第一篇　力　学

力学是研究机械运动性质与规律及其应用的一门科学以牛顿定律为基础的力学称为经典力学。经典力学有其局限性：在高速领域被狭义相对论取代，在微观领域被量子力学取代．即使如此，经典力学还是十分重要的．经典力学是一般 工程技术（例如机械制造、土木工程、航天航空工程等）的理论基础。经典力学的实用性是必须学习经典力学的首要原因经典力学又是整个物理学的基础，动量、角动量、能量等是物理学的基本概念。动量守恒、角动量守恒、能量 守恒等都是自然界的普遍规律，而这些都是经典力学的基本内容。物理学是一门改变人类世界的科学，要学好物理学首先要学好经典力学。

第 1 章　质点运动学

质点是只有质量没有大小的一个点．忽略物体的大小和形状，把物体看做质点，是为了简化问题。同一个物体，在不同的问题中有不同的处理．例如 讨论地球的公转时，可以把地球看做质点，而讨论地球的自转时，就不能把地球看做质点，质点是一个理想模型，采用理想模型是物理学常用的方法。

质点运动学研究质点如何运动，而不涉及质点为什么这样运动，质点间相互作用对质点运动的影响是质点动力学研究的范围。

本章的重点是应用导数和矢量的概念定义速度和加速度，同时导出了匀加速直线运动、抛体运动和圆运动相应的公式，讨论了伽利略变换。

1.1　质点的运动函数

物体的位置随时间改变就是机械运动．物体的位置都是相对其它某个物体确定的．被选做确定其它物体位置的物体称为参考系描述一个质点的运动必须先选定参考系．

同一个物体相对不同的参考系运动的形式不同，这就是运动的相对性 例如静止在地球上的一座山，以太阳做参考系，这座山就不是静止，而是随地球一起公转和自转. 任何物体都在运动，绝对静止的物体是不存在的，这就是运动的绝对性. 例如，科学已经证明，绝对静止的以太是不存在的。

为了定量描述质点的运动，必须建立一个固定在参考系上的坐标系，坐标原点到质点所在位置的有向线段称为位置矢量. 质点的位置矢量随时间变化的关系就是质点的运动函数。即

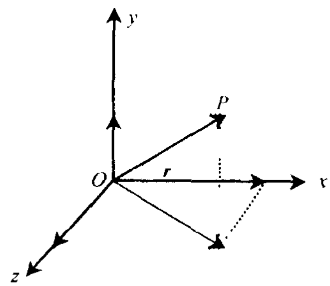


图 1.1 位置矢量

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

就是质点的运动函数. 若选取直角坐标系(图 1.1),则质点的位置(如 P 点)的三个坐标 x、y、z 就是质点的位置矢量的三个分量. 因此，直角坐标系下的质点运动函数为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \tag{1.2}$$

公式(1.2)表明质点的任意运动都是由 x、y、z 三个方向上独立进行的直线运动叠加而成的. 这就是质点运动叠加原理. 运动函数给出了质点运动的全部信息。

运动质点在空间所经过的路径称为轨道. 质点的运动函数(1.2)就是轨道的参数方程,消去参数 t 就得到轨道方程

例 **1.1** 导出质点平抛运动的轨道方程.

解 固定在地面上的坐标系 xOy 的 x 轴为水平方向,y 轴为竖直方向,平抛质点的运动函数为

$$x = v_0 t,\quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

由第一式得 $t = x/v_0$,代人第二式,得到轨道方程

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

1.2 位移 速度

质点在一段时间内位置矢量的增量就是质点在这段时间的位移. 如图 1.2 所示,设质点在 t 和 t' 时刻分别通过 P 点和 P' 点，相应的位矢是 $\boldsymbol{r}(t)$ 和

$\boldsymbol{r}(t')$，则质点在 $\Delta t = t' - t$ 这段时间的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t') - \boldsymbol{r}(t)$$

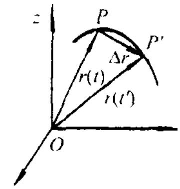


图 1.2　质点的位移

位移是矢量．位移的大小不能记作 Δr．因为 $\Delta r = r(t') - r(t)$．一般情况下 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r$，即一段时间内质点位移的大小，一般不等十位置矢量大小的增量．

位移与产生这段位移的时间之比称为质点在这一段时间内的平均速度，即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

