工科大学物理实验教材

大学物理实验教程

主编　梅孝安　苏卡林　张国云
参编　刘喜斌　陶家友　周菊林
李科敏　徐旭玲　朱曙华
李　蓓　周华林

中南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验教程/梅孝安等主编.—长沙:中南大学出版社,
2006.10

ISBN 7-81105-451-5

Ⅰ.大... Ⅱ.梅... Ⅲ.物理学-实验-高等学校-教材
Ⅳ.04-03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 119895 号

大学物理实验教程

主编 梅孝安 苏卡林 张国云

□**责任编辑** 刘 辉
□**责任印制** 文桂武
□**出版发行** 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路 邮编:410083
发行科电话:0731-8876770 传真:0731-8710482
□**印　　装** 长沙市华中印刷厂

□**开　　本** 787×1092 1/16 □**印张** 9.5 □**字数** 229 千字 **插页**:
□**版　　次** 2006 年 9 月第 1 版 □2006 年 9 月第 1 次印刷
□**书　　号** **ISBN 7-81105-451-5/G·161**
□**定　　价** **16.00 元**

前　言

物理实验课是高等理工科院校对学生进行科学实验基本训练的必修基础课程，是本科生接受系统实验方法和实验技能训练的开端。物理实验课覆盖面广，具有丰富的实验思想、方法、手段，同时能提供综合性很强的基本实验技能训练，是培养学生科学实验能力、提高科学素质的重要基础。物理实验课在培养学生严谨的治学态度、活跃的创新意识、理论联系实际和适应科技发展的综合应用能力等方面，具有其他实践类课程不可替代的作用。

本书根据面向21世纪理工科大学物理实验教学内容与课程体系改革的精神，参照国家教育部《大学物理实验课程教学基本要求》，结合湖南理工学院大学物理实验室原有的物理实验讲义及近几年实验室教学改革和建设成果编写而成。

书中第一章详细介绍了物理量的测量、误差和数据处理，这是大学物理实验课程中的基本知识之一。第二章为基础性实验，主要学习基本物理量的测量、基本实验仪器的使用、基本实验技能和基本测量方法、误差与不确定度及数据处理的理论与方法等，涉及力、热、电、光、近代物理等各个领域的内容。此类实验为适应各专业的普及性实验。第三章为综合性实验，综合性实验是指在同一个实验中涉及到力学、热学、电磁学、光学、近代物理等多个知识领域，综合应用多种方法和技术的实验。此类实验的目的是巩固学生基础性实验阶段的学习成果、开阔学生的眼界和思路，提高学生对实验方法和实验技术的综合运用能力。第四章为设计性实验，第五章为研究性实验，设计性或研究性实验的目的是使学生了解科学实验的全过程，逐步掌握科学思想和科学方法，培养学生独立从事实验的能力和运用所学知识解决给定问题的能力。

书中各实验项目由实验室中多年从事相应实验项目教学的老师执笔编写，本书的主要编者有梅孝安、苏卡林、张国云、陶家友、刘喜斌、李科敏、徐旭玲、朱曙华、周菊林、李蓓、周华林等老师。实验教材和教学离不开实验室的建设和发展，无论是实验项目的筹建、准备和开出，还是教材的编写，都是实验室全体任课教师和实验技术人员多年辛勤劳动的成果，是集体智慧的结晶。

湖南理工学院教务处非常重视大学物理实验室的建设和发展，对本书的编写提供了大力支持，在此表示衷心的感谢。另外，本书在编写过程中参考了许多兄弟院校的教材，甚至引用了某些内容，在此表示衷心感谢。由于编者水平有限，加上时间紧凑，书中的错误和不足之处敬请读者批评指正。

编　者

2006年7月

目 录

第一章　绪　论

第一节　大学物理实验课的目的和任务

物理学是一门实验科学。人类对物理现象的规律性认识，一般是首先通过观察提出假说，经过实验(或实践)再总结其规律而得到理论，或把由观察所得到的结论用实验方法加以验证，然后再提升为理论。已有的科学理论及其推论，仍不断地受到实验(实践)的检验，使其更完善更深化，理论又能指导实验仪器设计与制造水平的提高，实验方法手段也将随之更新；新的实验仪器和方法又可发现某些理论的片面性与局限性，由此又可促进理论的发展。由此可知，实践→理论→再实践→再理论螺旋式发展的过程，正是物理学发展的普遍过程。

所谓物理实验，就是人们为了研究、分析自然界中某些物理现象，人为地使现象再现所作的安排，它可抑制次要因素，而使主要因素从错综复杂的现象中呈现出来，还可变换现象进行的条件，以便对某些物理现象进行反复慎密、多次的观测分析，从而找出现象之间的联系，并通过一定的相对准确的测量方法和手段建立相应的数量关系。特别是物理学发展到现在，若离开了科学实验，要进一步揭示宇宙的奥秘和基本粒子的内部结构几乎是不可能的。此外，在物理学渗透到各边缘学科和技术领域中去时，物理实验也往往起着决定性的作用。由此可见物理实验是物理这门学科的基础和重要组织部分。因此，对于理工科专业的学生，掌握物理实验和掌握物理理论是同样重要的。

