大学物理学习指导

阴其俊　钱水兔
汪　溶　陆　慧　编著

华东理工大学出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内 容 简 介

本书是根据国家教育部物理课程指导委员会制定的《工科大学物理课程基本要求》的精神而编写的学习指导和自测练习用书。全书分为17章,每章均由“基本要求与复习框图”、“阅读指导与问题讨论”、“解题方法与典型例题”以及“自测练习与能力训练”四部分组成,力求做到既复习基本概念,又讲解分析方法;既突出基本内容,又开阔学习视野。本书可供工科院校非物理专业的本科学生使用,也可作为大学物理教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/阴其俊等编著.—上海:华东理工大学出版社,2005.2

ISBN 7-5628-1624-7

Ⅰ.大… Ⅱ.阴… Ⅲ.物理学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第129345号

大学物理学习指导

阴其俊 钱水兔 汪 溶 陆 慧 编著

出版 华东理工大学出版社	开本 787×960 1/16
社址 上海市梅陇路130号	印张 24.5
邮政 邮编200237 电话(021)64250306	字数 463千字
网址 www.hdlgpress.com.cn	版次 2005年2月第1版
发行 新华书店上海发行所	印次 2005年2月第1次
印刷 上海展强印刷有限公司	印数 1-5050册

ISBN 7-5628-1624-7/O·122 定价:29.00元

前　言

大学物理是理工科大学中一门重要的基础理论课程,对培养和提高学生的科学素质、科学思维方法以及科学研究能力具有重要的作用。但对刚进大学的一年级学生来说,在学习这门课时,常常会遇到这样或那样的困难。为了更好地贯彻少而精、学到手的原则,让学生能用较少的时间,掌握较多的物理知识,我们根据大学物理的基本要求,编写了《大学物理学习指导》一书。

本书分为 17 章,每章均由“基本要求与复习框图”、“阅读指导与问题讨论”、“解题方法与典型例题”以及“自测练习与能力训练”四部分组成,力求做到既复习基本概念,又讲解分析方法;既突出基本内容,又开阔学习视野。“基本要求与复习框图”部分使读者了解每章的重点内容,引导读者总结基本概念和规律并找出各规律之间的联系。“阅读指导与问题讨论”部分针对教材内容中的重点和难点以及学生学习中易常犯的错误和容易混淆的理论、概念以及运用条件进行了深入分析,并为正确理解和运用物理定理作了细致而有说服力的阐述。“解题方法与典型例题”部分侧重在帮助读者理清解题思路,掌握物理方法和数学方法在解题过程中的灵活运用,并通过一些典型例题的求解,增强读者解题技巧的延展性。“自测练习与能力训练”部分既可供读者在学完各章后作自我检验和复习巩固,又适当编选部分解题技巧性高,内容交叉度大的综合训练题,使读者对学过的概念有更深层次的理解,提高分析问题和解决问题的能力。

参加本书编写的有汪溶(第 1、2、3 章),陆慧(第 4、5、16、17 章),钱水兔(第 6、7、13、14、15 章),阴其俊(第 8、9、10、11、12 章)。全书由阴其俊统稿审定。

编者在此要感谢戴坚舟、许丽敏、包曼玲、黄天祥、李燮里等,他们为本书编写提出了许多中肯意见及提供部分资料,使本书增色不少。同时感谢房毅、周晓岚,他们为本书的编写也作了大量的工作。

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,衷心希望读者批评指正,以便在修订时予以充实、提高和完善。

编　者

2005 年 1 月

目　录

1　质点的运动规律

1.1　基本要求与复习框图 …… 1
1.2　阅读指导与问题讨论 …… 3
1.3　解题方法与典型例题 …… 8
1.4　自测练习与能力训练 …… 16

2　守恒定律

2.1　基本要求与复习框图 …… 23
2.2　阅读指导与问题讨论 …… 25
2.3　解题方法与典型例题 …… 31
2.4　自测练习与能力训练 …… 37

3　刚体的转动

3.1　基本要求与复习框图 …… 46
3.2　阅读指导与问题讨论 …… 47
3.3　解题方法与典型例题 …… 53
3.4　自测练习与能力训练 …… 57

4　振动

4.1　基本要求与复习框图 …… 65
4.2　阅读指导与问题讨论 …… 67
4.3　解题方法与典型例题 …… 74

4.4 自测练习与能力训练 …… 82

5 机械波

5.1 基本要求与复习框图 …… 91
5.2 阅读指导与问题讨论 …… 93
5.3 解题方法与典型例题 …… 98
5.4 自测练习与能力训练 …… 105

6 气体动理论

6.1 基本要求与复习框图 …… 117
6.2 阅读指导与问题讨论 …… 119
6.3 解题方法与典型例题 …… 124
6.4 自测练习与能力训练 …… 129

7 热力学基础

7.1 基本要求与复习框图 …… 136
7.2 阅读指导与问题讨论 …… 137
7.3 解题方法与典型例题 …… 143
7.4 自测练习与能力训练 …… 150