平均速度是矢量，平均速度的方向就是位移的方向．t 到 t' 这段时间内的平均速度是质点在 t 时刻速度的近似值．质点在某一时刻的速度称为瞬时的速度，简称速度．$\Delta t = t' - t$ 越小，平均速度和瞬时速度之差也越小，由于 Δt 可以任意小，因此利用求平均速度方法可以得到任意精确度的瞬时速度的近似值．瞬时速度的准确值是 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度的极限，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

这个公式既定义了速度的大小，也定义了速度的方向．$\Delta t \to 0$ 时，$\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向就是速度的方向．由图 1.3 可以看出，$\Delta t \to 0$ 时，P' 点无限靠近 P 点．$\Delta \boldsymbol{r}$ 的极限方向就是质点轨道在 P 点的切线方向因此，质点在 t 时刻的速度方向就是质点在 t 时刻所在处的轨道的切线方向．速度的大小称为速率．由(1.4)式可知速率为

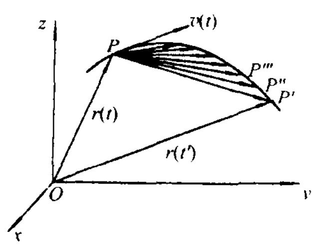


图 1.3　速度方向

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$$

质点在 Δt 时间内所通过的一段轨道的长度称为路程，一般情况下，位移的大小不等于路程．当 $\Delta t \to 0$ 时，位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 和路程 Δs 趋于相同，因此

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.5}$$

公式表明，质点速度的大小等于质点的路程对时间的变化率。

在直角坐标系下，(1.4)式的三个分量等式为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{1.6}$$

v_x、v_y、v_z 是质点沿三个坐标轴方向的分速度．由(1.6)式可知速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

在国际单位制(SI 制)中，速度的单位为米／秒(m/s)．

加速度是表示速度变化快慢的物理量．设质点在 t 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}(t)$，t' 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}(t')$，见图 1.4．在 $\Delta t = t' - t$ 时间内，速度的增量为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t') - \boldsymbol{v}(t)$$

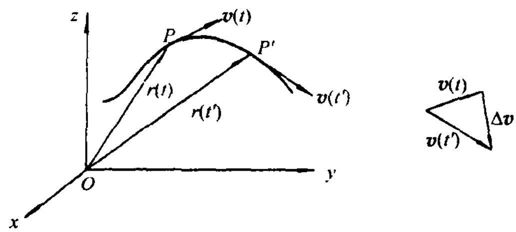


图 1.4　加速度

Δt 时间内，质点的平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

平均加速度的意义是：在 Δt 时间内，平均地说质点的速度朝什么方向增加，以及单位时间内速度增加多少．某一时刻的加速度称为瞬时加速度．平均加速度是瞬时加速度的近似值．Δt 越小，平均加速度和瞬时加速度的矢量差越小．由于 Δt 可任意小，因此用计算平均加速度的方法可求出任意精确度的瞬时加速度．质点的瞬时加速度准确值是 $\Delta t \to 0$ 时，平均加速度的极限．即瞬时加速度的定义为

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

若选取直角坐标系，(1.7)式表示为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.8}$$

a_x、a_y、a_z 是加速度的三个分量．由(1.8)式可知加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

由(1.7)式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

等式两边积分得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t \tag{1.9}$$

这是加速运动的速度公式.

在 SI 单位制中,加速度的单位为米/秒^2($\mathrm{m/s^2}$).

例 1.2　导出匀加速直线运动位移公式.

解　设质点沿 x 轴作匀加速直线运动，速度 $v = v_0 + at$. 由于 $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$，两边积分得

$$x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

这是匀加速直线运动的位移公式.

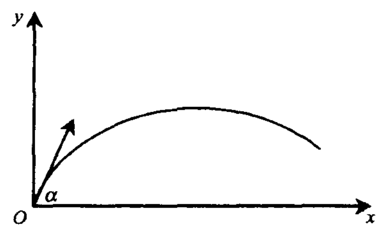


图 1.5　抛体运动

例 1.3　导出抛体运动函数.