我们学习大学物理实验这门课程时不仅可以学习前辈们创造的丰富巧妙的实验方法，接触到各种各样的实验仪器，掌握一些基本的实验技能，还可以培养自己脚踏实地、实事求是的科学研究作风。不仅能使我们获得物理实验这门课程完整系统的知识，还可使我们为其他学科的学习打下良好的基础。

对于理工科院校学生，物理实验课的主要目的和任务是：

(1) 通过观察、测量与分析，使我们对研究物理学的基本方法有所理解，从而加深对物理概念和理论的认识。物理学本质上是一门实验的科学，已有的物理理论是前人从实验中直接或间接得来的并经过多次检验了的。我们学习它时，虽然不可能也没必要都用实验去重新检验，但针对其中的主要概念和规律来进行观测和分析，从中学习研究方法和加深理解知识是完全有必要的。

(2) 学习物理实验的基础知识、基本方法，培养基本的实验技能。要做好一个实验，除了要了解有关的理论外，还必须能运用恰当的实验方法，合理地选取符合实验要求的仪器；懂得怎样装配、调整及正确操作这些装置；熟练掌握一些基本物理量和重要物理常数的测量方法；对观察的现象、测量的数据、实验结果能正确记录，运算和分析，并能写出科学而完整的实验报告。

(3) 培养严肃认真、实事求是的科学态度和刻苦顽强、耐心细致的作风。实践是检验真

理的唯一标准，物理学是科学真理，来不得虚假。做物理实验时我们一定要严肃认真、严格要求，做到测量真实，准确可靠，分析有理，结果正确，不达目的决不罢休。

物理实验课虽然有老师的指导，但在实验中主要靠同学们自己动手独立完成。因此，我们应以一个研究者的姿态去独立组装仪器，进行观测与分析，大胆而细致地探讨最佳的实验方案，从中积累经验，锻炼技巧和机智，这将为以后独立地设计实验方案、选择并使用新的仪器设备和解决新的实际问题打下扎实的基础。

第二节　测量和误差的基本概念

一、测量和误差的概念

1. 测量及其分类

物理实验总是离不开物理量的测量。所谓测量，就是借助仪器（或量具）将待测量和规定的标准单位量进行比较确定其倍数的过程。例如，用刻度尺测量某物体的长度是23.6mm，则表示以毫米（mm）为标准单位，待测物体的长度为毫米的23.6倍，测量结果必须同时给出待测物理量的数值和单位。

依获得测量结果的方法不同，可以把测量分为直接测量和间接测量两类。能由仪器（或量具）直接测出被测量的数值（大小）的测量称为直接测量。例如：用米尺测长度，天平测质量，秒表测时间，温度计测温度，等等。但也有许多物理量不能直接测得，而要通过对某些有关物理量的直接测量，再借助于某些函数关系（或公式）计算得出待测量的大小，这种测量方法称为间接测量。例如：在单摆实验中，通过对单摆长 L 和摆动周期 T 的直接测量，再利用公式 $T=2\pi\sqrt{L/g}$，计算出重力加速度 g。当然随着科学技术的发展测量仪器有了很大的进步，许多过去要间接测量的量，现在可以进行直接测量了。因此，我们在完成实验报告时，一定要标出所用的主要仪器。

其次，根据测量的条件和过程也可把测量分为等精度测量和不等精度测量。测量的条件和过程主要指观察者、仪器、测量方法、环境等。如果对某物理量重复测量了许多次，而每次的测量条件都完全相同，我们称这种测量为等精度测量；若测量中只要某个条件发生了变化，就称为不等精度测量，例如：原来用米尺测长度，后来用游标卡尺测长度就是不等精度测量。

2. 测量结果的准确度

各物理量的测量，不论是直接测量还是间接测量，都只是客观实际的近似反映，都具有不准确性，所以实验者应能依据仪器的精度（仪器所能精确测得的最小单位），正确估计实验结果的准确度，来决定实验结果有无价值，实验是否成功，并可据此来改进实验方法和实验仪器。

3. 误差及其分类

在物理实验中，我们所要测量的某一物理量在一定条件或状态下总有一个客观存在的实际数值叫做真值。但在实际测量中，由于实验的原理方法，测量仪器不够完善，实验环境的变化，人们的观测能力的限制，所得的测量值和真值之间总有一定的差异，这种测量值和真值之差的称误差。若某物理量的真值为 x_0，测量值为 x，则误差可表示为

$$\varepsilon = x - x_0 \tag{1}$$

由于测量误差是不可避免的，而真值又是测不出的，所以测量的目的应当是在尽量减少误差之后求出在该测量条件下测量的最近真值，以及对它的准确度作恰当的估计，有关误差理论就是为了完成这一目的而发展起来的。

误差按其产生的原因，可分为系统误差、偶然误差和过失误差三类。

(1)系统误差，在一定的条件下(指仪器方法环境和观测者)，对同一物理量进行多次测量时其测量结果总是向一个方向偏离(总偏大或偏小)，即测量误差的符号与大小总是保持不变或按一定的规律变化，这种误差称系统误差。其来源有：

