绪　论

科学实验是自然科学研究的主要手段，以探索、预测或验证自然科学新现象、新规律为目的。一般来讲，科学实验包括以下四个步骤：①确定研究对象，给出研究方案；②选择或设计实验装置与条件；③观察实验现象与记录实验数据；④整理分析实验结果，得出结论。

大学物理实验是一门基础实验课，是以教学为目的，有别于科学实验。多数情况下，它已确定了具体的研究对象，并给出了实验所需要的仪器。其目的在于：

1. 传授学生系统的实验方法和实验技能，培养学生从事科学实验的基本能力。例如，熟悉常用仪器的原理、操作与实验技术等。

2. 使学生掌握实验数据的处理方法。

3. 培养学生实事求是的科学态度及坚韧不拔的工作作风.

4. 提高科学思维、分析与创新能力. 教学实验大都经过精心设计，但仍会遇到许多困难和问题，对这些问题的分析与解决，是提高学生综合素质的主要途径。

大学物理实验是一门实践性很强的课程，是培养和提高学生科学素质和能力的重要课程之一。学生在独立完成实验项目的过程中积累知识，提高科学素质和创新能力要实现这一目的，要求学生：

1. 首先要清楚每次实验的如下问题：测量内容是什么？用什么途径去测量？为什么这样做？还有无其他的测量途径？

2. 要注意掌握实验中所采取的实验方法，特别是一些基本的测量方法. 因为这些方法在日后的工作中经常会用到，同时它又是复杂测量的基础，我们在学习时不仅要掌握它的原理，而且要知道它的适用条件及优、缺点，这些内容只有通过亲身实践才能真正体会到。

3. 要有意识地培养良好的实验习惯。例如，正确记录原始数据和处理数据，注意记录实验的客观条件，如温度、气压、日期等。认真学习与培养操作习惯、操作姿势，因为这些良好的习惯是经过许多实验总结出来的，是保证实验安全、避免差错的基础.

4. 要逐步学会分析、排除实验中出现的某些故障。当实验结果不理想时，要考虑实验方法是否正确？仪器可能带来多大误差？实验环境等因素对实验有多大影响？

5. 要注意实验室操作规程和安全规则. 随着实验项目的进行，会逐步接触到各种测量仪器，它们有不同的使用要求与工作环境，操作不当不仅会损坏仪器，而且

有可能对身体造成伤害，因此要求学生遵守实验室的具体操作规程，养成良好的实验习惯.

具有批判与怀疑思想，是科学工作者的一个基本素质。同样,主动分析与思考是实现物理实验课目的的一个最关键的因素。我们期望每个学生都能以研究者的态度去探讨最佳实验方案、组装实验装置、分析操作步骤、注意实验条件,在学习物理基础知识的同时，受到严格的训练，为以后独立设计实验方案和完成新的实验课题创造条件。

第一章　测量误差与数据处理的基本知识

第一节　测量、误差及不确定度

一、测量

一切物理量都是通过测量得到的. 测量就是将待测量与选作标准的同类量进行比较的实验过程。测量结果应包括数值、单位以及结果可信赖的程度（用不确定度来表示）。

测量分为直接测量和间接测量，可以用测量仪器或仪表直接读出测量值的测量称为直接测量。如用米尺测长度，用温度计测温度，用电表测电流、电压等都是直接测量。

由一个或几个直接测得量经已知函数关系计算出被测量值的测量称为间接测量. 如用单摆法测重力加速度 g 时，$g=4\pi^2L/T^2$，其中 T（周期）和 L（摆长）是直接测量值，而 g 是间接测量值。

随着实验技术的进步，很多原来只能间接测量的物理量，现在也可以直接测量，例如电功率、速度等量的测量。

仪器的不同、方法的差异、测量条件的改变以及测量者的不同都会造成测量结果的变化，这样的测量是不等精度测量. 而同一个人，用同样的方法，使用同样的仪器并在相同的条件下对同一物理量进行的多次测量，叫做等精度测量. 尽管各测量值可能不相等，但没有理由认为哪一次（或几次）的测量值更可靠或更不可靠. 实际上，一切物质都在运动中，没有绝对不变的人和事物，只要其变化对实验的影响很小乃至可以忽略，就可以认为是等精度测量。以后说到对一个量的多次测量，如无另加说明，都是指等精度测量。

二、误差

物理实验是对一些物理量进行测量，各被测的物理量在一定客观条件下的真实大小称为该物理量的真值。由于实验理论的近似性、实验仪器灵敏度和分辨能力的局限性、环境的不稳定性等因素的影响，待测量的真值是不可能测得的，测量结果和真值之间总有一定的差异，这种差异定义为测量误差. 测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示。

$$\text{绝对误差}(\delta)=\text{测量值}(x)-\text{真值}(a) \qquad (1-1-1)$$

$$相对误差(E_r)=\frac{绝对误差(\delta)}{真值(a)}\times100\% \qquad (1-1-2)$$

由于真值是不能确知的，所以测量值的误差也不能确切知道，因此测量的任务就是给出被测真值的最佳估计值，并估计出这种最佳估计值的可靠程度。首先我们要分析误差的来源.根据误差的性质和产生原因可将误差分为系统误差、随机误差和过失误差三种.