8 静电场

8.1 基本要求与复习框图 …… 159
8.2 阅读指导与问题讨论 …… 160
8.3 解题方法与典型例题 …… 165
8.4 自测练习与能力训练 …… 173

9 静电场中的导体和介质

9.1 基本要求与复习框图 …… 181
9.2 阅读指导与问题讨论 …… 182

需要全本请访问 www.ertongbook.com

9.3　解题方法与典型例题 …… 188
9.4　自测练习与能力训练 …… 195

10　稳恒电流的磁场

10.1　基本要求与复习框图 …… 207
10.2　阅读指导与问题讨论 …… 208
10.3　解题方法与典型例题 …… 214

11　磁场中的磁介质

11.1　基本要求与复习框图 …… 225
11.2　阅读指导与问题讨论 …… 226
11.3　解题方法与典型例题 …… 229
11.4　自测练习与能力训练 …… 231

12　电磁感应和电磁场

12.1　基本要求与复习框图 …… 241
12.2　阅读指导与问题讨论 …… 243
12.3　解题方法与典型例题 …… 249
12.4　自测练习与能力训练 …… 259

13　光的干涉

13.1　基本要求与复习框图 …… 271
13.2　阅读指导与问题讨论 …… 272
13.3　解题方法与典型例题 …… 278
13.4　自测练习与能力训练 …… 284

14　光的衍射

14.1　基本要求与复习框图 …… 293
14.2　阅读指导与问题讨论 …… 294

14.3 解题方法与典型例题 …… 299
14.4 自测练习与能力训练 …… 303

15 光的偏振
15.1 基本要求与复习框图 …… 312
15.2 阅读指导与问题讨论 …… 313
15.3 解题方法与典型例题 …… 316
15.4 自测练习与能力训练 …… 320

16 狭义相对论
16.1 基本要求与复习框图 …… 328
16.2 阅读指导与问题讨论 …… 329
16.3 解题方法与典型例题 …… 339
16.4 自测练习与能力训练 …… 346

17 量子物理
17.1 基本要求与复习框图 …… 354
17.2 阅读指导与问题讨论 …… 356
17.3 解题方法与典型例题 …… 362
17.4 自测练习与能力训练 …… 368

习题答案 …… 375

1 质点的运动规律

1.1 基本要求与复习框图

1. 基本要求

(1) 确切理解描述质点运动及运动变化的基本物理量;明确这些物理量的矢量性、相对性及速度、加速度的瞬时性;熟练掌握在直角坐标系和自然坐标系下的速度、加速度的表达形式.

(2) 熟练掌握质点运动学的两类问题,即用微分方法由已知的运动方程求速度、加速度;用积分方法由已知的速度、加速度求质点的运动方程.

(3) 理解伽利略速度变换式,并能用它求解简单的相对运动问题.

(4) 准确理解牛顿运动三定律的内容及实质,明确牛顿运动定律的适用范围和条件.

(5) 熟练掌握用隔离体法分析物体的受力和解题的基本方法,了解惯性力的物理意义及在非惯性系中运用牛顿定律处理一般动力学问题的方法.

本章从质点运动学和牛顿运动定律两个方面阐述了质点的运动规律.图 1-1(a)、(b)分别是本章节主要内容的复习框图.

2. 复习框图

在质点运动学中,我们着重解决了质点运动的描述问题.我们从一般的运动出发引入描写运动和运动变化的四个物理量,即位置矢量、位移、速度和加速度,进一步可知将这四个物理量联系在一起的是运动方程.要学好运动学,必须抓住基本概念和运动规律这两条线索,做到基本概念清楚、物理过程明了、规律应用熟练;并注意位置矢量、位移、速度和加速度的矢量性、瞬时性和相对性;注意矢量的运算法则.