解　如图 1.5 所示,x 轴为水平方向,y 轴为竖直方向. 物体从坐标原点以速度 v_0 抛出. 物体的水平初速度为 $v_0\cos\alpha$,水平加速度为零. 所以

$$x = v_0 \cos\alpha t$$

物体竖直方向的初速度为 $v_{0_y} = v_0 \sin\alpha$,竖直方向的加速度为 $-g$,所以

$$\mathrm{d}v_y = a_y \mathrm{d}t = -g\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_{v_0\sin\alpha}^{v_y} \mathrm{d}v_y = -\int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt \text{ 由于 } \mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}t = (v_0\sin\alpha - gt)\mathrm{d}t$$

两边积分得

$$y = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

抛体运动函数为

$$x = v_0\cos\alpha \cdot t, \quad y = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

可见，抛体运动是水平匀速直线运动和竖直上抛运动的叠加.

1.3 切向加速度和法向加速度

质点作直线运动时，加速度和速度方向在同一条直线上.而质点作曲线运动时，加速度方向和速度方向不在同一条直线上，例如抛体运动、圆运动等.这时加速度可分解成两个分量，一个分量和速度平行，称为切向加速度.另一个分量和速度垂直，称为法向加速度.

设质点作曲线运动的速率为 $v(t)$,速度方向上的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}(t)$,两者均为时间函数.质点的速度为

$$\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}(t)$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$$

等式右端第一项是切向加速度，即

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \tag{1.10}$$

切向加速度的大小等于速率的时间变化率，切向加速度的作用是改变速度的大小.下面证明第二项是加速度的法向分量.先计算$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$.如图 1.6所示,质点 t 时刻位于 P 点,速度为 $\boldsymbol{v}(t)$.t'时刻位于P'点,速度为 $\boldsymbol{v}(t')$.$\boldsymbol{\tau}(t)$、$\boldsymbol{\tau}(t')$分别是 $\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{v}(t')$方向上的单位矢量.$\Delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t') - \boldsymbol{\tau}(t)$,如图中三角形 abc 所示.abc 是等腰三角形.当 Δt 很小时,$\boldsymbol{R}(t) \approx \boldsymbol{R}(t')$,三角形 OPP'也是等腰三角形.由于 $\boldsymbol{\tau}(t) \perp \boldsymbol{R}(t)$,$\boldsymbol{\tau}(t') \perp \boldsymbol{R}(t')$,使得

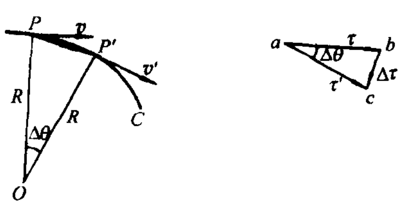


图 1.6 法向加速度

$$\angle POP' = \angle bac$$

因此这两个等腰二角形相似，可知

$$\frac{PP'}{R}=\frac{bc}{ab}=\Delta\tau,\quad\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\frac{PP'}{R}}{\Delta t}\right)=\frac{v}{R}$$

a_n 的大小为

$$a_n=v\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=v\frac{v}{R}=\frac{v^2}{R}$$

即

$$a_n=\frac{v^2}{R} \tag{1.11}$$

a_n 的方向就是 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\tau$ 的极限方向. $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\theta\to 0$，所以 a_n 的方向与速度方向垂直并指向曲率中心. 这样，a_n 就是加速度的法向分量，称为法向加速度法向加速度的作用就是改变速度的方向若质点只有切向加速度，则质点的速度方向不变，速度大小改变，质点作变速直线运动. 若质点只有法向加速度，则质点速度的大小不变而方向改变，质点作匀速率曲线运动.

例 1.4　质点作匀速率圆周运动，求质点的加速度.

解　质点的速率为常数 v，质点的切向加速度为

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

质点的法向加速度为

$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

法向加速度的方向指向圆心，又称向心加速度.

例 1.5　求平抛物体 t 时刻的切向加速度、法向加速度及轨道的曲率半径.