1. 系统误差

系统误差的特征是其确定性，在测量条件不变时有确定的大小和方向，当测量条件改变时按照一定的规律变化，增加测量次数并不能减小系统误差。系统误差的来源主要有以下几方面：

(1)由于仪器本身的缺陷或没有按规定的条件使用仪器而造成的误差。例如，仪器的零点不准造成的误差；等臂天平两臂不等长造成的误差；在20℃的条件下标定的标准电阻在30℃的条件下使用造成的误差.

(2)由于测量所依据的理论公式本身的近似性；或者实验条件不能达到理论公式所规定的要求；或者由于测量方法所带来的误差.例如，利用单摆测量重力加速度 g,所依据的公式为 $g=4\pi^2L/T^2$(式中，L 为单摆的摆长，T 为单摆的摆动周期),此公式成立的条件是摆角趋于零.而在测量周期时又必然要求有一定的摆角，这就决定了测量结果中必然含有系统误差.

(3)由于测量者本人的生理或心理特点所造成的误差.例如,测量一段时间,观测者计时超前或落后所带来的误差；对准标志时，观测者总是偏左或偏右所造成的误差等.

在测量过程中，根据系统误差的性质，选择适当的测量方法，可使测量值中的系统误差相互抵消，从而消除系统误差对测量结果的影响.例如，天平只有在两臂严格等长时，砝码的质量才等于被测物体的质量.而事实上，天平两臂总不是严格等长的，即砝码的质量与物体的质量并不严格相等.为了消除这种系统误差,可以采用所谓复称法称衡.设天平左臂和右臂的长度分别为 l_1 与 l_2,物体的质量为 m,先将物体放在天平的左盘上,砝码放在右盘上进行称衡.天平平衡时,砝码的质量为 m',于是可得到 $ml_1=m'l_2$.然后将砝码放在天平的左盘上，物体放在右盘上进行称衡.天平平衡时,砝码的质量为 m'',于是可得到 $m''l_1=ml_2$.根据以上两式，可得 $m=\sqrt{m'm''}$.

系统误差经常是一些实验主要的误差来源，依靠多次重复测量一般不能发现系统误差是否存在.系统误差处理不当往往会给实验结果带来重大影响.因此,我们要经常总结经验，掌握各种因素引起的系统误差的规律，以提高自己的实验

水平.

2. 随机误差

随机误差的特征是其随机性.在相同的测量条件下，多次测量同一量时，误差的绝对值和符号的变化时大时小、时正时负，以不可预定的方式变化着的误差称为随机误差.

随机误差是由于人的感官灵敏程度和仪器精度有限、周围环境的干扰以及一些偶然因素的影响产生的.如用毫米刻度的米尺去测量某物体的长度时往往将米尺去对准物体的两端并估读到毫米的下一位读数值，这个数值就存在一定的随机性,也就带来了随机误差

虽然随机误差无法控制和排除，但是，当在相同的实验条件下，对被测量进行多次测量时，其大小的分布却服从一定的统计规律，可以利用这种规律对实验结果的随机误差作出估算.这就是在实验中往往对某些关键量要进行多次测量的原因.

3. 过失误差

过失误差是由于观测者不正确地使用仪器、观察错误或记录错数据等不正常情况下引起的误差.它会明显地歪曲客观现象,在数据处理中应将其剔除,所以,在作误差分析时，要估计的误差通常只有系统误差和随机误差.

三、测量仪器的精度

物理实验是依靠测量仪器来进行的.测量结果的误差大小在很大程度上取决于测量仪器是否准确，通常用精度和级别来描述仪器的这种性质.

仪器的精度通常指它能分辨的物理量的最小值.仪器的精度越高,即它的分度越细,允许的偏差就越小.由于多种因素,如材质不均匀、加工装配的缺欠以及环境(如温度、湿度、震动、杂散光、电磁场等)的影响,仪器的精度受到一定的限制.按照标准,在正常使用条件下(如温度、湿度、放置方式、额定功率等都符合要求),用某种级别的仪器进行测量时，对最大允许偏差有具体规定，这种最大允差也叫仪器的极限误差或公差,我们用 $\Delta_{仪}$ 来表示.$\Delta_{仪}$ 可在产品说明书和仪器手册中查找到.表 1-1-1 给出了常用仪器的最大允差.

仪器的级别和最大允差有关.如模拟式（即指针式）电表级别分为 5.0,2.5,1.5,1.0,0.5,0.2,0.1 等.每一量程的最大允差 $\Delta_{仪}=$量程$\times$级别%.它表示在该量程下正确使用仪器进行测量，结果可能出现的最大误差.而数字式电表测量结果的误差较为复杂,通常表示为 读数$\times$某百分数＋最末位的几个单位（具体见说明书）.