质点的运动规律复习框图

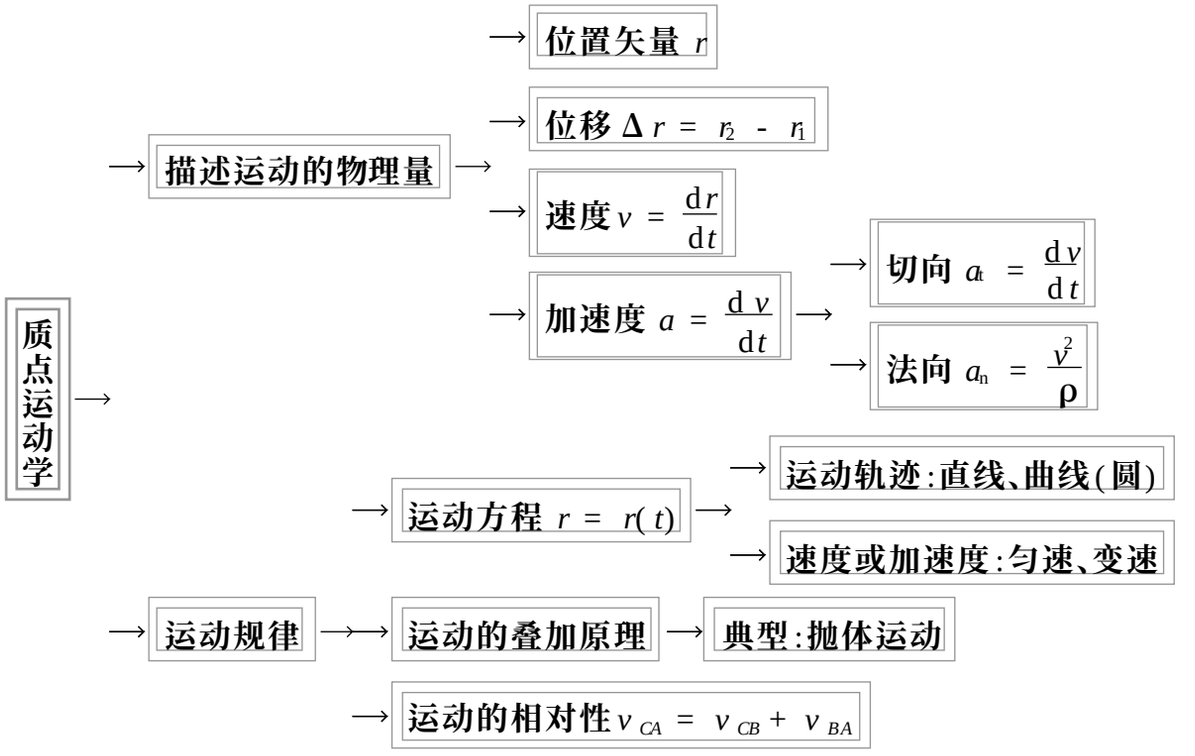


图 1-1(a)

