面 S 穿出的通量。因此有

$$\oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \dots = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

故得到

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau_1 + \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau_2 + \dots = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

式(1.3.9)得证。例 1.2.3 中 $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ 为一常量, 因此 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{r} d\tau = 3 \int_V d\tau = 3 \times \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$, 亦即球表面上流出的通量。

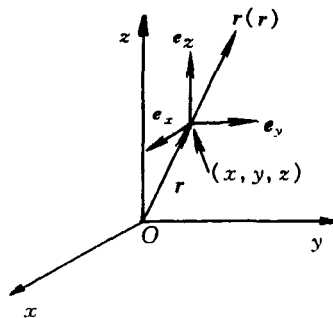


图 1.3.4 位置矢量场 $\mathbf{r}(\mathbf{r})$

1.4 矢量的环流 旋度

在矢量场 \mathbf{A} 中, 从一点沿某一指定曲线 C 到达另一点, 我们把路径上每一线元 $d\mathbf{l}$ 定义为

线元矢量 $d\mathbf{l}$, 取路径 C 上的 \mathbf{A} 和 $d\mathbf{l}$ 的标量积 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A \cos\theta dl$ (其中 θ 为 \mathbf{A} 与 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角), 然后把所有的标量积叠加, 就称为 \mathbf{A} 沿曲线 C 的线积分。例如, 一个质点在力场中沿一条曲线运动时, 所作的功为力场 \mathbf{F} 的线积分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ 。

当路径的起点和终点重合, C 是一条闭合路径时, 线积分符号写作

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A \cos\theta dl \quad (1.4.1)$$

称为 \mathbf{A} 的环流。矢量的环流和矢量穿过闭合面的通量一样都是描绘矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 性质的重要量。同样以流体的速度矢量场为例, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 可能有两种特性: 一是其环流量为零, 即 $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 这是无漩涡的流动情况; 另一是 $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, 是流体沿闭合回路作漩涡状流动的情况。

从矢量场分析的要求来看, 我们希望知道每个点附近的环流状态。为此, 我们把闭合路径收缩, 使它包围的面积元 ΔS 趋近于零, 并求其极限值

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

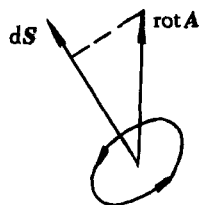
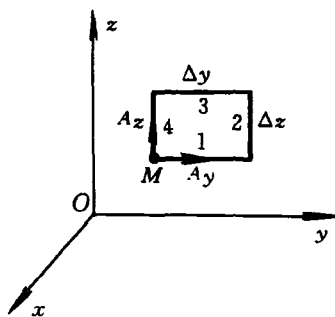
此极限值的意义是环流面密度而不是环流。因为闭合路径收缩及其面元 ΔS 趋近于零完全是任意的, 为此规定面元矢量与闭合路径 C 存在右螺旋关系。不难看出, 上述的极限与面元的方向有关。例如流体场中, 某点附近的流体沿着一个方向在某一面上呈漩涡状流动时, 若面元与该漩涡面重合 (或者称面元矢量与漩涡面矢量一致), 则上述极限值具有最大值; 若面元矢量与漩涡面矢量之间有一夹角, 则所得的极限值总是小于其最大值; 若面元矢量与漩涡面矢量相垂直时, 极限值等于零。这些结果表明: 此极限值是某一固定矢量在任意面元方向上的投影。当面元方向与此固定矢量相重合时, 极限值为最大值, 也即表示该矢量的模。我们称此固定矢量为 \mathbf{A} 的旋度, 记为 $\text{rot}\mathbf{A}$ 或 $\text{curl}\mathbf{A}$ 。因此有关系式

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \text{rot}_n \mathbf{A} \quad (1.4.2)$$

其中 $\text{rot}_n \mathbf{A}$ 为矢量 $\text{rot}\mathbf{A}$ 在面元矢量 (用 \mathbf{n} 表示其方向) 上的投影, 如图 1.4.1 所示。