表 1-1-1　常用仪器量具的主要技术要求和最大允差

量具(仪器)	量　　程	最小分度值	最大允差
木尺(竹尺)	300～500mm 600～1000mm	1mm 1mm	±1.0mm ±1.5mm
钢板尺	150mm 500mm 1000mm	1mm 1mm 1mm	±0.10mm ±0.15mm ±0.20mm
钢卷尺	1m 2m	1mm 1mm	±0.8mm ±1.2mm
游标卡尺	125mm 300mm	0.02mm 0.05mm	±0.02mm ±0.05mm
螺旋测微器 (千分尺)	0～25mm	0.01mm	±0.004mm
七级天平 (物理天平)	500g	0.05g	±0.08g(接近满量程) ±0.06g$\left(\frac{1}{2}\right.$量程附近$\left.\right)$ ±0.04g$\left(\frac{1}{3}\right.$量程和以下$\left.\right)$
三级天平 (分析天平)	200g	0.1mg	±1.3mg(接近满量程) ±1.0mg$\left(\frac{1}{2}\right.$量程附近$\left.\right)$ ±0.7mg$\left(\frac{1}{3}\right.$量程和以下$\left.\right)$
普通温度计 (水银或有机溶剂)	0～100℃	1℃	±1℃
精密温度计 (水银)	0～100℃	0.1℃	±0.2℃

一般而言，有刻度的仪器、量具的最大允差大约对应于其最小分度值所代表的物理量.应当说明，最大允差是指所制造的同型号同规格的所有仪器中有可能产生的最大误差，并不表明每一台仪器的每个测量值都有如此之大的误差.它既包括仪器在设计、加工、装配过程中乃至材料选择中的缺欠所造成的系统误差，也包括正常使用过程中测量环境和仪器性能随机涨落的影响.

实验时选取仪器要得当，仪器使用不当对仪器和实验均不利.选取仪器有两个最基本的指标：测量范围和精度，当被测量超过仪器的测量范围时，不仅测量误差增大,而且可能会损坏仪器.在满足精度的条件下,尽量选用精度较低的仪器.

四、不确定度与置信概率

误差定义为测量值与真值的偏离，但真值是无法测得的，因此误差也就无法得到.我们只能通过一定的方法对测量误差进行估计，这就需要引入不确定度的概念.不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，是表征被测量的真值所处的量值范围的评定.我们在表示完整的测量结果时，除给出被测量

X 的量值 x_0，同时要标出测量的总不确定度 Δ，写成

$$X = x_0 \pm \Delta \qquad (P = \rho) \tag{1-1-3}$$

的形式.括号内的 P 是一个表示可能性大小的概率，ρ 为具体概率值，称之为置信概率.结果表达式(1-1-3)的含义是 区间($x_0 - \Delta, x_0 + \Delta$)内包含被测量 X 的真值的可能性有 ρ.由式(1-1-3)可知，我们可以将不确定度理解为一定概率下的误差限值.

为了直观地评定测量结果，也常采用相对不确定度的概念.用 U_r 表示相对不确定度，则有

$$U_r = \Delta / x_0 \tag{1-1-4}$$

对不同的要求，置信概率可取不同的值，常见的取值有 0.68，0.90，0.95，0.99 等.国家技术监督局 1994 年建议，置信概率通常取 0.95，因此当 $P=0.95$ 时，不必注明 P 值.多数的工业和商业用途上所用的约定概率为 0.95.

根据估计方法的不同，总不确定度可分为两类分量，一类是可以通过多次重复测量用统计学方法估算出的 A 类不确定度 Δ_A，另一类是用其他方法估算出的 B 类不确定度 Δ_B.将两类分量按方和根的方法合成，就得到测量结果的总不确定度：

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A{}^2 + \Delta_B{}^2} \tag{1-1-5}$$

需要指出的是，目前国内外关于测量结果的不确定度的表述及运算规则还未完全统一，有待于进一步的研究.

第二节　不确定度的估算

一、A 类标准不确定度

1.测量列的标准差和高斯分布

在相同的测量条件下，对某一物理量 X 进行 N 次重复测量.假设系统误差已被减弱到可以被忽略的程度，由于随机误差的存在，得到包含 n 个测量值 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ 的一个测量列.由于是等精度测量，我们无法断定哪个值更可靠.概率论可以证明，其平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-2-1}$$

为最佳值也称期望值，是最可以信赖的.