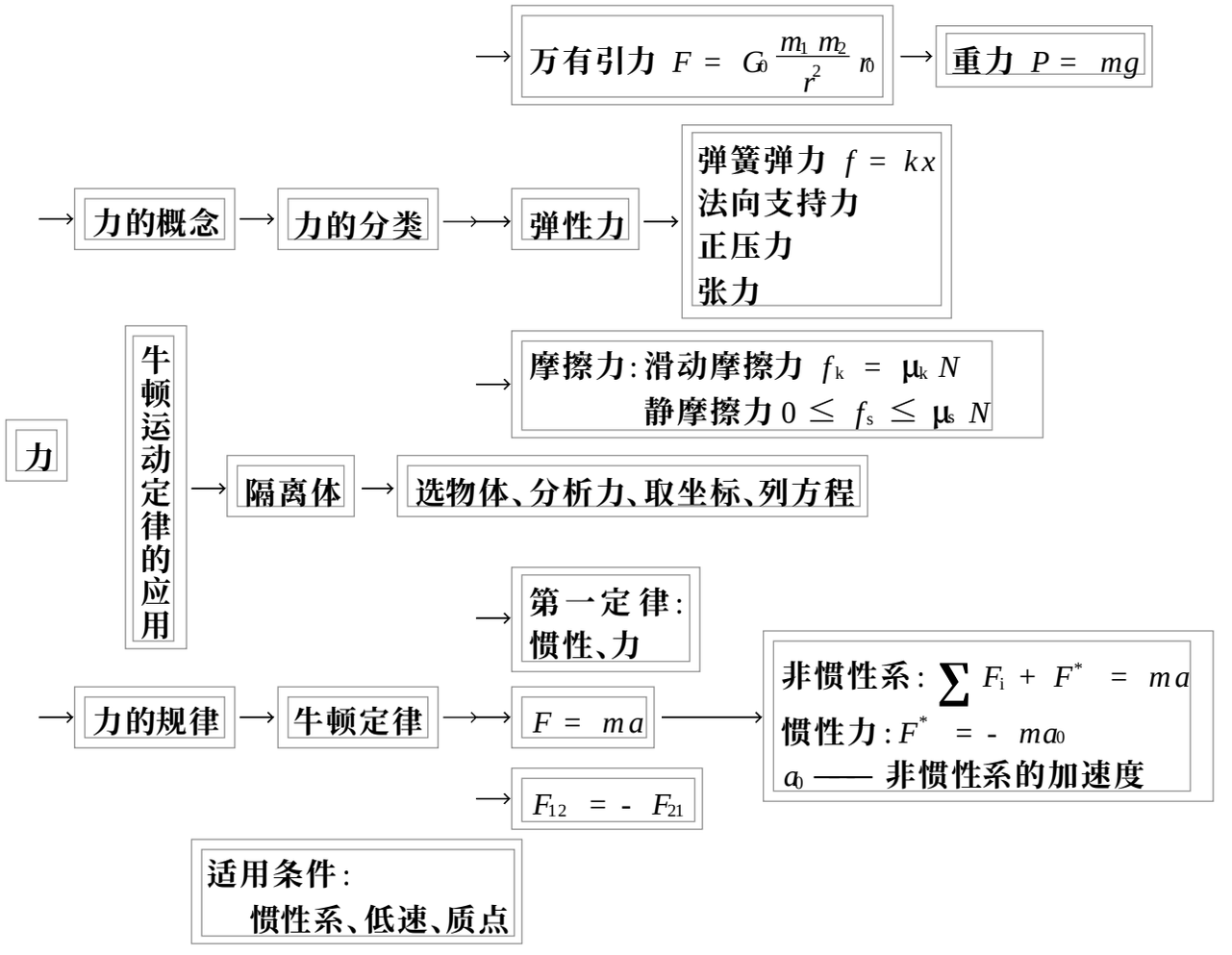


图 1-1(b)

牛顿运动定律的任务就是讨论物体间的相互作用以及这种相互作用所引起的物体运动状态变化的规律.由于牛顿三大定律都涉及到力的概念,因此学好牛顿运动定律的关键是抓住力的分析和力的规律这两条线索,同时必须掌握用隔离体法来对研究对象进行受力分析的基本方法.

1.2　阅读指导与问题讨论

1. 描述运动物理量的矢量性

质点的运动变化常常伴随着大小和方向的变化,因此描述质点运动规律的物理量——位置矢量、位移、速度和加速度都是矢量,它们的运算遵循矢量的运算法则.在学习时,应熟知图 1-2 所表示的各矢量的意义,加深对描述运动物理量的矢量性的理解.图中 r、r'为质点的位置矢量,$\overline{AB} = \mathrm{d}r$为质点的位移,$AB = \mathrm{d}s$为质点的路程.

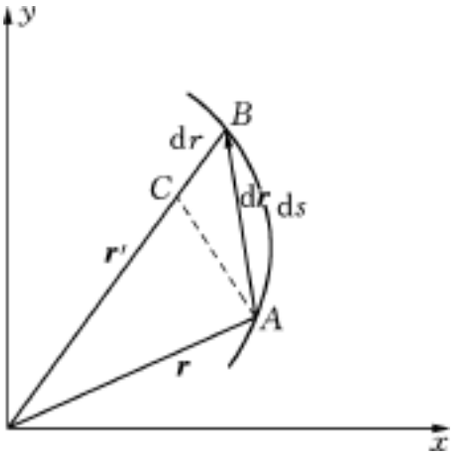


图 1-2

[问题 1-1]　已知质点的运动方程为 $r = x(t)i + y(t)j$,有人说其速度和加速度的大小分别为

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,你说对吗?

[解答]　初学的同学往往认为 r是位置矢量的大小,因此$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$一定是瞬时速度$v$的大小.产生这个问题的原因在于没弄清 $\mathrm{d}r$和$|\mathrm{d}r|$的区别.从图 1-2 中可以看出质点作曲线运动时,位置矢量的大小和方向都在变化,位移 $\mathrm{d}r$反映了这种变化,它的大小 $|\mathrm{d}r| = \overline{AB}$,而 $\mathrm{d}r = |r'| - |r| = \overline{CB}$,它仅仅反映了位置矢量大小的变化.所以,$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$只表示位置矢量大小随时间的变化率,不能表示瞬时速度的大小.若要计算瞬时速度的大小,可按照矢量的运算法则

$$v = |v| = \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}j\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

不能写成

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

同理,加速度的大小

$$a = |a| = \left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}i + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}j\right| \neq \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$$

[问题 1-2]　已知质点的运动方程 $y = -t^2 + 2$,则质点作何种运动?

[解答]　要判别质点的运动情况,可从速度、加速度和运动轨迹着手.有同学认为,该质点的速度和加速度分别为 $y' = -2t$和 $y'' = -2$,均为负值,因此质点作减速运动,这是对负号的误解.在矢量性的物

理量中,正负号反映了物理量的方向,即与你选定的正方向的关系,而要判定质点的加减速运动主要根据速度和加速度方向间的夹角 θ的情况,如图 1-3 所示.若 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$,则为加速运动;若 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$,则为减速运动.由此可见,我们所讨论的质点的速度和加速度同方向,且加速度为常量,因此作匀加速直线运动.

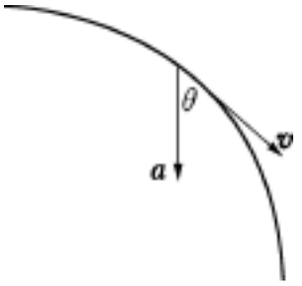


图 1-3

另外在曲线运动中,我们也可以依据速度和加速度方向的关系,求出质点切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 及曲率半径 ρ等物理量.例如图 1-4 所示的斜抛运动,质点的加速度为常矢量 g,它又可分解为 a_n 和 a_t,在 P 点处,$a_t = g\cos\alpha$,$a_n = g\sin\alpha$,它们分别反映了速度的大小和方向随时间的变化率.若知初速 v_0、与水平方向的夹角 θ,由于水平方向作匀速运动,所以 $v_0\cos\theta = v\sin\alpha$,曲率半径为 $\rho = \frac{(v_0\cos\theta)^2}{g\sin^3\alpha}$.