①观测者的生理缺陷，不良的实验习惯或实验技能不佳带来的偏向，所造成的误差。我们又称为个人误差。例如：反应的快慢、分辨能力的高低总使读数偏大或偏小(如按表时总是稍早或稍迟)。这种误差只有实验者细心体察和经过训练才能有所减小。

②实验仪器制造上的缺陷或使用时调节不当或未加校准、元件老化所造成的误差，我们称它为仪器误差。例如，米尺刻度不精确或不均匀或因温度变化而热胀冷缩等造成读数不准。这类误差只有对仪器进行校准才能减小。应注意：第一，仪器误差通常标记在仪器铭牌上或说明书中，有时也用仪器的精度级别表示。应当养成实验者先仔细看仪器铭牌的习惯，并记住仪器型号、量程、等级、接线图等，以便正确使用。第二，若未给出仪器误差，则可作如下估计：对有游标的量具和非连续读数的仪表(如电子表、数字仪表)取(单次测量而言)其最小分度值；对能连续读数仪表，则取最小分度值的一半。

③实验理论和方法的不完善。间接测量时所利用的公式，一般是在很严格的条件下导出来的，而实验往往难于全部满足这些条件，因此用测量值计算的结果，无论测量如何准确，计算如何精细，也必然与理论值有偏差，这种偏差我们称之为理论误差。如用单摆测 g 时所用的公式 $T=2\pi\sqrt{L/g}$，是在摆的偏角 θ 很小(满足 $\sin\theta\approx\theta$)和忽略摩擦阻力的条件下导出来的。显然这些条件实验中无法满足，从而将使测量结果产生误差。这些误差可通过对公式的修正(如加修正项)而减小。

系统误差中有的难免确定其符号和大小，可对观测值加以修正，但有些系统误差的大小和符号都不知道，则应在实验中采取一些办法去限制和减小它对测量结果的影响。当然在实验中，一般不考虑系统误差的修正，但同学们在思想上必须明确，在测量结果中，包含着系统误差的因素在内。

(2)偶然误差，又称随机误差，在相同的条件下对同一物理量进行多次测量，其误差的大小和符号的变化时大时小，时正时负，没有确定的规律，也不可能预料这种误差叫偶然误差。它的可能来源是：

①外界偶然因素的干扰和影响。例如，使用物体天平称衡时，外界系统的影响；地板或桌子的规则振动造成测量结果的大小不一。

②实验者的感官(如听觉、视觉、触觉)的分辨能力不尽相同；(同一个人不同时刻也可能不同)表现为估读能力不一致；以及实验者技术水平的限制。例如，用温度计测温度，用米尺或螺旋测微器测长度时，最后一位读数是估计的，由于受到眼睛分辨本领的限制，读数可能偏大，也可能偏小，根据①式得 ε 时而为正，时而为负，而且正或负的误差发生的机会(概率)服从统计规律——各次测量值总是在其真值附近涨落，且正负概率均等。

据此，在实验中，偶然误差虽然是不能消除的但可以减少。在相同条件下，对同一待测

量进行多次重复测量所求得的算术平均值最为接近真值。因此为了减少偶然误差，我们要尽可能的采取多次测量，取多次测量值的算术平均值作为测量结果，同时对测量结果的可靠程度作出合理的估计。

(3)过失误差，又称粗心误差。这是明显的歪曲测量结果的误差，这种误差是由于实验者使用仪器的方法不正确，实验方法使操作不合理，粗心大意，过度疲劳，读数记录数据发生错误，以及实验状态还未达到预定的标志就匆忙测量等引起的。这种误差是人为的，实验中应绝对避免。正确测量结果中不容许含有过失误差，含有过失误差的测量值(坏值)，如发现坏值应立即剔除。

根据上述讨论可知，在实验中过失误差是完全可以避免的。而系统误差和偶然误差虽不能避免，但能尽量减小。但我们应知道系统误差不遵循统计规律(应采取修正的办法)因此在误差理论中一般只计算偶然误差。

第三节　有效数字及其运算

一、有效数字的基本概念

有效数字对科研工作者十分重要。下面我们从一实例引入有效数字的知识。

图 1－1 是用毫米刻度尺对一杆的长度进行测量其长度在 3.4cm 到 3.5cm 之间。例如我们将其记为 $l=3.43$cm。这个数据的前两位是准确的，叫准确数字。最后一位“3”是估计的，叫可疑数字，不同的测量者可能估计出不同的可疑数字。我们把上述的准确数字和可疑数字都叫有效数字。任何仪器读数都要读到最小刻度的下一位。记录的数据应当且只能保留一位可疑数字，决不允许随意增减有效数字的位数。对于图 1 的测量，将结果写成 3.4cm 或 3.5cm或 3.450cm 或 3.430cm 都是错误的。如果杆长恰压在 3cm 这条线上应将其记为 3.00cm。要注意小数点之前定位所用的零不是有效数字。一个数从左至右遇到的第一个非零数字本身及其后面所有的数字(包括零)都为有效数字。从测量数据的有效数字的位数上一看就可大体判断测量仪器的精度。例如三个测量数据分别为 12.4mm，12.46mm，12.463mm。可以判断第一个数据是用最小刻度为 mm 的米尺测量而得，第二个可能是精度为 0.02mm 的游标尺所测，第三个数据则可能是由(千分尺)螺旋测微计所测。