定义该测量列的标准差为

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1)} \qquad (1-2-2)$$

其统计意义是指当测量次数足够多时（比如大于 10次），测量列中任一测量值与平均值的偏差落在$[-\sigma,\sigma]$区间的概率为 0.683，这一公式称为贝塞尔公式。

当 $n\to\infty$ 时，物理量 X 将成为连续型随机变量，其概率密度分布为正态函数，形式为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\delta^2/2\sigma^2} \qquad (1-2-3)$$

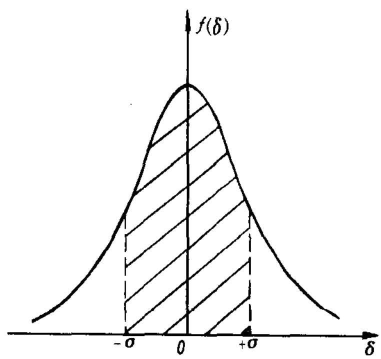

图 1-2-1　正态分布曲线

其分布为一连续曲线，如图 1-2-1 所示，横坐标为绝对误差 $\delta = x - \bar{x}$，纵坐标为误差的概率密度分布函数 $f(\delta)$，σ 为一与具体测量条件有关的常数，称之为测量列的标准差．这种分布叫高斯分布或正态分布．

正态分布具有以下特点：

(1)对称性：无论比平均值大或小，其差值的绝对值相等时，出现的概率相等

(2)单峰性：与平均值相差越大，出现的概率就越小．

(3)有界性：非常大的正误差或负误差出现的可能性几乎为零．

(4)抵偿性：当测量次数非常多时，正误差和负误差相互抵消，于是，误差的代数和趋向于零．

按照概率理论，任何一次测量值与平均值之差 δ 出现在区间$(-\infty,+\infty)$的事件是一个必然事件，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$，即曲线与横轴所包围的面积恒等于 1．当 $\delta=0$ 时，由式(1-2-3)得

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \qquad (1-2-4)$$

由式(1-2-4)可见，若测量列的标准差 σ 很小，则必有 $f(0)$很大．由于曲线与横轴间围成的面积恒等于 1，所以如果曲线中间凸起较大，则两侧分布范围较窄，即测量值的离散性小，重复测量所得的结果相互接近，测量的精度高．相反，如果 σ 很大，则 $f(0)$ 就很小，误差分布的范围就较宽，说明测量值的离散性大，测量的精度低．这两种情况的正态分布曲线如图 1-2-2 所示．

可以证明 $P(|\delta|<\sigma)=\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\delta)\mathrm{d}\delta=0.682\,689\approx68.3\%$，即 $-\sigma$ 到 σ 区间的正态分布曲线下的面积占总面积的 68.3%. 这就是说，如果测量次数 n 很大，则在所测得的数据中,将有占总数 68.3%的数据的误差落在区间 $(-\sigma, +\sigma)$之内；也可以这样讲，在所测得的数据中，任一个测量值的误差 δ_i 落在区间$(-\sigma, +\sigma)$ 之内的概率为 0.683，即置信概率为 68.3%.

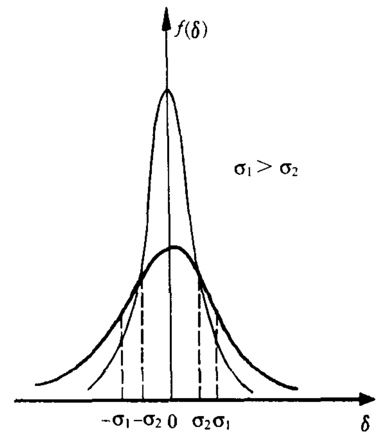

图 1-2-2 σ 与 δ 的离散性关系

也可证明，$P(|\delta|<3\sigma)=0.9973\approx99.7\%$.这表明,在 1000 次测量中,随机误差超过 $\pm3\sigma$ 范围的测量值大约只出现 3 次左右.在一般的十几次测量中，几乎不可能出现.依据这点，可对多次重复测量中，由于过失引起的异常数据加以剔除，称之为剔除异常数据的“3σ”准则.它只能用于测量次数 $n>10$ 的重复测量中,对于测量次数较少的情况,需要采用另外的判别准则.

同时，由概率积分表可得到如下一些典型数据：

$$P(|\delta|<1.96\sigma)=0.9500,\qquad P(|\delta|<2\sigma)=0.9545$$

$$P(|\delta|<2.58\sigma)=0.9901,\qquad P(|\delta|<4\sigma)=0.9999$$

正态分布是连续型随机变量中最重要、最常用的分布。一般而言，若某个测量指标 X 是很多随机因素之和，而每个因素所起的作用均很微小，则 X 为服从随机分布的变量，如上述多次等精度独立测量的情况.实际上,大量生产的同类产品,当设备、技术、原料、工艺、操作等可控制的生产条件都相对稳定,不存在明显的系统误差影响时，产品的质量指标近似服从正态分布.

2.测量列的 A 类标准不确定度

在实际工作中，人们往往关心的不是测量列的数据散布特性，而是测量结果(算术平均值)的离散程度.我们设想进行了有限的 n 次(n 仍然足够大）测量后，得到一个最佳值 $\bar{x}$,这一测量列中任一次测量值 x_i 的误差落在$[-\sigma_x, +\sigma_x]$区间内的概率为 68.3%.如果我们增加测量次数，例如测$(n+m)$次,则可得到另一个最佳值$\bar{x}'$和相应的标准差$\sigma_{x'}$.$\bar{x}$ 与$\bar{x}'$, σ_x 与 $\sigma_{x'}$一般不会相同.继续增加测量次数，可以发现 $\bar{x}$ 也是一个随机变量.那么,随着测量次数的增加,算术平均值 $\bar{x}$ 本身的可靠性如何呢？为此需要引入算术平均值标准差的概念.由概率论可以证明算术平均值 $\bar{x}$ 的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1-2-5}$$

