配合主教材徐芝纶编

弹性力学简明教程

学习指导

王润富 编

高等教育出版社

内容简介

本书是为配合教育部“十五”国家级规划教材

的教师参考。

本书的内容是，
使读者加深对弹性力学基本内容的理解，增强自学能力；
介绍了较多的典型例题的解题过程，提供了教材中习题的提示和答案，以增强读者解决实际问题的能力；

图书在版编目

高等教育出版社，2004.1
ISBN 7－04－013081－5

学参考资料 Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	14.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	260 000	定　　价	16.80 元

策划编辑　黄　毅
责任编辑　姜　凤
封面设计　于　涛
责任绘图　吴文信
版式设计　张　岚
责任校对　存　怡
责任印制

前　　言

弹性力学课程教科书，其第三版为普通高等教育“十五”国家级规划教材。本书是为配合使用

的学生和自学人员使用，并可供讲授弹性力学的教师参考。

在

神和实践能力的高级专门人才”。为贯彻这一精神，并考虑到弹性力学是工程上应用广泛，又较为难学的一门技术基础课程，为此，本书在编写时，考虑和安排了下列内容：

和基本解法)

如，对各基本方程的导出和理解；对按应力求解方法，按位移求解方法，变分法，有限单元法和差分法的应用；对一些难点

用等)

实际问题的能力，在本书中详细地叙述了解题的思路和方法，介绍了50多道典型例题的解题过程，对教科书中一百余道习题提供了提示和答案。

地扩充和加深弹性力学的知识。例如，关于弹性力学的发展史和理论的发展过程；按位移求解和按应力求解方法中位移势函数、位移函数、应力函数的引用；各种解法在工程实际问题中的应用等，作了适当的介绍，以增强读者的思维分析的能力。对于教科书中已作详细和深入地叙述的内容，则在本书中不再作详细复述。

本书的编写和出版，要感谢河海大学、河海大学工程力学系和

学)

与张元直编审的审稿和提出的宝贵意见。

编写学习指导还是一种初步的尝试，盼讲授弹性力学的教师和使用此书的读者提出宝贵意见，以便今后改进。

河海大学　王润富

2003年10月

目　　录

主要符号表

弹性力学

坐标　直角坐标 x，y，z；圆柱坐标 ρ，ϕ，z；极坐标 ρ，ϕ。

体力分量　f_x，f_y，f_z（直角坐标系）　f_ρ，f_ϕ，f_z（圆柱坐标系）　f_ρ，f_ϕ（极坐标系）

面力分量　$\bar{f}_x$，$\bar{f}_y$，$\bar{f}_z$（直角坐标系）　$\bar{f}_\rho$，$\bar{f}_\phi$，$\bar{f}_z$（圆柱坐标系）　$\bar{f}_\rho$，$\bar{f}_\phi$（极坐标系）

位移分量　u，v，w　u_ρ，u_ϕ，u_z（圆柱坐标系）　u_ρ，u_ϕ（极坐标系）

边界约束分量　$\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{w}$（直角坐标系）

方向余弦　l，m，n

应力分量　正应力 σ，切应力 τ；全应力 p；斜面应力分量 p_x，p_y，p_z（直角坐标系）　σ_n，τ_n；体积应力 Θ。

应变分量　线应变 ε，切应变 γ；体应变 θ。

势能和功　形变势能 U，外力势能 V，总势能 E_p。功 W。

艾里应力函数　Φ。

弹性模量 E，切变模量 G，体积模量 K。

泊松比 μ。

有限单元法（平面直角坐标系，三结点三角形单元）

体力列阵　$f=(f_x\quad f_y)^{\mathrm{T}}$。

面力列阵　$\bar{f}=(\bar{f}_x\quad \bar{f}_y)^{\mathrm{T}}$。

集中力列阵　$f_P=(f_{Px}\quad f_{Py})^{\mathrm{T}}$。

位移函数列阵　$d=(u(x,y)\quad v(x,y))^{\mathrm{T}}$。

单元结点位移列阵　$\delta^e=(\delta_i\quad \delta_j\quad \delta_m)^{\mathrm{T}}$，$\delta_i=(u_i\quad v_i)^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元结点力列阵　$F^e=(F_i\quad F_j\quad F_m)^{\mathrm{T}}$，$F_i=(F_{ix}\quad F_{iy})^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元结点荷载列阵　$F_L^e=(F_{Li}\quad F_{Lj}\quad F_{Lm})^{\mathrm{T}}$，$F_{Li}=(F_{Lix}\quad F_{Liy})^{\mathrm{T}}$　(i,j,m)