矢量场的旋度和散度均用来描绘矢量场 \mathbf{A} 在空间变化的特点。下面我们来推导直角坐标系内 $\text{rot}\mathbf{A}$ 的表达式。由旋度的定义可以看出式 (1.4.2) 中的极限值与所取面元的形状无关。我们以研究的点 M 为顶点, 取一个平行于 yz 面的矩形面元 (图 1.4.2), 则面元矢量与 x 轴平行, 其模用 ΔS_x 表示。 $M(x, y, z)$ 点的 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e_x A_x(\mathbf{r}) + e_y A_y(\mathbf{r}) + e_z A_z(\mathbf{r})$, \mathbf{A} 沿回路 1234 的积分为

$$\begin{aligned} \oint_{1234} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y - A_z \Delta z \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

图 1.4.1 $\text{rot } A$ 在面元矢量上的投影图 1.4.2 直角坐标系内计算 $\text{rot } A$

$$\text{故} \quad \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{1234} A \cdot dl}{\Delta S_x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \text{rot}_x A$$

根据上述,此极限是 $\text{rot } A$ 在 ΔS_x 上的投影 $\text{rot}_x A$,也即 $\text{rot } A$ 在 x 轴上的分量。

相似地取面元 $\Delta S_y, \Delta S_z$,分别平行于 y 轴和 z 轴,通过与上面相同的推导得到

$$\lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta S_y} = \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial x} = \text{rot}_y A$$

它是 $\text{rot } A$ 在 y 轴上的分量,以及

$$\lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint A \cdot dl}{\Delta S_z} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \text{rot}_z A$$

它是 $\text{rot } A$ 在 z 轴上的分量。因此,得到

$$\begin{aligned} \text{rot } A &= e_x \text{rot}_x A + e_y \text{rot}_y A + e_z \text{rot}_z A \\ &= e_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + e_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + e_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

上式可写为

$$\left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z) = \nabla \times A = \text{rot } A \quad (1.4.3)$$

也可写成

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.4.4)$$

其它坐标系中, $\nabla \times A$ 的表示式见附录 2。

例 1.4.1 求矢量场 $A(r) = e_x x^2 + e_y y^2 + e_z z^2$ 沿着 xy 面内一个闭合路径 C 的线积分,此闭合路径由 $(0,0)$ 和 $(2, \sqrt{2})$ 之间的一段抛物线 $y^2 = x$ 和两段平行于坐标轴的直线轴组成,如图(1.4.3)所示。再计算 A 的旋度。

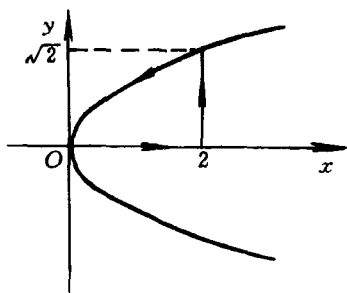


图 1.4.3

解： 因为回路在 xy 平面内, $dz=0$, 故有

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_x dx + A_y dy = x^2 dx + y^2 dy$$

在计算沿抛物线一段路径的积分时, 可以利用 $y^2=x$, 消去一个变量, 例如 y , 得到

$$dy = dx / (2\sqrt{x}) \quad , \quad y^2 dy = (\sqrt{x} dx) / 2$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^{\sqrt{2}} y^2 dy + \int_2^0 \left(x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3} \Big|_2^0 + \frac{x^{3/2}}{3} \Big|_2^0 = 0 \end{aligned}$$

注意在计算路径上任一点的乘积 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ 时, 不管绕行的方向如何, dx , dy 和 dz 都取正值; 绕行方向则由相应的积分上下限来考虑。

求本例中 \mathbf{A} 的旋度, 可将 \mathbf{A} 代入式(1.4.3), 立刻得到 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, 它是处处无涡旋现象的矢量场。

旋度有一个重要的性质, 就是它的散度恒等于零。我们在直角坐标系中来证明这个性质。

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因为旋度和散度的定义都与所取的坐标无关, 所以通过以上证明, 得到一个普遍适用的公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{1.4.5}$$

根据式(1.4.5), 对于一个散度处处为零的矢量场 \mathbf{B} , 我们总可以把它表示为某一矢量场 \mathbf{A} 的旋度, 即如果 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, 则可令 $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ 。

在矢量分析中, 除散度定理之外, 另一个重要定理就是斯托克斯定理, 即

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \tag{1.4.6}$$

其中 S 为回路 C 所包围的面积。其证明如下:

把如图 1.4.4 所示的一个曲面 S 分成许多面元。对每个面元, 沿包围它的小闭合回路取 \mathbf{A} 的环流, 应用旋度矢量的矢量定义式(1.4.2)得

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_1$$