当测量次数趋于无限时，算术平均值将无限接近待测物理量的客观值，为最佳值.$\sigma_{\bar{x}}$ 的统计意义为：待测物理量落在[$\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}, \bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$]区间内的概率为 68.3%，落在[$\bar{x}-2\sigma_{\bar{x}}, \bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}$]区间内的概率为 95.4%，落在[$\bar{x}-3\sigma_{\bar{x}}, \bar{x}+3\sigma_{\bar{x}}$]区间内的概率为 99.7%.测量列平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 又称之为该测量列的 A 类标准不确定度，通常用 Δ_A 表示.

由式(1-2-5)可见，$\sigma_{\bar{x}}$ 是测量次数 n 的函数，测量次数越多，算术平均值的标准差越小，所以多次测量提高了测量的精度.但也不是测量次数越多越好.因为 n 增大只对随机误差的减小有作用，对系统误差则无影响，而测量误差是随机误差与系统误差的综合，所以，增加测量次数对减小误差的作用是有限的；其次，$\sigma_{\bar{x}}$ 与测量次数 n 的平方根成反比，σ 一定时，当 $n>10$ 以后，$\sigma_{\bar{x}}$ 随测量次数 n 的增加而减小得很缓慢；另外，测量次数过多，观测者将疲劳，测量条件也可能出现不稳定，因而有可能出现增加随机误差的趋势.实际上，只有改进实验方法和仪器，才能从根本上改善测量的结果.

3. 有限次测量的情况和 t 因子

测量次数趋于无穷只是一种理想情况，这时物理量的概率密度服从正态分布.当次数减少时，概率密度曲线变得平坦(图 1-2-3)，成为 t 分布，也叫学生分布.当测量次数趋于无限时，t 分布过渡到正态分布.

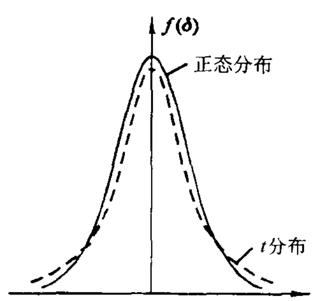

图 1-2-3　t 分布与正态分布的比较

对有限次测量的结果，要保持同样的置信概率，显然要扩大置信区间，把 $\sigma_{\bar{x}}$ 乘以一个大于 1 的因子 t.在 t 分布下，A 类不确定度记为 Δ_A：

$$\Delta_A = t\sigma_{\bar{x}} \tag{1-2-6}$$

要使测量值落在平均值附近，具有与正态分布相同的置信概率 $P=0.68$，置信区间要扩大为[$-t\sigma_{\bar{x}}, t\sigma_{\bar{x}}$].$t$ 与测量次数有关.表 1-2-1 给出不同置信概率下 t 因子与测量次数的关系.

表 1-2-1 t 因子与测量次数 n 的关系

P \ t \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	∞
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.04	1.03	1
0.90	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.86	1.83	1.76	1.73	1.71	1.65
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.36	2.31	2.26	2.15	2.09	1.96
0.99	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	2.98	2.86	2.58

[例 1] 测量某一长度得到 9 个值:42.35,42.45,42.37,42.33, 42.30,42.40,42.48,42.35,42.29(均以 mm 为单位).求该测量列的平均值、标准差和置信概率为 0.68,0.95,0.99 时的 A 类不确定度.

[解]由式(1-2-1)得平均值 $\bar{x}=42.369\text{mm}$. 由式(1-2-2)得标准差 $\sigma=0.064\text{mm}$. 由式(1-2-5)得 A 类标准不确定度 $\sigma_{\bar{x}}=0.021\text{mm}$. $n=9$,查表 1-2-1 得

$$P=0.68,\quad t=1.07$$

由式(1-2-6)得 $\Delta_A=1.07\times0.021\text{mm}=0.022\text{mm}$

$$P=0.95,\ t=2.31,\ \Delta_A=2.31\times0.021\text{mm}=0.048\text{mm}$$

$$P=0.99,\ t=3.36,\ \Delta_A=3.36\times0.021\text{mm}=0.070\text{mm}$$

二、B 类标准不确定度

测量中凡是不符合统计规律的不确定度统称为 B 类不确定度,记为 Δ_B 例如系统误差的影响使测量值向确定方向偏移,又例如在不能多次测量或多次测量毫无意义时,其测量引入的不确定度均为 B 类不确定度在物理实验中(在实际工作生活中更是如此),大多数测量都是一次测量.通常用测量仪器的最大允差来表示一次测量结果的 B 类不确定度

根据 $\Delta_{仪}$ 的定义,测量值与真值的误差在$[-\Delta_{仪},\Delta_{仪}]$内的置信概率为 1,那么在置信概率小于 1 的某一确定的概率下,B 类不确定度可表示为

$$\Delta_B=\Delta_{仪}/C \tag{1-2-7}$$

C 为置信系数.置信概率为 $P=0.68$ 的 B 类不确定度称为 B 类标准不确定度.