解　选取直角坐标系 xOy，x 轴为水平方向，y 轴的方向竖直向下（图 1.7）. 质点从坐标原点以水平速度 v_0 抛出. t 时刻质点的分速度为

$$v_x=v_0,\quad v_y=gt$$

质点合速度的大小为

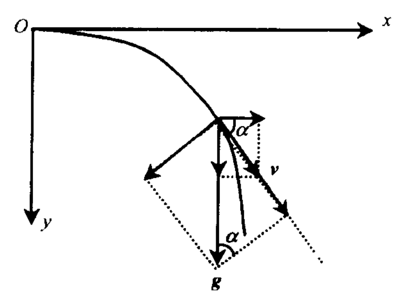


图 1.7　抛体运动的切向加速度和法向加速度

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

设质点的速度 v 与 x 方向夹角为 α. 由于质点的加速度就是重力加速度. 因此,质点的切向加速度为

$$a_t = g\sin\alpha = g \cdot \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

法向加速度为

$$a_n = g\cos\alpha = g \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

t 时刻质点轨道的曲率半径为

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{g v_0}$$

例 1.6 质点作变速圆运动，速率 $v = 3t^2$. 求质点在 t 时刻的切向加速度、向心加速度及在时间 t 内通过的路程.

解 质点的切向加速度为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6t$$

向心加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{9t^4}{R}$$

由于 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,所以

$$\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t, \quad s = \int 3t^2 \mathrm{d}t = t^3$$

1.4 参考系变换

研究力学问题时，常常需要从不同参考系描述同一物体的运动. 对于不同参考系,同一质点的位移、速度和加速度都可能不同. 下面讨论一个质点相对两个互相平动的参考系的位矢之间、速度之间与加速度之间的变换关系.

两个以速度 u 互相平动的参考系 xOy(K 系)和 $x'O'y'$(K'系),它们的 x 轴重合,y 轴和 z 轴分别平行,如图 1.8所示. 初始时刻,O' 与 O 重合. 若一质点于某时刻在 K'系中的位置矢量为 $\boldsymbol{r}'$,在 K 系中的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$,由图1.8可知

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} \qquad (1.12)$$

式中 $R = u \cdot t$.上式的分量式为

$$x' = x - u \cdot t$$
$$y' = y \qquad (1.13)$$
$$z' = z$$

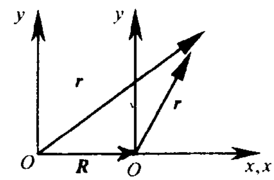


图 1

同一时刻在两个参考系的表示是相同的，即

$$t' = t \qquad (1.14)$$

(1.12)式或(1.13)式与(1.14)式合在一起就是参考系变换关系若 K 系与 K' 系均为惯性系，该变换称为伽利略变换.

(1.12)式对时间求导数得

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \qquad (1.15)$$

式中 $\boldsymbol{v}'$表示质点相对 K'系的速度，$\boldsymbol{v}$ 表示质点相对 K 系的速度，$\boldsymbol{u}'$为 K'系相对 K 系的速度。(1.15)式称为伽利略速度变换公式。由(1.15)式得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u} \qquad (1.16)$$

(1.16)式是伽利略速度逆变换公式.

(1.15)式两边对时间求导数得

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0 \qquad (1.17)$$

$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{a}'$分别表示质点相对 K 系、K'系的加速度，$\boldsymbol{a}_0$ 为 K' 系相对 K 系的加速度。这个等式表示同一质点相对两个互相平动的参考系的加速度之间的变换关系。若 $\boldsymbol{a}_0 = 0$,则 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$，这就是说相对两个相互作匀速直线运动的参考系，同一个质点的加速度是相等的.

例 1.7　设有一升降机向下作加速运动，加速度的大小为 a_0,其中有一物体自由下落，物体相对升降机的初速度为零，求物体相对升降机的加速度，以及 t 秒相对升降机位移.

解　选坐标轴向下为正，物体相对升降机的加速度为

$$a = g - a_0$$

由于物体相对升降机的初速为零，则物体相对升降机的位移为

$$y' = \frac{1}{2}a't^2 = \frac{1}{2}(g - a_0)t^2$$

如果 $a_0 < g$,物体相对升降机加速下降.
如果 $a_0 > g$,物体相对升降机加速上升.
如果 $a_0 = g$,物体相对升降机静止。

例 1.8 设雨滴相对地面以 $v = 3\text{m/s}$ 的速度铅直下落,车厢以 $u = 4\text{m/s}$ 的速度在地面上水平向右运动，求雨滴相对车厢的速度。