单元位移矩阵　$d=N\delta^e$　（N 为形函数矩阵）

单元应变矩阵　$\varepsilon=B\delta^e$。

单元应力矩阵　$\sigma = D\varepsilon = S\delta^e$　　D 为弹性矩阵，S 为应力转换矩阵)

单元结点力矩阵　$F^e = k\delta^e$　　k 为单元劲度矩阵)

单元结点荷载矩阵　$F_L^e = N^T f_P t + \int_{s_\sigma} N^T \bar{f} \mathrm{d}s t + \int_A N^T f \mathrm{d}x \mathrm{d}y t$。

结点平衡方程组　$K\delta = F_L$　　K 为整体劲度矩阵)

第一章　绪　论

学习指导

在学习本章时，要求学生理解和掌握下面的主要内容：

1. 弹性力学的研究内容，及其研究对象和研究方法，认清它们与材料力学的区别；

2. 弹性力学的几个主要物理量的定义、量纲、正负方向及符号规定等，及其与材料力学相比的不同之处；

3. 弹性力学的几个基本假定，及其在建立弹性力学基本方程时的作用。

§1–1　弹性力学的内容

弹性体力学，简称弹性力学，又称弹性理论

ty)　研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。这里指出了弹性力学的研究对象是弹性体；研究的目标是变形等效应，即应力、形变和位移；而引起变形等效应的原因主要是外力作用，边界约束作用

变的作用。

首先，我们来比较几门力学的研究对象。理论力学一般不考虑物体内部的形变，把物体当成刚性体来分析其静止或运动状态。材料力学主要研究杆件，如柱体、梁和轴，在拉压、剪切、弯曲和扭转等作用下的应力、形变和位移。结构力学研究杆系结构，如桁架、刚架或两者混合的构架等。而弹性力学研究各种形状的弹性体，除杆件外，还研究平面体、空间体，板和壳等。因此，弹性力学的研究对象要广泛得多。

其次，从研究方法来看，弹性力学和材料力学既有相似之处，又有一定区别。弹性力学研究问题，在弹性体区域内必须严格考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，在边界上严格考虑受力条件或约束条件，由此建立微分方程和边界条件进行求解，得出较精确的解答。而材料力学虽然也考虑这几方面的条件，但不是十分严格的。例如，材料力学常引用近似的计算假设

平面截面假设)

似的处理，如在梁中忽略了 σ_y 的作用，且平衡条件和边界条件也不是严格地满足的。一般地说，由于材料力学建立的是近似理论，因此得出的是近似的解答。但是，对于细长的杆件结构而言，材料力学解答的精度是足够的，符合工程上的要求　　5%以下)
出的解答，往往具有较大的误差。这就是为什么材料力学只研究和适用于杆件问题的原因。

弹性力学是固体力学的一个分支，实际上它也是各门固体力学的基础。因为弹性力学在弹性体区域内和边界上所考虑的一些条件，也是其他固体力学必须考虑的基本条件。弹性力学的许多基本解答，也常供其他固体力学应用或参考。

弹性力学在土木、水利、机械、航空等工程学科中占有重要的地位。这是因为，许多工程结构是非杆件形状的，须要用弹性力学方法进行分析；并且对于许多现代的大型工程结构，安全性和经济性的矛盾十分突出，既要保证结构的安全使用，又要尽可能减少巨大的投资，因此必须对结构进行严格而精确的分析，这就须要用弹性力学的理论。例如，现在许多大型水库的坝高达到200 m左右，常采用复杂的坝体结构形式，而水库、水电站等的安全性又十分重要，就必须用弹性力学方法进行分析。

思　考　题

1. 弹性力学和材料力学相比，其研究对象有什么区别？
2. 弹性力学和材料力学相比，其研究方法有什么区别？
3. 试考虑在土木、水利工程中有哪些非杆件和杆系的结构？