实验仪器不同,仪器误差在$[-\Delta_{仪},\Delta_{仪}]$范围内的分布函数也不同,如秒表、物理天平、千分尺、米尺的仪器误差分布为正态分布,而游标卡尺的仪器误差分布为均匀分布,有的仪器的误差分布可能是三角分布,如图 1-2-4 所示.

误差分布形式的不同,导致实现相同置信概率下置信系数 C 的取值也不同.

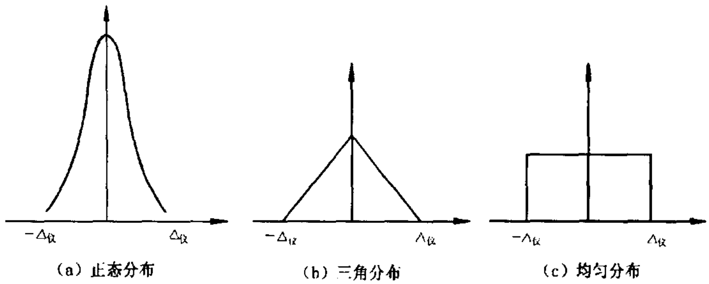

图 1-2-4　几种仪器误差的分布曲线

例如对于误差分布为正态分布的测量仪器，一次测量值的 B 类标准不确定度 Δ_B 取值为 $\Delta_{仪}/3$,此时表明测量误差落在$[-\Delta_B,\Delta_B]$内的概率为 $P=0.68$ 而对于误差分布为均匀分布的仪器，要获得相同置信概率,B类标准不确定度 $\Delta_B=\dfrac{\Delta_{仪}}{1.47}$.

在今后的不确定度合成中，只有具有相同置信概率下的各不确定度分量才能进行合成，因此在利用式(1-2-7)或进行 B 类不确定度计算时，只有明确其置信概率才有意义.

正态分布下，不同置信概率的 B类不确定度 Δ_B 的转换关系为

$$\Delta_B = k_P \frac{\Delta_{仪}}{3} \tag{1-2-8}$$

k_P 称置信因子,置信概率 P 与 k_P 的关系见表 1-2-2.

表 1-2-2　置信概率 P 与 k_P 的关系

P	0.500	0.683	0.900	0.950	0.955	0.990	0.997
k_P	0.675	1	1.65	1.96	2	2.58	3

目前人们对很多仪器的在最大允差范围内的误差分布性质尚不完全清楚，很多时候便将他们简化为均匀分布处理，此时 B类不确定度有：

$$\Delta_B = \Delta_{仪}/\sqrt{3} \qquad (P = 0.58)$$

$$\Delta_B = \Delta_{仪}/1.47 \qquad (P = 0.68)$$

$$\Delta_B = \Delta_{仪} \qquad (P = 1)$$

三、测量值的估计误差

对于标刻度的量具和仪器,如果仪器的刻度清晰,照明好,要估读到最小刻度

的几分之一(如 1/10,1/5,1/2). 这最小刻度的几分之一，即为测量值的估计误差，记作 $\Delta_{估}$. 测量值中能读准的位数加上估读的这一位为有效数字. 如用米尺测量书本上两条平行细线之间的距离，应能估读到最小刻度（1mm)的十分之一。人们常把能读准的数字叫可靠数字，估读的一位数字叫可疑数字，测量值的误差往往在这最后一位.

用数字式仪表测量，凡是能稳定显示的数值都应记录下来. 其数值的位数就是该测量值的有效数字. 如用某数字万用表测电压，显示值为 217V,位数为 3,它的有效数字位数就是 3. 如果测量值的末位或末两位数字变化不定，应当记录稳定的数值加下一位正在显示的值，或者根据其变化规律，四舍五入到读数稳定的那一位如果两位以上的数字都变化不定，应考虑选择更合适的量程或更合适的仪器.

一般来讲，测量值的估计误差 $\Delta_{估}$ 远小于仪器的最大允差 $\Delta_{仪}$,所以上面用 $\Delta_{仪}$ 来确定测量结果的 B类不确定度. 但是，在有些情况下，例如用钢板尺测量光学元件的间距，由于很难将直尺的刻度与被测物对齐，此时测量的估计误差有 1 mm甚至更大，而钢板尺的最大允差不会超过 0.2mm 再如用电子秒表测时间，电子秒表内的石英晶体振荡频率的准确度在 10^{-5}s 以上. 但实验者在判定计时开始和结束时会有 0.1～0.2s的估计误差,远远大于 $\Delta_{仪}$.

$\Delta_{估}$ 和 $\Delta_{仪}$是相互独立的,都不满足统计规律,一般用下式估算 B类不确定度：

$$\Delta_{B} = \sqrt{\Delta_{估}^{2} + \Delta_{仪}^{2}} \tag{1-2-9}$$

若一个分量小于另一个分量的三分之一，则按式（1-2-9）,可以忽略较小的分量.