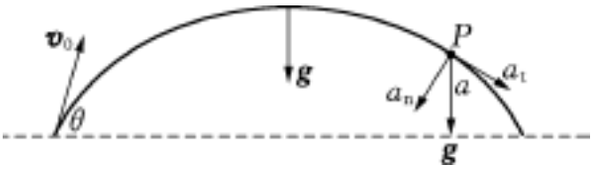


图 1-4

由于矢量可以分解和合成,因此对质点运动也可以进行分解和合成,任何复杂的运动可看成简单运动的合成或者称为叠加,而且这种合成可以是多种形式的合成.例如斜抛运动,通常我们把它看成水平方向的匀速直线运动和竖直方向的匀减速运动的叠加.如果我们再观察一下斜抛运动的运动方程式

$$r = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

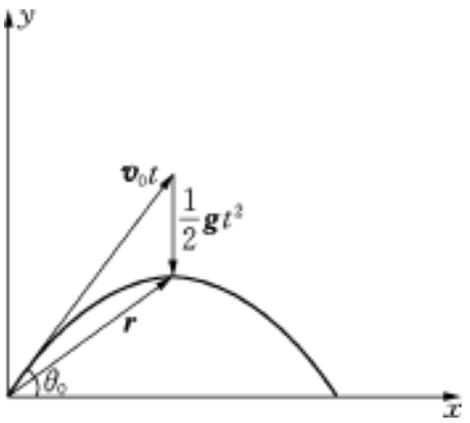


图 1-5

从上式中可知斜抛运动还可以看作沿初速方向的匀速直线运动和自由落体运动的叠加(图 1-5).

矢量的这一特性,为我们研究实际问题提供了许多便利,在今后的解题中,可酌情应用.

2. 运动的相对性

物体运动的描述在不同的参照系是不一样的,因此在对物体的运动进行研究前,必须明确你选择的参照系.图 1-6 是质点在两个作相对运动的坐标系 A 和 B 中位置关系的示意图,其关系式为

$$r_{PA} = r_{PB} + r_{BA}$$

进一步可知在不同参照系中的速度变换式为

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$

式中 v_{PA} 是质点在 A 参照系中的速度,v_{PB} 是质点在 B 参照系中的速度,v_{BA} 是 B 系相对于 A

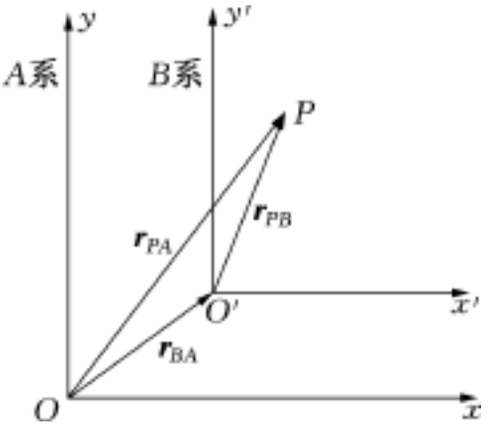


图 1-6

需要全本请访问 www.ertongbook.com

系的速度,称为牵连速度 .此速度变换式称为伽利略速度变换式 .

讨论质点在不同参照系中的运动状态时,我们首先要弄清有关物理量在各个参照系中的确切表示(包括数值和方向),再利用速度变换式进行求解 .在解题过程中,必须注意矢量的运算,同时注意力学规律的相对性原则,即质点的运动规律在不同的参照系中具有相同的表达式 .

[问题 1-3]　假定某日刮北风,风速为 u,一运动员在风中跑步,他对地面的速率为 $v\left(v=\frac{u}{2}\right)$,试问当他向什么方向跑时,会感到风从他的正右方吹来 ?

[解答]　这是一个典型的相对运动问题,两个参照系分别为人和地面 .因此只要弄清在各个参照系的速度矢量,再利用速度变换式,即可得到结果 .

由已知条件可知: $v_{风地}=u$, 方向由北向南, $v_{人地}=v=\frac{u}{2}$, 方向待求, $v_{风人}=v'$, 方向正右吹来,需满足 $v'\perp v$.按相对运动的速度合成公式有 $v_{风人}=v_{风地}+v_{地人}=v_{风地}-v_{人地}$, 因此可采用几何作图的方法先确定人的跑步方向 .