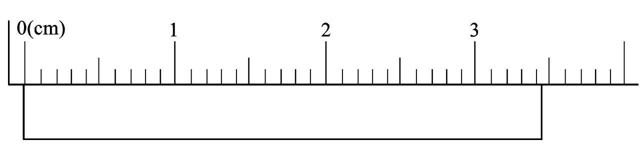

图 1－1

有效数字的位数不多，但又要表示较大的数时，应采用科学计数法。例如下面一组数据都是三位有效数字且表示同一刻度：3.43cm；34.3mm；0.0343m；3.43×10^{8} Å；3.43×10^{-5}km。

二、有效数字的运算规律

因间接测量的结果要将直接测得的量代入某些公式中算出，而直接测量的准确度不可能一致，有效数字的倍数也不一定相同，那么在运算中如何处理有效数字才能使结果是科学可信的呢？这就要靠有效数字的科学运算来保证。

1. 加减法规则

两数和或差的结果中的可疑数字的位置应与两数中最高的可疑位数截齐，此后的可疑数采用四舍五入的办法去掉。

例 1，求 $43.3206+36.25=?$

例 2，求 $43.3286-36.25=?$

解：

$$\begin{array}{r} 43.3206 \\ +36.25 \\ \hline 79.5\underline{706} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 43.3286 \\ -36.25 \\ \hline 7.0\underline{786} \end{array}$$

取 79.57　　　　取 7.08

为简化运算，可以选两数中最高的可疑位数为准，而把另一数中在这位数以后的数字用四舍五入去掉，再进行加减运算，上两例可为：

$43.3206+36.25=43.32+36.25=79.57$

$43.3286-36.25=43.33-36.25=7.08$

练习：$32.1+3.276=?$　　　　$26.65-3.926=?$

$$\begin{array}{r} 32.\underline{1} \\ +3.27\underline{6} \\ \hline 35.\underline{376} \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r} 26.6\underline{5} \\ -3.92\underline{6} \\ \hline 22.7\underline{24} \end{array}$$

取 35.4　　　　取 22.72

简化：$32.1+3.276=32.1+3.3=35.4$　　　　$26.65-3.926=26.65-3.93=22.72$

2. 乘除法规则

两数相乘或相除时，积或商所保留的有效数字的位数，应与两数中有效数字最少的那个数的位数相同(有时可能多一位或少一位)。

例 1　$0.003456\times0.038=?$

解：

$$\begin{array}{r} 0.003456 \\ \times 0.003\underline{8} \\ \hline \underline{27648} \\ 10368 \\ \hline 0.0001313128 \end{array}$$

取0.00013

例 2　$5.348\times20.5=?$

解：

$$\begin{array}{r} 5.34\underline{8} \\ \times 20.5 \\ \hline \underline{26740} \\ 000\underline{0} \\ 1069\underline{6} \\ \hline 10\underline{9.6340} \end{array}$$

取110

例 3　1.4 ÷ 3.142 = ?

解：

$$
\begin{array}{r}
0.44\underline{5} \\
3.14\underline{2}\overline{)\ 1.4\underline{000}} \\
1256\underline{8} \\
\hline
\underline{14320} \\
1256\underline{8} \\
\hline
\underline{17520} \\
1571\underline{0} \\
\hline
1810
\end{array}
$$

← 全是可疑数：故必是可疑数

取0.4$\underline{5}$

例 4　3.14159 ÷ 2.50 = ?

解：

$$
\begin{array}{r}
1.256\underline{6} \\
2.5\underline{0}\overline{)\ 3.1415\underline{9}} \\
25\underline{0} \\
\hline
6\underline{41} \\
50\underline{0} \\
\hline
\underline{1415} \\
125\underline{0} \\
\hline
\underline{1659} \\
1500 \\
\hline
\underline{1590} \\
1500 \\
\hline
9\underline{0}
\end{array}
$$

取1.257（比2.50多一位）

← 全是可疑数，故商必为可疑数

例 5　3764 ÷ 217 = ?

$$
\begin{array}{r}
17\underline{3.4}\cdots\cdots \\
2.1\underline{7}\overline{)\ 3764\underline{3}} \\
21\underline{7} \\
\hline
15\underline{9}4 \\
151\underline{9} \\
\hline
\underline{753} \\
\underline{651} \\
\hline
\underline{1020}
\end{array}
$$

→ 取17$\underline{3}$

→ 9为可疑数，但不影响商7，7仍为准确数

→ 全是可疑数，商为可疑数

其实，上述乘除法出可以作以下简化运算：求两个数的积或商时，可选按四舍五入办法将有效数字位数多的那个数改为与有效数字位数少者位数相同的数，再进行运算，如：

3.456 ×10 −3 ×3.8 ×10 −2 =3.5 ×10 −3 ×3.8 ×10 −2 =1.330 ×10 −4 =1.3 ×10 −4

1.4 ÷3.142 =1.4 ÷3.1 =0.45

3.14159 ÷2.50 =3.14 ÷2.50 =1.257

例 6　地球的质量 $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg，月球质量 $M = 7.34 \times 10^{22}$ kg，地心与地间距离 $r = 3.84393 \times 10^{8}$ m，求其间的万有引力（$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N• m^2/kg）