四、不确定度的合成与展伸

假设仪器误差在$[-\Delta_{B}, \Delta_{B}]$ 范围内服从正态分布，这时在 68% 的置信概率下，测量值的合成标准不确定度经过 $t_{0.68}$因子修正后有($P=0.68$)

$$\Delta_{0.68} = \sqrt{(t\sigma_{\bar{x}})^{2} + (\Delta_{仪}/C)^{2}} \tag{1-2-10}$$

将合成标准不确定度乘以一个与一定置信概率相联系的包含因子（或称覆盖因子）K ,得到增大置信概率的不确定度,叫做展伸不确定度(或扩展不确定度). 对于正态分布,$K=k_{P}$. 若取置信概率 0.95 ,对正态分布,$k_{P}=1.96$,得展伸不确定度为

$$\Delta_{0.95} = 1.96\Delta_{0.68} \qquad (P=0.95) \tag{1-2-11}$$

若置信概率为 0.99,$k_{P}=2.58$,则展伸不确定度为

$$\Delta_{0.99} = 2.58\Delta_{0.68} \qquad (P=0.99) \tag{1-2-12}$$

在通常的物理实验中，测量次数多在 6～10 次之间，当我们知道 $\Delta_{仪}$ 和通过测量数据计算到有限次测量列的标准差之后，置信概率为 0.95 时的不确定度为

$$\Delta_{0.95}=\sqrt{\left(t_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(K\frac{\Delta_{仪}}{C}\right)^2} \qquad (1-2-13)$$

当测量次数在 6～10 次之间时，置信概率 0.95 下的 t 因子 $t_{0.95}$ 取值在 2.57～2.26 之间，而 $\sqrt{n}$ 的取值范围在 2.45～3.16 之间，这样 $t_{0.95}/\sqrt{n}\approx 1$；同样，对于正态分布 $K=k_P=1.96, C=3, (K/C)^2\approx 1/2$，所以式(1-2-13)变为

$$\Delta_{0.95}=\sqrt{\sigma^2+\frac{1}{2}\Delta_B^2}=\sqrt{\sigma^2+\frac{1}{2}\Delta_{仪}^2+\frac{1}{2}\Delta_{估}^2} \qquad (1-2-14)$$

式中，σ 为 n 次测量列的标准差.

注意到测量结果不确定度的统计意义以及在上述操作中所做的许多近似，在实际工作中，常常忽略不同分布的差别（甚至也不知道是何种分布），而把 $\Delta_{仪}$ 和 $\Delta_{估}$ 都当成均匀分布对待，取置信因子 $C=\sqrt{3}$ 代入式(1-2-13)，得到一种较为保守的估算公式.考虑到 $(K/C)^2\approx 1$，有

$$\Delta=\sqrt{\sigma^2+\Delta_B^2}=\sqrt{\sigma^2+\Delta_{仪}^2+\Delta_{估}^2} \qquad (P\geqslant 0.95) \qquad (1-2-15)$$

式(1-2-15)的计算值偏大是显见的(或者说置信概率偏大)，因为假使 $\sigma=0$，按 $\Delta_{仪}$ 的定义，测量值在 $[-\Delta_{仪}, \Delta_{仪}]$ 范围内的概率为 1.所以，如使用式(1-2-15)计算，置信概率应标为 $P\geqslant 0.95$

从以上计算公式的推演过程的诸多近似中可以看出，测量结果的表达式给出了物理量的期望值及在一定置信区间的不确定度.所以，置信概率和不确定度通常只取两位有效数字，不确定度的首位数字大于或等于 3 时，也可取一位有效数字。

根据所用的置信概率，测量结果的最终表达式为

$$\begin{aligned} x&=\bar{x}\pm\Delta_{0.68} \qquad (P=0.68)\\ x&=\bar{x}\pm\Delta_{0.95} \qquad (P=0.95) \qquad (1-2-16)\\ x&=\bar{x}\pm\Delta_{0.99} \qquad (P=0.99)\end{aligned}$$

式中，$\bar{x}$ 为不含系统误差的测量结果，通常就是测量列的平均值.不确定度取 1 位或 2 位有效数字，测量值 x 的最后一位与不确定度的最后一位对齐.

测量结果也可以采用相对展伸不确定度的形式：

$$x=\bar{x}(1\pm U_r) \qquad (P=P)$$

同样注明 P 值,式中 U_r 为 $\Delta/\bar{x}$,取一位或两位有效数字,用百分数来表示.

五、间接测量的不确定度估算

在很多实验中，我们进行的测量都是间接测量.因为间接测量量是各直接测量量的函数，所以直接测量量的误差必定会给间接测量量带来误差，这被称为误差的传递(播).这样一来，直接测量结果的不确定度就必然会影响到间接测量结果，这种影响的大小可以由相应的公式估算出来.