解 设地面为 K 系,车厢为 K'系，由伽利略速度变换可求得雨滴相对车厢的速度为

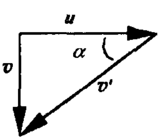


图 1.9

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$$

由图 1.9 可知

$$v' = \sqrt{v^2 + u^2} = 5\text{m/s}$$

设 v'与水平方向夹角为 α ,则

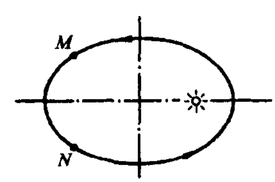
$$\tan\alpha = \frac{v}{u} = \frac{3}{4}$$

思 考 题

1.1 自由落体从 $t=0$时刻开始下落.用公式 $h = gt^2/2$ 计算,它下落的距离达到 19.6m 的时刻为 +2s 和 −2s 这 −2s 有什么物理意义？该时刻物体的位置和速度各如何？

1.2 一斜抛物体的水平初速度是 v_0 ,它的轨道的最高点处的曲率半径是多大？

1.3 质点沿圆周运动，且速率随时间均匀增大，问 a_n、a_t、a 三者的大小是否都随时间改变？总加速度 a 与速度 v 之间的夹角如何随时间改变？



题 1.4 图

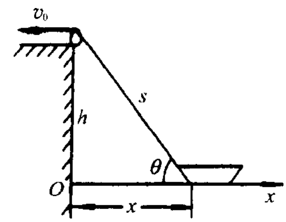
1.4 如图所示,根据开普勒第一定律,行星轨道为椭圆.已知任一时刻行星的加速度方向都指向椭圆的一个焦点（太阳所在处).分析行星在通过图中 M、N 两位置时，它的速率分别在增大还是在减小？

1.5 如果使时间反演,即把时刻 t 用 $t' = -t$ 取代,质点的速度、加速度、运动学公式等将会有什么变化？

习 题

1.1 在水平面上作任意曲线运动的质点，当经过 A 点时，速度为向东 12cm/s,经过 4s到达 B 点,B 点位于 A 点之东 24cm ,北 32cm 处,此时速度为向北 16cm/s,求质点在这

4s内的平均速度和平均加速度

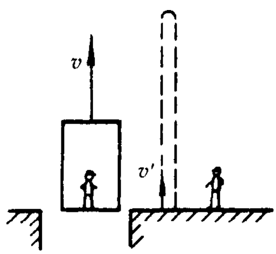


题 1.3 图

1.2 一质点在 Oxy 平面内运动,沿两坐标轴的速度分别为 $v_x=(4t^3+4t)$, $v_y=4t$,已知当 $t=0$ 时,位置坐标为(1,2). 求质点的轨道方程.

1.3 如右图所示,在离水面高度为 h 的岸边上,有人以 v_0 的速度收绳拉船靠岸，求船被拉到离岸边 x 处的速率和加速度的大小.

1.4 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 运动,v_0,b 都是恒量.求(1) t 时刻质点的加速度矢量;(2) t 为何值加速度在数值上等于 b;(3) 当加速度为 b 时质点已沿圆周运动了多少圈.



题 1.5 图

1.5 如左图所示，已知升降机以恒定的速度 v 上升,当升降机底面通过地平线时，地面上一弹射器以初速 v' 向上弹出一小球，地面上一人和升降机内一人同时观察小球的运动.问(1)二人看到小球达到最高点的时刻是否相同？(2)二人看到小球达到最高点的高度是否相同？以 $v=4.9\mathrm{m/s}$, $v'=9.8\mathrm{m/s}$, $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 作定量计算.

1.6 设轮船以 $v_1=18\mathrm{km/h}$ 的航速向正北航行时，测得风是西北风（即风从西北吹向东南），当轮船以 $v_2=36\mathrm{km/h}$ 的航速改向正东航行时，测得风是正北风（即风从北吹向南）.问地面上测得风速 V 如何？

1.7 一只在星际空间飞行的火箭，当它的燃料以恒定速率燃烧时，其运动函数可表示为 $x=ut+u\left(\frac{1}{b}-t\right)\ln(1-bt)$,其中 u 是喷出气流相对火箭体的速度，是一个常量，b 是与燃烧速率成正比的一个常量.