自原点 O 从北向南作风速矢量 u,再以 O 为圆心, $\frac{u}{2}$ 为半径作一圆,人跑步的速度矢量 v 的端点一定在此圆上,因 $v'\perp v$, 人又感到风从正右方吹来,故从 u 矢量的末端向圆的左半部作切线(向右半圆方向跑步,不可能感到风从正右方吹来),从 O 作指向切点的连线即为 v 的方向(图 1-7) .从图 1-7 中可以得到 u 与 v 的夹角

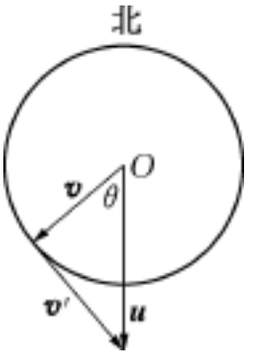


图 1-7

$$\theta=\cos^{-1}\frac{v}{u}=\cos^{-1}\frac{1}{2}=60°$$

所以,人跑步的方向应为南偏西 60°.

3. 弹性力和摩擦力的问题

在受力分析时,比较复杂的是弹性力和摩擦力 .

弹性力来源于相互接触的物体之间产生的弹性形变,其大小和物体所受的其他力及运动状态有关 .物体间的正压力和支持力是一对作用力和反作用力,它们的方向总是垂直于物体接触点的切面,比较容易判断,而它们的大小则往往需要通过牛顿定律求出 .

摩擦力是指相互作用的物体接触面之间有相对滑动或相对滑动趋势而产生的一种阻碍相对滑动的力,可分为滑动摩擦力和静摩擦力,其方向总是和相对滑动或相对滑动趋势的方向相反 .滑动摩擦力的大小比较容易处理,其值为

$$f_k=\mu_k N$$

其中 μ_k 为滑动摩擦因数(也称摩擦系数), N 为正压力 .而静摩擦力的大小则随具体情况而变,其变化范围为

$$0 \leq f_s \leq f_{smax} = \mu_s N$$

式中 μ_s 是静摩擦因数，它大于 μ_k .

[问题 1-4] 如图 1-8 所示，在倾角为 θ的固定的光滑斜面上，放一质量为 m 的物体 其中(b)图中 m 被竖直的固定木板挡住，问在(a)、(b)两种情况下，物体对斜面的正压力是否一样？



图 1-8

[解答] 有的同学会以为是一样的，都等于重力的一个分量 $mg\cos\theta$.其实，这种结论对图 1-8(b)来说是错误的 .关键在于他没有考虑到由于木板的阻挡，物体对斜面的正压力发生了变化 .那么如何求解哪？我们可以将物体作为研究对象，将其他物体对它的作用以力的形式表示，这就是隔离体法，图 1-9 就是物体的受力图 .

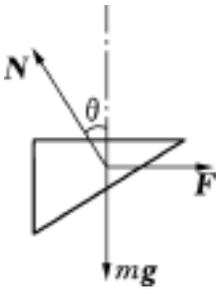


图 1-9

因为物体处于平衡状态，所以重力 mg、斜面的支持力 N(物体给斜面的正压力的反作用力)和木板的支持力 F 的合力为零，即

$$mg + N + F = 0$$

将力在水平方向和竖直方向分解可得

$$mg - N\cos\theta = 0$$

$$F - N\sin\theta = 0$$

所以

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

由此可见，弹性力的计算应注意其实际的运动状况和其他力的作用情况 .

[问题 1-5] 质量为 m 的物体 A 与车壁之间的静摩擦因数为 μ_s，当小车以加速度 a 向右运动时，A 能贴在壁上不滑下来，如图 1-10 所示，则物体与小车之间的静摩擦力为多大？小车的加速度至少为多大？

[解答] 有些同学可能会不假思索地回答，物体受到小车给它的作用力 $N = ma$，所以静摩擦力为

$$f = \mu_s N = \mu_s ma$$

这个回答显然是错误的 .因为静摩擦力是随质点的受力情况而变化的力，对它的讨论应通过物体受力的实际情况而确定，只有最大静摩擦力才能写成

$$f = \mu_s N$$

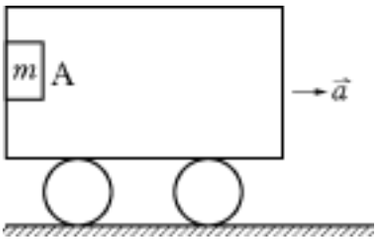


图 1-10

其中 N 为物体间的正压力 .在本题中，物体沿小车壁方向外力有重力，现在物体不掉下来，说明有静摩擦

力的作用,其大小为 $f = mg$.同时注意到只有最大的静摩擦力比重力大时,物体才不会掉下来,即

$$f = \mu_s N \geq mg$$

所以

$$\mu_s N = \mu_s ma \geq mg$$

$$a \geq \frac{g}{\mu_s}$$

4. 牛顿定律适用范围

牛顿运动定律是经典力学的基本定律,但它仅适用于宏观、低速的并能看成质点的物体,并且只有在惯性系中成立 .在用牛顿定律解题时,一定要判断是否在适用范围内,否则将得到错误的结论 .