§1-2　弹性力学中的几个基本概念

首先，本节着重说明弹性力学中几个重要的基本概念，初学者必须清晰地了解各物理量的定义、记号、量纲、正负方向及其符号的规定，以及与材料力学中的符号规定的区别。否则，在求解弹性力学问题时常常会发生错误，而将错误的结果应用于工程上时则会发生严重事故。例如，对于土木工程中常用的混凝土材料，其抗压强度很高，但抗拉强度较低。如果把正应力的符号搞反了，就有可能造成结构的破坏。

外力是指其他物体对研究对象　　外力包括体力和面力。

体力、面力分别作用于弹性体的体积内、边界面上，用记号 f_x　f_y　f_z 和 $\bar{f}_x$　$\bar{f}_y$　$\bar{f}_z$ 表示，并且分别用单位体积、单位面积所受的力来量度，因此它们

的量纲分别为 $L^{-2}MT^{-2}$ 和 $L^{-1}MT^{-2}$。读者须注意，本书的量纲一律用国际单位制表示，其基本物理量取为长度　　　　　　　　　　　　　体力和面力均以坐标正向的为正，反之为负。这里须要注意的是，

力，在哪一个边界面上的面力均以正标向为正。在正、负坐标面、斜面上的面力也都以正标向为正，并且在斜面上的面力是以单位斜面面积上的作用力数值来表示的。

集度)

内力通常指截面上的合力和合力矩，而应力是表示截面上某一点处单位截面面积上的内力值。应力的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$。由于在截面两边的物体上内力和应力都是成对出现的，且数值相等，方向相反

因此，应力的符号规定就不同于外力。简单地讲，应力以正面正向、负面负向的为正，反之为负。即作用于正坐标面上的正应力和切应力以正标向为正，作用于负坐标面上的应力以负标向为正；相反的方向均为负。

应力与面力相比，在正坐标面上，正的正应力和切应力，与对应的正的法向和切向面力的方向相同，即正方向及其正号规定相同；而在负面上，应力与对应的面力异号，即应力的正方向与对应面力的正方向相反。这点是必须认清的，并且在应用边界条件时必须特别加以注意。弹性力学与材料力学相比，正应力的符号规定两者一致；而切应力的符号规定不完全相同，如图 1−1 所示。材料力学中切应力以使单元或其局部产生顺时针方向转动趋势的为正，这样就与弹性力学有区别。

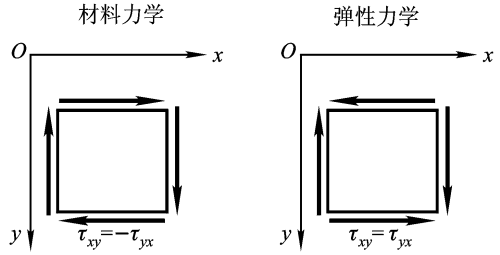

图　1−1

这两门力学关于切应力的正负号规定至今不能统一。其原因是，材料力学通常研究平面上的问题，可以清楚地标明顺时针指向，并且可将其符号规定用于莫尔圆来求斜面上的应力；而弹性力学要考虑的不仅是平面问题，也不再用莫尔圆方法来求斜面应力，而且用弹性力学符号规定表示切应力互等定理十分简便，如 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$，它表示等式两边的切应力不仅数值相等，符号也一致。

形变是指形状的改变，在弹性力学中用线应变和切应变来表示。按定义，一点的应变以通过此点作三个沿正标向微分线段的应变量来表示。线应变以伸长为正，且正的正应力

应。切应变以直角减小为正，以弧度为单位来表示。同样，正的切应力与正的切应变对应。读者可考察图1−2中的微分体，当正的一组切应力作用时

4个切应力同时存在)

令 PA边固定，则微分体将如虚线所示发生变形，4个直角分别增大或减小了 α值。按定义，*PA*，*PB*是通过P点沿正向的微分线段，其直角的改变

少α角)　　$\gamma_{xy}=+\alpha$。由

此可见正的切应力也必然对应于正的切应变。应变均是量纲一的量。

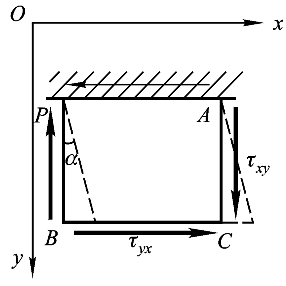

图　1−2

位移是一点位置的移动，用 u，v，w表示，量纲为 L，且均以正标向为正。

以上所定义的体力、面力、应力、应变和位移都是从微分角度导出的，可以精确地表示某一点附近的状态及由于位置不同而发生的变化。并且表示的都是直角坐标系中的量。例如应力只表示了直角坐标面上的应力，斜面上的应力还须进一步求解；应变只表示了沿坐标方向线段的应变，斜线上的应变也须另行求解。