(1) 求此火箭的速度表示式；

(2) 求此火箭的加速度表示式；

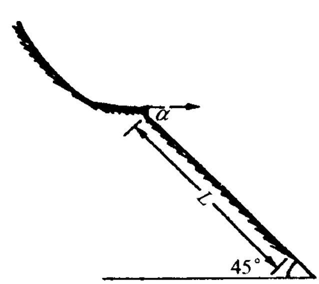
(3) 设 $u=3.0\times10^3\mathrm{m/s}$, $b=7.5\times10^{-3}/\mathrm{s}^{-1}$,并设燃料在120s内燃烧完,求 $t=0$ 和 $t=120\mathrm{s}$时的速度；

(4) 求在 $t=0\mathrm{s}$ 和 $t=120\mathrm{s}$ 时的加速度.

1.8 一质点在 xy 平面上运动，运动函数为 $x=2t$, $y=4t^2-8$(SI).

(1) 求质点运动的轨道方程并画出轨道曲线；

(2) 求 $t_1=1\mathrm{s}$ 和 $t_2=2\mathrm{s}$ 时,质点的位置、速度和加速度.



题 1.9 图

1.9 滑雪运动员离开水平滑雪道飞人空中时的速率 $v=110\mathrm{km/h}$,着陆的斜坡与水平面夹角 α

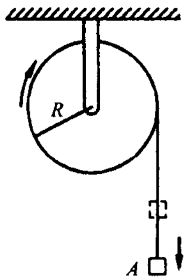
$=45°$(见附图).

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L 是多大？（忽略起飞点到斜面的距离.）

(2) 在实际的跳跃中，滑雪运动员所达到的距离 $L=165\text{m}$,这个结果为什么与计算结果不符？

10 汽车在半径 $R=400\text{m}$ 的圆弧弯道上减速行驶.设在某一时刻，汽车的速率为 $v=10\text{m/s}$，切向加速度的大小为 $a_t=0.2\text{m/s}^2$.求汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向？

11 一个半径 $R=1.0\text{m}$ 的圆盘，可以绕一水平轴自由转动一根轻绳绕在盘子的边缘，其自由端拴一物体 A.在重力作用下,物体 A 从静止开始匀加速地下降，在 $\Delta t=2.0\text{s}$ 内下降的距离 $h=0.4\text{m}$ 求物体开始下降后 3s 末，轮边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.



题 1.11图

第 2 章　质点和质点系动力学

动力学的基本原理是牛顿运动定律.牛顿运动定律是根据大量实验总结出来的规律，是不能证明的.它的正确性在于由其得出的结论都被客观实际所证实.如果不能根据牛顿运动定律进行推理，而建立完整的力学理论，就不能解决复杂的实际问题.本章的内容就是运用数学推理，根据牛顿定律导出质点和质点系的动量定理、角动量定理及动能定理，与动量守恒定律、角动量守恒定律及机械能守恒定律等

2.1　牛顿运动定律　惯性参考系

牛顿运动定律内容如下：

牛顿第一定律：不受其它物体作用的质点，保持其原有速度不变.

物体保持速度不变的这种性质叫做惯性.力是改变速度的原因，而不是维持速度的原因.

牛顿第二定律：质点受力时速度就改变，加速度的大小和所受合外力的大小成正比，加速度的方向与合外力的方向相同，即

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

式中的 m 是合外力的大小与加速度大小的比值，称为质量.质量是表示物体惯性大小的物理量.

在国际单位制中，质量的单位是千克（kg），加速度的单位是米／秒^2（$\mathrm{m/s^2}$），力的单位是牛顿（N）.由（2.1）式可知

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$$

牛顿第三定律：力是物体间的相互作用.甲物体对乙物体有一个作用力，同时乙物体对甲物体有一个反作用力，这两个力大小相等、方向相反，并作用在同一条直线上.

要注意作用力和反作用力是作用在不同的物体上，这两个力不能互相抵消.作用力和反作用力是同一性质的力，如同为摩擦力，同为万有引力等.

一质点相对不同的参考系的加速度不一定相同.而质点受力与参考系无

关.这样牛顿第二定律不是对任何参考系都成立的.牛顿定律适用的参考 系称为惯性系.实验表明，地球是较好的惯性系.以地心为原点，坐标轴的方向从地心指向远处的恒星，这样的坐标系称为地心系.地球系相对地心系在转动，因此，地心系是比地球系更好的惯性系.以地心系研究太阳行星的运动时发现，地心系也不是很好的惯心系。与地心系相比，日心系是更好的惯性系.