解：在公式 $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$ 中，G 与 m 都是√2位有效数字，所以 M 与 r 也只需取三位有效数字，第四位按四舍五入处理，即得

$$F = 6.67 \times 10^{-11} \cdot \frac{5.9810^{24} \times 7.34 \times 10^{22}}{(3.84 \times 10^{8})^2} = \frac{6.67 \times 4.39 \times 10^{36}}{1.47 \times 10^{17}} = \frac{2.93 \times 10^{37}}{1.47 \times 10^{17}} = 1.99 \times 10^{20}\ (\mathrm{N})$$

答：略

3. 由乘除法则可推知乘方，开方规则：某数的乘方（或开方）的参数（或被开方数）有几位

有效数字，其结果中就保留几位有效数字。

例 1：$3.84^2 = 14.7456 = 14.7$

例 2：$\sqrt{16.4} = 4.0497 = 4.05$

4. 测量值与常数或与已知的正确值（即无穷多位有效数字）进行运算时，其结果中也只保留一位可疑数字，即有效数字的位数与测量值的位数相同（有进多一位或少一位）

例 1：$72.4 \times 3 = 217.2 = 217$

例 2：$72.4 \div 3 = 24.13 = 24.1$

例 3：$\pi \times 5.70 = 3.14 \times 5.10 = 16.041 = 16.0$

例 4：$\pi \times 5.1 = 3.1 \times 5.1 = 15.81 = 15.8$（多一位）

5. 指数、对数三角函数运算结果的有效数字可由用下法确定。当参加运算数据的最末稍作改变时，看影响至结果的哪一位则哪一位为可疑位？

例：$\sin 43°26' = 0.6875100985$

$\therefore \sin 43°26' = 0.6875$

$\sin 43°276 = 0.687723051$

6. 尾数的舍入法则：小于五则舍，大于五则入，等于五而保留的最后一位数是奇数，则舍 5 进 1，若保留的最后一位是偶数，则舍 5 不进位，但 5 的下一位不是 0 时仍要进位。

例：将下列数保留三位小数

$2.14346 \rightarrow 2.143$

$2.14372 \rightarrow 2.144$

$2.14350 \rightarrow 2.144$

$2.14450 \rightarrow 2.144$

$2.14451 \rightarrow 2.145$

以上这些结论，在一般情况下是成立的，但也有例外，如果我们了解有效数字的意义和可疑数字取舍原则，是不难处理的。

第四节　实验结果的表示

实验的目的就是为了得到某个结果，可是怎样才能用测量、记录的准确值来正确地表示这个数呢？又如何来评价这个结果的误差范围呢？下面我们来讨论这个问题：

一、误差的估计

实验结果的准确度用实验误差的大小来衡量，所以每一实验的结果都应指出其误差范围，以表示实验的准确度。实验者不仅要能算出实验的误差大小，而且还要能判断这一误差大小是否在仪器的最大误差内，若在其内，则说明实验本身是合理的；若不在其内，则说明实验本身有错误，应予改进。

1. 误差的表示

（1）单次直接测量的误差用仪器误差表示，一般由教师给出，或由仪器生产厂家按国家标准提供。在应急的场合，也可简单取仪器最小刻度的一半作为估计值。如此处理后，我们认为测量结果的置信概率在 95% 以上。但准确地说，应该由仪器本身经过检定以后以一种规

定的形式标出。例如：

游标卡尺	测量范围：0～200mm
	分度值：0.02mm
	仪器误差：$\Delta_{仪}=0.02$mm
螺旋测微器	测量范围：0～50mm
	分度值：0.01mm
`	仪器误差：$\Delta_{仪}=0.005$mm
分析天平	最大称量：200g
	感　　量：10mg/格
	仪器误差：$\Delta_{仪}=\Delta_{砝码}+\Delta_{感}$
电表(mA)	量　　程：$X_m=500$mA
	精度级别：$a=0.5$ 级
	仪器误差：$\Delta_{仪}=X_m\cdot a\%=2.5$mA

上述单次测量结果表示为：$x=x_{测}\pm\Delta_{仪}$　　(1)

仪器误差 $\Delta_{仪}$一般均含有偶然误差和系统误差(已定和未定的)，其含意是：正确使用仪器的情况下可能产生的最大误差。由于$\overline{\Delta x}$与 $\Delta_{仪}$代表的都是最大误差，因此，在对某一物理量进行多次测量时，若是测量值起伏很小，则：

当$\overline{\Delta x}<\Delta_{仪}$时，测量结果由$\overline{\Delta x}\pm\Delta_{仪}$表示。

若$\overline{\Delta x}>\Delta_{仪}$，(即测量值起伏很大)时，测量结果应由$\overline{X_{测}}\pm\Delta\overline{X}$表示。