[问题 1-6]　有一质量可忽略的定滑轮,两侧各用轻绳悬挂质量分别为 m_1 和 m_2 的重物(图 1 -11),已知 $m_1 > m_2$, 求重物的加速度 .有人这样求:根据牛顿第二定律,物体所受合外力为 $m_1 g + m_2 g$.因此有

$$m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

你能说出它错在什么地方 ? 正确的解法应如何 ?

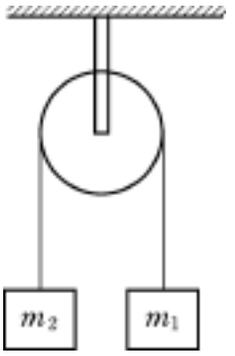


图 1 -11

[解答]　因为 $m_1 > m_2$, m_1 将作向下的加速运动, m_2 则向上运动,因此 m_1、m_2 系统不是质点,不能简单地用牛顿运动定律计算 .正确的解法应采用隔离体法将 m_1、m_2 分开讨论 .选地面为惯性参照系并作如图 1 -12 所示的受力图 .由于可忽略滑轮和绳子的质量,所以细绳作用在两物体上的张力相等,即 $F_{T_1} = F_{T_2} = T$, 根据牛顿第二定律有

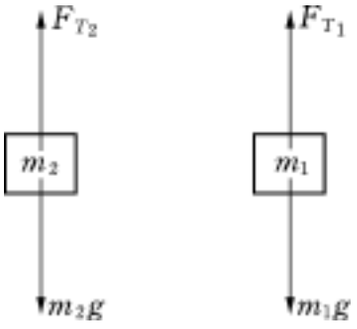


图 1 -12

$$m_1 g - T = m_1 a \tag{1}$$

$$T - m_2 g = m_2 a \tag{2}$$

联立式(1)、(2)可得

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

5. 非惯性系和惯性力

非惯性系虽然超出了牛顿定律的适用范围,但只要引入惯性力的概念,在分析物体受力时,把惯性力也计入其中,那么在非惯性系中,就可运用牛顿定律,即

$$\sum F_i + F^* = ma$$

式中 $\sum F_i$ 为物体所受的外力的矢量和, F^* 为惯性力,它等于 $F^* = - ma_0$, a_0 是非惯性系相对于惯性系的加速度 .需要注意的是 a 是物体在该非惯性系中

的加速度 .

[问题 1-7] 站在升降机内的观察者看到一种奇怪的平衡现象,即质量不同的两物体跨过一无摩擦的定滑轮,能处于平衡状态,如图 1 -13 所示 .由此他断定升降机作加速运动,试问其加速度的大小、方向如何确定?

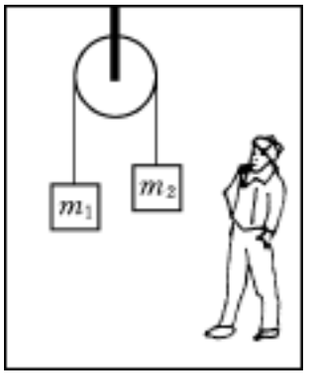


图 1 -13

[解答] 在惯性系中,欲使两质量不同的物体悬挂于定滑轮的两边且处于平衡状态是不可能的(见问题 1 -6) 现两物体处于平衡状态,说明物体还受惯性力的作用,升降机一定有加速度,是一个非惯性系 .假设升降机的加速度为 a,方向向上,则物体所受的惯性力一定向下 故两物体的力平衡方程为

$$m_1 g - T + m_1 a = 0 \tag{1}$$

$$m_2 g - T + m_2 a = 0 \tag{2}$$

联立方程得 $T = 0$ $a = - g$

负号表示加速度 a 的方向与假设的方向相反,故说明此系统达到平衡时,升降机的加速度方向向下,大小为 g .

本题所分析的情况实际上就是我们常讲的物体处于失重状态,这时两物体所受的惯性力正好和重力抵消,绳子的张力为零 .

1 .3 解题方法与典型例题

质点运动学中研究的问题主要有两类:

(1) 已知质点的运动方程,利用求导的方法求得任意时刻的速度、加速度;

(2) 已知加速度或速度,并知道初始状态,利用积分方法求得质点的运动方程或轨迹 .

这两类问题是微积分的直接应用,只要物理概念清晰、数学运算熟练,一般问题都可解决 .

[例 1-1] 质点在 xOy 平面内运动,其运动方程为 $r = 2ti + (19 - 2t^2) j$.求:

(1) 质点的轨迹方程;

(2) 在 $t_1 = 1$ s 到 $t_2 = 2$ s 时间内的平均速度;

(3) $t_1 = 1$ s 时的速度及切向和法向加速度 .