牛顿设想一个绝对空间，它是绝对惯性系.实际的惯性系都是局部的、相对的惯性系.

例 2.1　质量为 60kg 的一个人，站在升降机中的台秤上，若升降机(1)匀速上升时；(2) 以 $0.5\mathrm{m/s^2}$ 的加速度匀加速上升时；(3) 以 $0.5\mathrm{m/s^2}$ 的加速度匀加速下降时，台秤上的读数各是多少？

解　人体受重力 mg 和台秤的支持力 N 的作用.由牛顿第二定律可得

$$N - mg = ma$$

(1) 升降机匀速上升时，$a=0$，代入上式得

$$N = mg = 60\times 9.8 = 588(\mathrm{N})$$

(2) 升降机匀加速上升时，$a=0.5\mathrm{m/s^2}$

$$N = ma + mg = m(a+g) = 618\mathrm{N}$$

(3) 升降机匀加速下降时，$a=-0.5\mathrm{m/s^2}$

$$N = m(g+a) = 60\times(9.8-0.5) = 558(\mathrm{N})$$

台秤的读数表示人对台秤压力的大小.人对台秤的压力 N'是 N 的反作用力.

$N'>mg$ 称为超重，即，物体对支撑面的压力大于重力称为超重.超重时物体的重力未变.$N'<mg$ 称为失重，当 $a=-g$ 时，$N'=N=0$，台秤的读数为零.当物体对支撑面的压力小于物体的重力或等于零时，称为失重.失重时物体的重力也未改变.超重、失重对人体的生理机能都会产生影响。设想一个加速度很大的情况，若一飞行器突然以加速度 $a=99g$ 加速上升，站在其中的体重为 700N 的人，两条腿下部受到的压力可达 70000N.这会造成骨折，人体各器官都会受到破坏.航天飞行要考虑超重和失重对人体的影响.

例 2.2　如图 2.1，质量为 m 的小球，用长为 lm的细线挂在地面上方固定点 O.将小球拉到细线呈水平的位置后，小球从静止开始运动.当细线与水平方向夹角为 θ 时，小球的速率和线的张力各是多大？

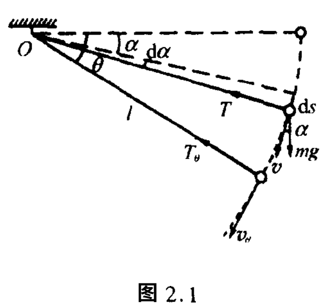


图 2.1

解　设 t 时刻细线与水平方向夹角为 α.

小球受力为线的张力 T 及重力 mg(图 2.1)将重力分解为切向分量和法向分量. 牛顿第二定律的切向分量式为

$$mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

法向分量式为

$$T - mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{l}$$

切向分量式是微分方程，而不是代数方程. 两边乘以 $\mathrm{d}s$,得

$$mg\cos\alpha\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

由于 $\mathrm{d}s = l\mathrm{d}\alpha \quad \mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ 代入上式

$$mgl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = mv\mathrm{d}v$$

两边积分

$$\int_0^\theta mgl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \int_0^v mv\mathrm{d}v, \qquad \frac{1}{2}mv^2 = gml\sin\theta, \qquad v = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

将 v 代入法向分量等式,且 $\alpha = \theta$,得

$$T = 3mg\sin\theta$$

例 **2.3** 如图 2.2 所示，在光滑的水平地面上放一质量为 M 的楔块,楔块底

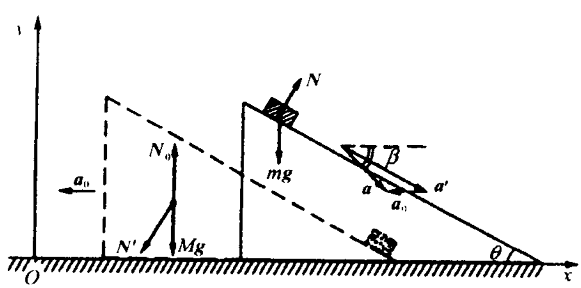


图 2.2

角为 θ,斜面光滑. 在其斜面上放一质量为 m 的物块. 求物块沿楔块下滑时它相对楔块和相对地面的加速度.