(2)设对某物理量测量 N 次的值分别为 x_1、x_2，…，x_n，则测量结果的算数平均值 $\overline{X}$ 为：

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{2}$$

根据偶然误差的统计规律可知，算术平均值 $\overline{X}$ 应比任何一次测量结果更接近于真值。当不知有真值 X_0值时，一般就可用算术平均值作为真值 X_0的最佳估计值，称之为近真值。此时，各次测量的值与算术平均值的差为各次测量的“绝对误差”，由(1)式得：

$$\Delta x_i=x_i-\overline{x} \tag{3}$$

第 i 次测量的绝对误差。

各次测量的绝对误差可为正，也可为负，但计算时，为了使人对测量结果放心，应当取最坏的结果，所以只取其绝对值$|x_i-\overline{x}|$，而不考虑正、负号，并且误差中多余的数字不按四舍五入取舍，而是按向前进位的办法，这就是所谓取测量误差的“宁大勿小原则”。

各次测量的绝对误差的平均值 称为平均绝对误差：

即：
$$\overline{\Delta X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\nabla x_i| \tag{4}$$

平均绝对误差只能反映测量结果偏离真值的平均误差程度，而不能反映相对于被测量值的准确程度。为了反映出这一点，我们用平均绝对误差与算术平均值的比来表示，这个比值叫测量结果的相对误差。即：

$$E=\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\times100\% \tag{5}$$

但若已有真值(或公认值)x_0，则(3)和(5)式中的 $\bar{x}$ 就应改为 x_0 值，为了把测量结果的误差科学的表示出来，其方法有两种：

第一种：用平均绝对误差表示，即：

$$测量值\quad x = \bar{x} \pm \Delta x(单位) \tag{6}$$

所以，测量的平均值与误差及单位是表示测量结果的三个要素。

第二种：用平均相对误差来表示，即(5)式。

例 1：用刻度尺测量一棒长度，其测量值分别为 $x_1 = 2.32\text{cm}$，$x_2 = 2.34\text{cm}$，$x_3 = 2.35\text{cm}$，$x_5 = 2.35\text{cm}$ 求棒长。

解：棒长为：$\bar{x} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_5}{5} = 2.338(\text{cm})$ 取 2.34cm

且 $\Delta x_1 = x_1 - \bar{x} = 0.02\text{cm}$，$\Delta x_2 = 0.00\text{cm}$，$\Delta x_3 = 0.01\text{cm}$，$\Delta x_4 = 0.01\text{cm}$，$\Delta x_5 = 0.01\text{cm}$.

$\therefore \Delta x = \dfrac{\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_5}{5} = 0.01\text{cm}$

$\therefore E = \dfrac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\% = \dfrac{0.01}{2.34} \times 100\% = 0.43\%$，取 5%，

最后棒长为：$L = (\bar{x} \pm \Delta x)\text{cm}$

即：$L = (2.34 \pm 0.01)\text{cm}$

用平均相对误差比用平均绝对误差能更明显的反映出测量结果的准确度。如用同一刻度值测量两棒的长度，其值分别为：

$L_1 = 206.43 \pm 0.01\text{cm}$；$L_2 = 2.34 \pm 0.01\text{cm}$

虽然两者的绝对误差相同，但相对误差分别为

$$E_1 = \frac{0.01}{206.43} \times 100\% = 0.0048\% = 0.005\%$$

$$E_2 = \frac{0.01}{2.43} \times 100\% = 0.5\%$$

不难看出，测第二根棒的准确度比第一根棒的低两个数量级。

应当指出，根据有效数字的运算规则，测量值的绝对误差与相对误差都只能有一位有效数字，又根据误差估算应遵循“宁大勿小”的原则，此例中的相对误差应为 $E_1 = 0.005\%$，$E_2 = 0.5\%$。

由上面的讨论可得出以下两个结论：第一，平均绝对误差与被测量值的大小无关，只由仪器的精确度和测量方法决定。如第二根棒若用精度更高的游标卡尺测得的长度为 $L_2 = (2.342 \pm 0.002)\text{cm}$，则其平均绝对误差只有用前刻度尺测量的 2/10。第二，平均相对误差与测量值的大小有关，用同一仪器和相同方法测量时，若测量值越大，则其相对误差越小。如第一棒的平均相对误差就比第二棒的小得多。因此，在要求准确度相同的条件下，应被测量值大时，可使用精度低一些的仪器，被测量值小时，则要求精度高的仪器。这是实验前选用仪器的重要原则。

二、间接测量结果的误差

间接测量的结果都要将直接测量的量代入某些公式而算出，由于直接测量有误差而必然

使得间接测量也有误差，这称为误差传播。误差的传播根据上一节中的原则的得出以下计算规则。

1. 两量的和或差的绝对误差、相对误差

设某间接测量物理量 φ 等于直接测量物理量 A、B 之和，即 $\varphi=A+B$，它们的绝对误差各为 $\Delta\varphi$、ΔA、ΔB。则由(6)式有：

$$\varphi\pm\Delta\varphi=(A\pm\Delta A)+(B\pm\Delta B)=(A+B)\pm(\Delta A+\Delta B)$$