本节详细地叙述了弹性力学中关于体力、面力、应力、应变和位移等的定义、量纲和正负号规定。读者要特别注意应力的符号规定与材料力学的不同之处。还应注意，在岩土工程和土木工程中，由于以压应力为主，常常将压应力取为正号，这些都是在应用中应加以注意的。

思　考　题

1　试画出正、负 *y*面上正的应力和正的面力的方向。

2　在 dx×dy×1的六面体上，试问 x面和 y面上切应力的合力是否相等？

§1−3　弹性力学中的基本假定

弹性力学问题究竟是如何求解的？其实，其研究方法是很简单而明确的：即根据已知的物体边界形状、弹性常数、物体所受的体力，及边界上的面力和约束，来求解表示物体内应力、形变和位移等未知函数。求解的方法是：在弹性体区域内，根据静力学、几何学和物理学三方面的条件，分别建立平

衡微分方程、几何方程和物理方程等三套方程；在边界上根据约束情况和面力情况，分别建立位移边界条件和应力边界条件。然后在边界条件下求解微分方程组，从而解出应力、形变和位移等。

为什么在弹性力学中要提出一些基本假定？这是因为任何学科在进行研究时，总不可能将所有因素都考虑在内，否则该问题将会变成非常复杂而无法求解。因此，任何学科总是首先对事物的各种因素进行分析，既必须抓住那些主要的因素，又必须略去那些影响很小的因素。然后概括这些主要因素建立一种抽象的物理模型，并对该模型进行研究。当然，研究的结果可以用于任何符合该物理模型的实际物体。

弹性力学的五个基本假定，就是概括了弹性力学研究对象的主要因素而建立的一种力学计算模型。即弹性力学是研究理想弹性体
弹性、均匀性和各向同性的假定)
究的范围。

对于这五个基本假定，我们既要理解其定义，也要了解它们在建立弹性力学基本方程中的作用：

连续性——从宏观角度上认为物体是连续的。因此，所有物理量均可以用连续函数来表示，从而可以应用数学分析的工具。

完全弹性——这里包含完全弹性和线性弹性两个概念，因此，物体的应力和应变之间的关系可以用胡克定律来表示，从而使物理方程成为线性的方程。

均匀性——假定物体内都由同种材料所组成。因此，材料的性质，即弹性常数等均与位置

各向同性——假定任一点各个方向的材料性质相同。因此，弹性常数等与方向无关。

小变形假定——它包含两点含义：
的正应变 $\varepsilon\leq10^{-3}\ll1$，切应变 γ 是用弧度表示角度，也是 $\gamma\ll1$；2)
体各点的位移≪物体尺寸。如梁的挠度≪梁的高度。在小变形假定下，我们在建立平衡微分方程时，可以用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，从而使该方程的建立大为简化；在建立几何方程时，由于 $\varepsilon\ll1$，所以 $\varepsilon\gg\varepsilon^2\gg\varepsilon^3$……，因此在同一方程中，可以只保留形变分量的一次幂，而略去形变分量的二次幂及更高阶的小量，从而使几何方程成为线性的方程。

对于超出以上五个基本假定的情况，则不在本教科书中叙述。如应力和应变之间的非线性弹性关系，属于非线性弹性力学；塑性和蠕变属于塑性力学和蠕变力学。薄板的大挠度问题，属于几何非线性问题。对于岩石地基，不仅有塑性和蠕变性质，还有节理、裂隙和断层，因此连续性条件也不满足；

而土质地基，除了蠕变，还有固结过程，及较大的变形等。因此，它们分别在岩石力学和土力学中进行研究。

弹性力学的主要解法可以概括如下：

1. 解析法——根据上述的静力学、几何学、物理学等条件，建立区域内的微分方程组和边界条件，并应用数学分析方法求解这类微分方程的边值问题，得出的解答是精确的函数解。