1.间接测量的不确定度合成公式

设间接测量量 y 是各相互独立的直接测量量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的函数,其函数形式为

$$y = f(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1-2-18}$$

设各直接测量量 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 的测量结果分别为 $\bar{x}_1 \pm \Delta_{x_1}$, $x_2 \pm \Delta_{x_2}$, $\cdots$, $\bar{x}_m \pm \Delta_{x}$,则间接测量量 y 的最佳估计值为

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m) \tag{1-2-19}$$

由于不确定度都是微小的量,相当于数学中的"增量",因此间接测量量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同.不同之处：①要用不确定度 Δ_{x_1} 等替代微分 $\mathrm{d}x$;等 ;②要考虑到不确定度合成的统计性质.

具体做法如下：

首先对函数式(1-2-18)求全微分：

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m \tag{1-2-20}$$

然后分别用不确定度 Δ_y, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, $\cdots$, Δ_{x_m} 替代 $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_m$,并对等式右端进行方和根合成，得到间接测量量的不确定度方和根合成公式：

$$\Delta_y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right)^2} \tag{1-2-21}$$

对于积商形式的函数，为计算方便，可先对函数式(1-2-18)取对数,得

$$\ln y = \ln f(x_1,x_2,\cdots,x_m) \tag{1-2-22}$$

再对上式求全微分：

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{f}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{f}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\mathrm{d}x_m}{f} \tag{1-2-23}$$

方和根合成，得到的是间接测量量的相对不确定度的方和根合成公式：

$$\frac{\Delta_y}{y}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right)^2} \tag{1-2-24}$$

在一些情况下，只需要粗略估计出不确定度的大小，此时不确定度可采用线性(算术)合成公式来计算：

$$\Delta_y=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right| \tag{1-2-25}$$

$$\frac{\Delta_y}{y}=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta_{x_1}}{f}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\Delta_{x_2}}{f}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\Delta_{x_m}}{f}\right| \tag{1-2-26}$$

用算术合成公式估算出的间接测量量的不确定度偏大.

用式(1-2-21)~(1-2-26)估算间接测量量的不确定度时，应使式中各直接测量量的不确定度具有相同的置信概率.表 1-2-3 给出了常用函数的不确定度传递公式.

表 1-2-3　常用函数不确定度传递公式

函数表达式	传递(合成)公式
$W=x\pm y$	$\Delta_W=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2}$
$W=x\cdot y$	$\frac{\Delta_W}{W}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$
$W=x/y$	$\frac{\Delta_W}{W}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2}$
$W=\frac{x^k y^n}{z^m}$	$\frac{\Delta_W}{W}=\sqrt{k^2\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2+n^2\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2+m^2\left(\frac{\Delta_z}{z}\right)^2}$
$W=kx$	$\Delta_W=k\Delta_x$，　$\frac{\Delta_W}{W}=\frac{\Delta_x}{x}$
$W=k\sqrt{x}$	$\frac{\Delta_W}{W}=\frac{1}{2}\frac{\Delta_x}{x}$
$W=\sin x$	$\Delta_W=\lvert\cos x\rvert\Delta_x$
$W=\ln x$	$\Delta_W=\frac{\Delta_x}{x}$

2. 不确定度分析与实验设计

间接测量量的不确定度合成公式除了用来估算间接测量值的不确定度之外，还有一个重要的功能，就是可以用它来分析各直接测量值的不确定度对间接测量结果不确定度影响的大小，为合理选用测量仪器和实验方法提供依据.

在实际测量中，通常要事先确定待测物理量的不确定度. 当对间接测量量不确定度的要求确定后，对各直接测量量的不确定度的要求仍是不定的，只能在某些假定条件下进行不确定度的分配. 我们这里只介绍比较简单的不确定度等作用假设. 它是假定各个不确定度分量对总不确定度的影响相等，由此得到各直接测量量的不确定度，进而确定测量各个直接测量量应选用的仪器.

比如,若用合成公式

$$\Delta_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right)^2}$$

来作不确定度分析,则假设

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1}\right|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2}\right|=\cdots=\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta_{x_m}\right|=\frac{\Delta_y}{\sqrt{m}}$$

[例 2] 根据公式 $\rho=\frac{4m}{\pi D^2 H}$测量圆柱体的密度，其中 m,D,H 分别是圆柱体的质量、底面直径和高. 现要求$\frac{\Delta_\rho}{\rho}\leqslant 0.5\%$，若 $m\approx 33$ g，$D\approx 12$mm，$H\approx 35$mm，则 m,D,H 各应选择何等级别的仪器进行测量？

[解]

$$\frac{\Delta_\rho}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_m}{m}\right)^2+\left(\frac{2\Delta_D}{D}\right)^2+\left(\frac{\Delta_H}{H}\right)^2}$$

根据不确定度等作用假设，令

$$\frac{\Delta_m}{m}=\frac{2\Delta_D}{D}=\frac{\Delta_H}{H}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\Delta_\rho}{\rho}$$

则

$$\frac{\Delta_m}{m}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}},\quad \frac{2\Delta_D}{D}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}},\quad \frac{\Delta_H}{H}\leqslant\frac{0.5\%}{\sqrt{3}}$$

将 m,D,H 的数值分别代入上面三式，计算得