[分析] 根据运动方程可直接写出其分量式 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$, 从中消去参数 t,即得质点的轨迹方程 .平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率,即 $\bar{v} = \dfrac{\Delta r}{\Delta t}$, 它与时间间隔 Δt 的大小有关,当 $\Delta t \to 0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, 切向和法向加速度是加速度在自然坐标下的分矢量,切向加速度反映质点速度大小的变化,即 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\tau$ (其中 τ 为切向的单位矢量),法向加速度反映质点速度方向的变化,即 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} n$ (其中 n 为法向的单位矢量) .a_n 与 a_t 相互垂直,它们的矢量和等于总加速度,即

$a = a_n + a_t$，故 a_n 也可由 a、a_t 得到．

[解]　(1) 由质点的运动方程可得时间的参数方程

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 19 - 2t^2 \end{cases}$$

消去 t 后即得质点的轨迹方程

$$y = 19 - \frac{1}{2}x^2$$

(2) $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ 和 $t_2 = 2\ \mathrm{s}$ 的位矢为

$$\begin{cases} r(1) = 2i + 17j \\ r(2) = 4i + 11j \end{cases}$$

$t_1 = 1\ \mathrm{s}$ 到 $t_2 = 2\ \mathrm{s}$ 内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(2) - r(1)}{t_2 - t_1} = 4i + 11j - (2i + 17j) = 2i - 6j$$

(3) 质点任一时刻的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}j = 2i - 4tj$$

$t_1 = 1\ \mathrm{s}$ 时的速度为

$$v(1) = 2i - 4j$$

质点任一时刻的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}i + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}j = -4j$$

又质点任一时刻的速率为

$$v = \left|\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + (4t)^2}$$

所以切向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{4 + (4t)^2})$$

即 $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ 时的切向加速度为

$$a_t(1) = 3.58\ \mathrm{m/s^2}$$

法向加速度为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2(1)} = 1.79(\mathrm{m/s^2})$$

[例 1-2]　质点运动轨迹是半径为 R 的圆，在 $t = 0$ 时的自然坐标值为 s_0，速度为 v_0，若保持加速度方向与速度方向之间的夹角 α 不变 $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ (图 1-14)，求当 $s - s_0 = 2\pi R$ 时质点运动速度的大小．

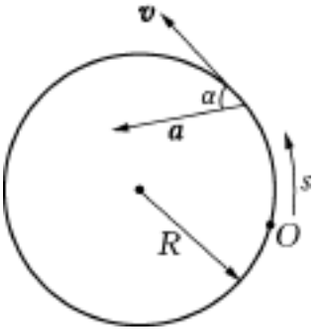


图 1-14

[分析]　求解本题的关键在于寻找速度 v 与路程 s 的关系．由于加速度与速度方向间的夹角不变，所以 $\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t}$ 为常量，而 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，对于圆周运

动 $a_n = \frac{v^2}{R}$，由此可得速度 v 与时间 t 的微分关系，通过积分变量替换 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$，即可得到 v 与 s 的微分关系 .

[解] 根据题意 $\frac{a_n}{a_t} = \tan\alpha =$ 常量

从而 $$a_t = \frac{a_n}{\tan\alpha} = \frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

即 $$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

又 $$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

故 $$v\frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R\tan\alpha}$$

即 $$\frac{R\tan\alpha}{v}dv = ds$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{R\tan\alpha}{v}dv = \int_{s_0}^{s}ds$$

得 $$R\tan\alpha\ln\frac{v}{v_0} = 2\pi R$$

所以 $$v = v_0 e^{\frac{2\pi}{\tan\alpha}}$$

[例 1-3] 在离船的高度为 h 的岸边，绞车以恒定的速率 v_0 收拖缆绳，使船在水面上向岸边靠近，如图 1-15 所示 .求当船头与岸的水平距离为 x 时船的速度 .

[分析] 因为船被限制在水面上，同时收绳的速率是恒定的，船的运动被称为有约束的运动 .解决这类问题的关键是要找出质点的运动规律与约束量的关系 .其次求速度的问题，采用求出质点的运动方程再求导是比较常用的方法，其他还可以通过矢量分析等，在此介绍两种方法 .

[解法 1] 建立如图 1-15 所示的坐标系 xOy，船的位矢 r 可写为

$$r = xi + hj$$

根据速度的定义式 $$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i$$

而 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$，其中 $l = l_0 - v_0 t$（l_0 为 $t = 0$ 时，绳子的长度），则船的速度大小为

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\sqrt{l^2 - h^2}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}}\frac{dl}{dt}$$

而 $\frac{dl}{dt} = -v_0$，即绳长的变化率等于绳子收缩速度的负值 .同时在上式中以 x 表示，则

$$v = -\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x}v_0$$

写成矢量式 $v = -\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x}v_0 i$

[解法 2] 以滑轮为坐标系原点 O，如图 1-16 所示 .在 $t \to t + \Delta t$ 时间内，船的位移 $\Delta r = r(t + \Delta t) -$

需要全本请访问 www.ertongbook.com