2. 变分法（能量法）——根据变形体的能量极值原理，导出弹性力学的变分方程，并进行求解。这也是一种独立的弹性力学问题的解法。由于得出的解答大多是近似的，所以常将变分法归入近似的解法。

3. 差分法——是微分方程的近似数值解法。它将上面导出的微分方程及其边界条件化为差分方程

4. 有限单元法——是近半个世纪发展起来的非常有效、应用非常广泛的数值解法。它首先将连续体变换为离散化结构，再将变分原理应用于离散化结构，并使用计算机进行求解的方法。

5. 实验方法——模型试验和现场试验的各种方法。

对于许多工程实际问题，由于边界条件、外荷载及约束等较为复杂，所以常常应用近似解法——变分法、差分法、有限单元法等求解。

对于工科学生，学习弹性力学的目的是：

1. 理解和掌握弹性力学的基本理论（基本概念、基本方程和基本解法）

些基本解答。

2. 能阅读弹性力学文献，并应用已有解答为工程服务。

3. 能应用近似解法——变分法、差分法、有限单元法解决工程实际问题。

4. 为进一步学习固体力学的其他分支学科打下基础。

由于解析法须要求解微分方程的边值问题，从而得出函数式的精确解答，这是非常困难的。因此，我们不要求学生求解新的弹性力学问题的解答。这点不同于材料力学和结构力学的要求。但我们要求学生能用近似解法解决工程实际问题。

下面我们简略地介绍一下弹性力学的发展史。与其他任何学科一样，从这门力学的发展史中，我们可以看出人们认识自然的不断深化的过程：从简单到复杂，从粗糙到精确，甚至是从错误到正确的演变历史。许多数学家、力学家和实验工作者做了辛勤的探索和研究工作，使弹性力学理论得以建立，并且不断地深化和发展。

弹性力学的发展，大致可以分为四个时期。

1. 发展初期（约于1660—1820）

的受力与变形之间的关系。1678年，胡克通过实验，发现了弹性体的变形与

受力之间成比例的规律。1807 年，杨做了大量的实验，提出和测定了材料的弹性模量。

其次，伯努利 1705)　　1776)

了对杆件等构件的研究分析。

2. 理论基础的建立 (约于 1821—1855)

的基本理论，并对材料性质进行了深入的研究。纳维 1820)

出发，建立了各向同性弹性体的方程，但其中只含一个弹性常数。柯西 1820—1822)

何方程和各向同性的广义胡克定律。

格林 (1838)　　21 个独立的弹性常数。此后，汤姆逊由热力学定理证明了上述结果。同时拉梅等再次肯定了各向同性体只有两个独立的弹性常数。至此，弹性力学建立了完整的线性理论，弹性力学问题已经化为指定边界条件下求解微分方程的数学问题。

3. 线性理论的发展时期 (约于 1854—1907)

家应用已建立的线性弹性理论，去解决大量的工程实际问题，并由此推动了数学分析工作的进展。圣维南 1854—1856)

提出了圣维南原理。艾里 1862)　　1882)

1850 及以后)

爱隆对薄壳作了一系列工作等等。弹性力学在这段时期得到了飞跃的发展。

4. 弹性力学更深入的发展时期 (1907 至今)　1907 年以后，非线性弹性力学迅速地发展起来。卡门 1907)

提出了薄壳的非线性稳定问题；力学工作者还提出了大应变问题，非线性材料问题

同时，线性弹性力学也得到进一步的发展，出现了许多分支学科，如薄壁构件力学、薄壳力学、热弹性力学、粘弹性力学、各向异性弹性力学等。

弹性力学的解法也在不断地发展。首先是变分法　及其应用的迅速发展。贝蒂 1872)　　1873—1879)

最小余能原理，以后为了求解变分问题出现了瑞利—里茨 1877,1908)

辽金法 1915)　　1914,1950)

分原理，胡海昌和鹫津 1954,1955)

其次，数值解法也广泛地应用于弹性力学问题。迈可斯 1932)

分方程的差分解法，并得到广泛应用。

1946 年之后，又出现了有限单元法，并且得到迅速的发展和应用，成为现在解决工程结构分析的强有力的方法。

在 20 世纪 30 年代及以后，出现了用复变函数的实部和虚部分别表示弹性