上式中根据误差“宁大勿小”的原则，ΔA 与 ΔB 取了相同符号，比较以上二式得到 φ 的绝对误差为 $\Delta\varphi=(\Delta A+\Delta B)$，其相对误差 $E_\varphi=(\Delta\varphi)/\varphi=(\Delta A+\Delta B)/(A+B)$。

同理对于 $\varphi=A-B$，有 $\varphi\pm\Delta\varphi=(A\pm\Delta A)-(B\pm\Delta B)=(A-B)\pm(\Delta A+\Delta B)$，得：绝对误差：$\Delta\varphi=(\Delta A+\Delta B)$，相对误差为：$E=(\Delta\varphi)/\varphi=(\Delta A+\Delta B)/(A-B)$。

由此，可将两量的和或差的误差归纳为：

$$\varphi=A\pm B,\ \Delta\varphi=(\Delta A+\Delta B) \tag{7}$$

即：两量的和或差的绝对误差都等于各分量的绝对误差之和。

其相对误差为：

$$E=\Delta\varphi/\varphi=(\Delta A+\Delta B)/(A\pm B) \tag{8}$$

(7)、(8)两式可推广到多个分量的和或差。

2. 两量乘积的绝对误差和相对误差

设 $\varphi=A\cdot B$，

则 $\varphi\pm\Delta\varphi=(A\pm\Delta A)\cdot(B\pm\Delta B)=A\cdot B\pm A\cdot\Delta B\pm B\cdot\Delta A\pm\Delta A\cdot\Delta B$，

略去高阶无穷小量($\Delta A\cdot\Delta B$)并依据误差“宁大勿小”原则其饱对误差为：

$$\Delta\varphi=(A\cdot\Delta B+B\cdot\Delta A) \tag{9}$$

相对误差为：$$E_\varphi=\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=\frac{A\cdot\Delta B+B\cdot\Delta A}{A\cdot B}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}=E_A+E_B \tag{10}$$

即两量乘积的相对误差等于两分量的相对误差之和。

若 A 是变量，而 $B=C$ 常数，则 $\Delta\varphi=C\Delta A$，$E_\varphi=\frac{\Delta A}{A}$。

3. 两量相除时的绝对误差、相对误差

设 $\varphi=\frac{A}{B}$，则 $\varphi\pm\Delta\varphi=\frac{A\pm\Delta A}{B\pm\Delta B}$，分子分母同乘 $B\mp\Delta B$ 得：

$$\varphi\pm\Delta\varphi=\frac{(A\pm\Delta A)(B\pm\Delta B)}{B^2-\Delta B^2}=\frac{AB\pm B\Delta A\pm A\Delta B\pm\Delta A\Delta B}{B^2-\Delta B^2}$$

略去高阶无穷小量 $\Delta A\Delta B$、ΔB^2 得：

绝对误差：$$\Delta\varphi=\frac{A\cdot\Delta B+B\cdot\Delta A}{B^2} \tag{11}$$，得：

相对误差：$$E_\varphi=\frac{\Delta\Phi}{\Phi}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}=E_A+E_B \tag{12}$$

即两量乘积或商的相对误差都等于两分量相对误差之和。

4. 幂函数的绝对误差、相对误差

设 $\varphi=A^n$ 式中 n 为整数，依(10)式得 φ 的相对误差为：

$$E_{\varphi} = \frac{\nabla A}{A} + \frac{\nabla A}{A} + \cdots\cdots = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\nabla A}{A}\right) = n\frac{\nabla A}{A} \tag{13}$$

绝对误差为：$\Delta\varphi = \varphi \cdot E_{\varphi} = A^{n} \cdot n\frac{\nabla A}{A} = nA^{n-1} \cdot \Delta A$ (14)

当 $\varphi = \sqrt[n]{A}A^{1/n}$时，

则 $\varphi \pm \Delta\varphi = (A \pm \Delta A)^{1/n}$，将此式两边同乘以 n 次方后展开，且略去 $\Delta\varphi$ 的高次项得：

$\varphi^{n} \pm n\varphi^{n-1} \cdot \Delta\Phi = A \pm \Delta A$

绝对误差：$\Delta\Phi = \frac{1}{n}A^{\frac{1}{n}-1} \cdot \Delta A = \frac{1}{n}\sqrt[n]{A^{1-n}} \cdot \Delta A$ (15)

相对误差：$E_{\Phi} = \frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{1}{n}\frac{\Delta A}{A}$ (16)

所以幂函数的相对误差等于其底的相对误差的指数倍。

其实，用微分法计算误差(特别是对于复杂函数式)是最简便又可靠的。如求 $\varphi = A \cdot B$ 的绝对误差 $\Delta\Phi$ 就是求 Φ 的全微分，依全微分公式得：$\mathrm{d}\varphi = A\mathrm{d}B + B\mathrm{d}A$

式中 $\mathrm{d}A$ 和 $\mathrm{d}B$ 分别是量 A 和 B 的绝对误差，Φ 的相对误差为：

$$E_{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}B}{B}$$

对于一般函数 $\varphi = f(A,B)$ 求全微分，得：

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial f}{\partial A}\mathrm{d}A + \frac{\partial f}{\partial B}\mathrm{d}B \xrightarrow{\text{误差取}} \Delta\varphi = \left|\frac{\partial f}{\partial A}\Delta A\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial B}\Delta B\right| \tag{17}$$