解　取静止在地面上的坐标系 xOy 为 K 系 楔块相对 K 系的加速度为

a_0,物块相对楔块得速度为 a'. 这样,物块相对 K 系的加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

其分量为

$$a_x = a'\cos\theta - a_0, \quad a_y = -a'\sin\theta$$

物块受力为重力 mg 和斜面的支撑力 N. 楔块受力为重力 Mg、地面的支撑力 N_0 和物块对斜面的压力 N', N' 是 N 的反作用力. K 系为惯性系，在 K 系中，物块的牛顿第二定律的分量形式为

$$N\sin\theta = ma_x, \quad N\cos\theta - mg = ma_y$$

将上面 a_x、a_y 的值代入上式得

$$N\sin\theta = m(a'\cos\theta - a_0 \tag{a}$$

$$N\cos\theta - mg = m(-a'\sin\theta) \tag{b}$$

在 K 系中对楔块应用牛顿第二定律得

$$N\sin\theta = Ma_0 \tag{c}$$

(a)、(b)、(c)联立求解得

$$a' = \frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \quad a_0 = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g$$

由 $a_x = a'\cos\theta - a_0$, $a_y = -a'\sin\theta$,可求得

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\sin\theta\sqrt{M^2 + m(2M+m)\sin^2\theta}}{M + m^2\sin^2\theta}g$$

设加速度 $\boldsymbol{a}$ 与水平方向的夹角为 β,则

$$\tan\beta = \left|\frac{a_y}{a_x}\right| = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\theta$$

2.2 惯 性 力

常常需要在非惯性系中处理质点的动力学问题,而牛顿运动定律又不适用于非惯性系. 引进惯性力以后，就可以应用牛顿运动定律解决非惯性系中的质点动力学问题.

设 K 系为惯性系，K'系相对 K 系作加速平动，加速度为 $\boldsymbol{a}_0$.若质点相对 K'系的加速度为 $\boldsymbol{a}'$，则质点相对于 K 系的加速度 $\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

对于 K 系，牛顿第二定律是成立的，所以

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0)$$

m 为质点的质量对于 K'系质点所受合力仍为 $\boldsymbol{F}$.对于 K'系，牛顿第二定律不成立，

$$\boldsymbol{F} \neq m\boldsymbol{a}' \quad 而 \quad \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 = m\boldsymbol{a}'$$

若把 $-m\boldsymbol{a}_0$ 也看成是质点的受力，则牛顿第二定律在 K' 系也可以应用. $-m\boldsymbol{a}_0$就是惯性力.在非惯性系中，设想一个质点除了受到实际的作用力以外，还受到虚拟的惯性力的作用，则牛顿第二定律对于非惯性系也适用.在相对惯性系以加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 平动的非惯性系中，惯性力的大小为 $-m\boldsymbol{a}_0$.

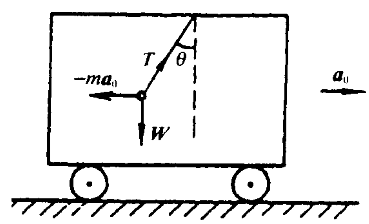


图 2.3

车厢相对地面加速平动，加速度为 $\boldsymbol{a}_0$.静止在车厢中的小球受到绳的拉力和重力的作用，如图 2.3 所示.这两个力的合力不为零.相对车厢小球静止，而受到的合力不为零.这是由于车厢不是惯性系，因此牛顿第二定律不适用.若引入惯性力 $-m\boldsymbol{a}_0$，则拉力、重力、惯性力这三个力的合力为零.引人惯性力后牛顿第二定律适用于车厢这个非惯性系.

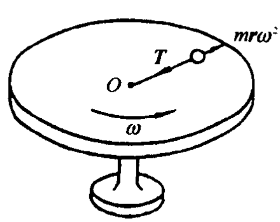


图 2.4

相对惯性系转动的参考系也不是惯性系.要在转动参考系中应用牛顿第二定律也要引进惯性力，但其中的惯性力与加速平动参考系中的惯性力不同.这里只讨论质点静止在匀速转动参考系中的情况.图 2.4 中，水平圆盘相对地面匀速转动，角速度为 ω.静止在圆盘上的小球用细绳与圆盘中心 O 点相连小球与圆盘间无摩擦力，小球只受到绳的拉力 T.相对惯性系——地面参考系，小球作匀速圆运动.绳的拉力 T 使小球产生向心加速度.由牛顿第二定律得

$$T = m\omega^2 r$$