有时取对数后再微分要简便多：

$$\ln\varphi = \ln f(A,B) \rightarrow \mathrm{d}(\ln\varphi) = \mathrm{d}(\ln f(A,B))$$

即：$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{\partial \ln f}{\partial A}\mathrm{d}A + \frac{\partial \ln f}{\partial B}\mathrm{d}B$

相对误差为$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial A}\Delta A\right| + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial B}\Delta B\right|$ (18)

根据基本公式求间接测量结果误差的传递合成的步骤可归纳为：

(1)对函数求全微分(或先取对数再求全微分)。

(2)合并同一变量的系数。

(3)将微分号变为误差号。注意各项均取绝对，并用“+”号相连，现将按上述讨论的步骤求出的常用函数的算术合成式列于下表：

例 2：用尺测得某圆柱体的直径 $D = (5.00 \pm 0.01)$ cm，其高 $h = (10.00 \pm 0.01)$ cm。问(1)此量具的精度是多少？其最大的误差是多少？这量具是皮尺、米尺、游标尺吗？(2)该圆柱体体积的相对误差和绝对误差是多少？其体积多少？(3)在体积的误差中测量直径的误差与测量高度的误差哪个是主要的？(4)若要使体积的相对误差小于 0.1%，D 和 h 各要用什么量具来测量？

函数关系	绝对误差	相对误差
$\varphi = A + B$	$\Delta\varphi = \Delta A + \Delta B$	$E = (\Delta A + \Delta B)/A + B$
$\varphi = A - B$	$\Delta\varphi = \Delta A + \Delta B$	$E = (\Delta A + \Delta B)/A - B$
$\varphi = A \cdot B$	$\Delta\varphi = A \cdot \Delta B + \Delta A \cdot B$	$E = \Delta A/A + \Delta B/B$
$\varphi = nA$	$\Delta\varphi = n\Delta A$	$E = \Delta A/A$
$\varphi = A/B$	$\Delta\varphi = (B\Delta A + A\Delta B)/B^2$	$E = \Delta A/A + \Delta B/B$
$\varphi = A^n$	$\Delta\varphi = nA^{n-1}\Delta A$	$E = n \cdot \Delta A/A$
$\varphi = \sqrt[n]{A}$	$\Delta\varphi = \frac{1}{n}A^{(1/n)-1}\Delta A$	$E = \frac{1}{n}(\Delta A/A)$
$\Phi = \sin A$	$\Delta\Phi = \lvert\cos A\rvert \cdot \Delta A$	$E = \mathrm{ctg}A \cdot \Delta A$
$\Phi = \mathrm{tg}A$	$\Delta\Phi = \frac{\Delta A}{\lvert\cos A\rvert}$	$E = \frac{\Delta A}{\sin A}$
$\Phi = \ln A$	$\Delta\Phi = \frac{\Delta A}{A}$	$E = \frac{\Delta A}{A\ln A}$

解：(1)此量具的精度是0.1cm。若是能连续读数的长度尺，则其最大误差是最小刻度的一半(即0.05cm)，若是不能连续读数的数字长度计，则其最大误差是分度值(即0.1cm)此测量值是最小刻度为毫米的刻度尺。

(2)因 $V = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot h$ $\therefore$ 由(16)、(13)式得 $E_V = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{2 \times 0.01}{5.00} + \frac{0.01}{10.00} = 0.004 + 0.001 = 0.005\% = 0.5\%$

绝对误差：$dV = \frac{\pi}{4}(D^2 \mathrm{d}h + h\mathrm{d}D^2) = \frac{\pi}{4}(p^2 \mathrm{d}h + 2phD)$

$$= \frac{\pi}{4}(5.00^2 \times 0.01 + 2 \times 5.00 \times 10.00 \times 0.01)\mathrm{cm}^3$$

$= 0.981\mathrm{cm}^3 = 1\mathrm{cm}^3$(绝对误差只能取一位)

或者：$\because E_V = \frac{\Delta V}{V}$

$$\therefore \Delta V = E_V \cdot V = \frac{0.5}{100} \times \frac{\pi}{4} \times 5.00^2 \times 10.00\mathrm{cm}^3 = \frac{0.5}{100} \times 196\mathrm{cm}^3$$

$$= 0.981\mathrm{cm}^3 = 1\mathrm{cm}^3$$

故其体积为：$V = \frac{\pi}{4}D^2 h \pm \Delta V = (196 \pm 1)\mathrm{cm}^3$

(3)由 $E_V = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{2 \times 0.01}{5.00} + \frac{0.01}{10.00}$可知，$\frac{2\Delta D}{D} > \frac{\Delta h}{h}$

$\therefore$ 测 D 的误差是主要的。

(4)由 $E = \frac{2\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{2X}{5.00} + \frac{X}{10.00} = 0.1\%$

若 $X = 0.002\mathrm{cm}$，$\therefore$ 要用精度为0.002cm($\frac{1}{50}$mm)的游标尺才行。